

Fizyka z Matematyką II

Operatory różniczkowe

Zadanie 56. Pokazać, że gradient pola skalarnego wskazuje kierunek największego wzrostu pola i jest prostopadły do izopowierzchni (powierzchni stałej wartości pola).

Zadanie 57. Pokazać, że dla pola wektorowego $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(r) \mathbf{e}_r$ (pole centralne)

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad \text{dla } r \neq 0.$$

Zadanie 58. Znaleźć pole centralne $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, dla którego $\nabla \mathbf{A} = 0$, $r \neq 0$.

Zadanie 59*. Korzystając z twierdzenia Ostrogradskiego-Gaussa-Greena znaleźć całkową postać równania Maxwella

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho(\mathbf{r}).$$

Zadanie 60. Znaleźć postać pola wektorowego $\mathbf{A}$, dla którego zachodzi

$$\oint_S \mathbf{A} d\mathbf{s} = V,$$

gdzie V jest objętością obszaru ograniczonego powierzchnią S . Znaleźć objętości sześcianu o krawędzi a i kuli o promieniu r , obliczając całkę po powierzchni graniczącej każdy z tych obszarów.

Zadanie 61*. Korzystając z twierdzenia Stokesa znaleźć całkową postać równania Maxwella

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right).$$

Zadanie 62. Znaleźć postać pola wektorowego $\mathbf{A}$, dla którego zachodzi

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} d\mathbf{l} = S,$$

gdzie S jest powierzchnią obszaru rozpiętego na krzywej Γ . Znaleźć pole powierzchni koła o promieniu r , obliczając całkę po okręgu, na którym rozpięte jest to koło.

Prawo Coulomba i zasada superpozycji, prawo Gaussa

Zadanie 63. Dwa ładunki, q i $-q$ zostały umieszczone w dwóch wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku a . Znajdź potencjał i natężenie pola elektrycznego w punkcie położenia trzeciego wierzchołka trójkąta. Oblicz natężenie pola elektrycznego korzystając ze związku pomiędzy natężeniem i potencjałem pola, $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$.

Zadanie 64. Znaleźć energię układu czterech jednakowych ładunków punktowych q umieszczonych w wierzchołkach kwadratu o boku a . Jaką pracę należy wykonać, aby w środku kwadratu umieścić dodatkowy ładunek q ?

Zadanie 65*. Znaleźć energię jednorodnie naładowanej kuli o promieniu R i ładunku Q .

Zadanie 66. Znaleźć potencjał i natężenie pola elektrycznego dipola elektrycznego o momencie dipolowym μ oraz jego energię w stałym i jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu $\mathbf{E}$. Określić moment siły działający na dipol w tym polu.

Zadanie 67. Okrąg o promieniu R jest jednorodnie naładowany ładunkiem Q . Znajdź potencjał i natężenie pola elektrycznego na osi symetrii prostopadłej do powierzchni okręgu.

Zadanie 68*. Koło o promieniu R jest jednorodnie naładowane ładunkiem o gęstości powierzchniowej σ . Znajdź potencjał i natężenie pola elektrycznego na osi symetrii prostopadłej do powierzchni koła. Zbadać przypadek graniczny $R \rightarrow \infty$. Czy poprawne jest wówczas kulombowskie cechowanie potencjału $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi = 0$?

Zadanie 69. Znaleźć natężenie i potencjał pola elektrycznego, którego źródłem jest jednorodnie naładowana płaszczyzna o gęstości powierzchniowej ładunku σ . Wykorzystując otrzymane rozwiązanie znajdź natężenie pola elektrycznego wytworzonego przez dwie przeciwnie naładowane, równoległe płaszczyzny, odległe o d .

Zadanie 70. Znaleźć natężenie i potencjał pola elektrycznego, którego źródłem jest jednorodnie naładowana prosta o gęstości liniowej ładunku λ .

Zadanie 71. Prosta z poprzedniego zadania została umieszczona na osi jednorodnie naładowanego nieskończonego cylindra o promieniu R i gęstości liniowej ładunku $-\lambda$. Znaleźć natężenie pola elektrycznego w przestrzeni.

Zadanie 72*. Znaleźć natężenie i potencjał pola elektrycznego, którego źródłem jest jednorodnie naładowana kula o promieniu R i ładunku Q . Narysować wykres zależności natężenia i potencjału pola elektrycznego od odległości od środka kuli. Obliczyć energię tej kuli.

Przewodniki w polu elektrycznym, pojemność

Zadanie 73. Znaleźć pojemność kondensatora sferycznego o promieniach okładek r_1 i r_2 . Obliczyć energię tego kondensatora, jeżeli jest on naładowany ładunkiem Q . Jaka jest siła oddziaływania pomiędzy okładkami?

Zadanie 74*. Dwa kondensatory o pojemnościach C_1 i C_2 połączono szeregowo i naładowano za pomocą baterii o napięciu U . Po odłączeniu baterii a) połączono luźne końce przewodów, b) rozłączono kondensatory, a następnie połączono tak, że zwarte są okładki, które mają ładunek o tym samym znaku. Jaki jest końcowy ładunek kondensatorów w obu przypadkach?

Zadanie 75*. Jednorodnie naładowana prosta o gęstości liniowej ładunku λ_1 została umieszczona na osi jednorodnie naładowanego przewodnika w postaci wydrążonego walca o promieniu wewnętrznym a i zewnętrznym b . Liniowa gęstość ładunku walca wynosi λ_2 . Znaleźć natężenie pola elektrycznego w przestrzeni i gęstość powierzchniową ładunku na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni wydrążonego walca?

* - zadanie nieobowiązkowe na ćwiczeniach