

# Fizyka z Matematyką II

## Całka wielokrotna, dynamika i statyka bryły sztywnej

**Zadanie 1.** Znaleźć objętość stożka kołowego o wysokości  $H$  i promieniu podstawy  $R$ .

**Rozwiązanie:** wybieramy oś  $z$  tak, aby zawierała wysokość stożka i punkt  $z = 0$  pokrywał się z wierzchołkiem kąta rozwarcia stożka. Podstawa stożka przecina oś  $z$  w punkcie  $z = H$ .

Dzielimy stożek na cienkie plasterki o grubości  $dz$  i objętości  $dV = \pi r^2(z) dz$ . Ponieważ promień plasterka  $r(z) = R \frac{z}{H}$ , element objętości

$$dV = \frac{\pi R^2}{H^2} z^2 dz.$$

Objętość stożka

$$V = \frac{\pi R^2}{H^2} \int_0^H z^2 dz = \frac{1}{3} \frac{\pi R^2}{H^2} (H^3 - 0) = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Zadanie to możemy też rozwiązać bez uproszczeń, obliczając objętość stożka w układzie walcowym

$$V = \iiint_V r dr d\varphi dz.$$

Wybierając układ współrzędnych tak, że oś stożka pokrywa się z osią  $z$  i wierzchołek stożka leży w środku układu współrzędnych, granice obszaru stożka są następujące

$$\begin{cases} z \in [0, H] \\ r \in [0, Rz/H] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Zatem

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz \int_0^{Rz/H} r dr = 2\pi \int_0^H \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_0^{Rz/H} dz = \frac{\pi R^2}{H^2} \int_0^H z^2 dz = \frac{\pi R^2}{H^2} \frac{1}{3} H^3 = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

**Zadanie 2.** Znaleźć objętość jednorodnego, ściętego stożka kołowego o wysokości  $H$ , promieniu dolnej podstawy  $R$  i promieniu górnej podstawy  $R/2$ .

**Rozwiązanie:** wybieramy oś  $z$  tak, aby zawierała wysokość stożka i punkt  $z = 0$  pokrywał się z wierzchołkiem kąta rozwarcia stożka. Górna i dolna podstawa stożka przecinają oś  $z$  w punktach  $z_1 = H$  i  $z_2 = 2H$ .

Dzielimy stożek na cienkie plasterki o grubości  $dz$ . Objętość plasterka  $dV = \pi r^2 dz$ , gdzie  $r = \frac{zR}{2H}$  jest promieniem plasterka. Objętość ściętego stożka

$$V = \frac{\pi R^2}{4H^2} \int_H^{2H} z^2 dz = \frac{1}{3} \frac{\pi R^2}{4H^2} (8H^3 - H^3) = \frac{7\pi R^2 H}{12}$$

Objętość ta jest równa różnicy objętości pełnego stożka i obciętego fragmentu.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 2H - \frac{1}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 H$$

Zadanie to możemy też rozwiązać obliczając wprost objętość obszaru stożka w układzie walcowym. Obliczmy objętość całego stożka o promieniu podstawy  $R$  i wysokości  $h = 2H$ . Wybierając układ współrzędnych tak, że oś stożka pokrywa się z osią  $z$  i wierzchołek stożka leży w środku układu współrzędnych, granice obszaru stożka są następujące

$$\begin{cases} z \in [0, h] \\ r \in [0, R\frac{z}{h}] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Zatem

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^{Rz/h} r dr = 2\pi \int_0^h \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^{Rz/h} dz = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h z^2 dz = \frac{\pi R^2}{h^2} \frac{1}{3} h^3 = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

Dla ściętego stożka

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 2H - \frac{1}{3} \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 H = \frac{1}{3} \pi R^2 H \left(2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{7\pi R^2 H}{12}.$$

**Zadanie 3.** Znaleźć położenie środka masy jednorodnego trójkąta równoramiennego o wysokości  $h$  i długości krawędzi podstawy  $2a$ .

**Rozwiązanie:** ponieważ trójkąt jest jednorodny, wektor położenia środka masy

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \iint_S \mathbf{r} dm = \frac{1}{S} \iint_S \mathbf{r} dS,$$

gdzie  $M$  i  $S$  są odpowiednio masą i polem powierzchni trójkąta. Zauważamy, że środek masy będzie leżał na prostej zawierającej wysokość trójkąta. Wybieramy oś  $x$  tak, aby pokrywała się z tą prostą i dzielimy trójkąt na cienkie paski o szerokości  $dx$  i wysokości  $\frac{2ax}{h}$ . Pole powierzchni wycinka

$$dS = \frac{2ax}{h} dx = 2ah \frac{x}{h} dx/h = 2S \frac{x}{h} dx/h,$$

gdzie  $S = ah$  jest polem powierzchni trójkąta. Wprowadzając nową zmienną  $u = x/h$ , współrzędna  $X$  położenia środka masy

$$X = 2h \int_0^1 u^2 du = \frac{2}{3} h$$

Zadanie można także rozwiązać bez uproszczeń wynikających z dostrzeżonej symetrii. Wektor położenia środka masy

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \iint_S \mathbf{r} dm = \begin{pmatrix} \frac{1}{M} \iint_S x dm \\ \frac{1}{M} \iint_S y dm \end{pmatrix}.$$

Wybierając układ współrzędnych tak, że wierzchołek trójkąta leży w środku układu współrzędnych i oś  $x$  pokrywa się z osią symetrii trójkąta równoramiennego, granice obszaru trójkąta są następujące

$$\begin{cases} x \in [0, h] \\ y \in [-\frac{ax}{h}, \frac{ax}{h}] \end{cases}$$

Element masy  $dm = \frac{M}{S} dS = \frac{M}{S} dx dy$ . Stąd

$$X = \frac{1}{S} \int_0^h \int_{-ax/h}^{ax/h} x dx dy = \frac{1}{S} \int_0^h x dx \int_{-ax/h}^{ax/h} dy = \frac{1}{S} \int_0^h x \frac{2ax}{h} dx = \frac{2a}{hS} \int_0^h x^2 dx = \frac{2a}{hS} \frac{1}{3} h^3 = \frac{2}{3} h,$$

ponieważ pole rozważanego trójkąta  $S = ah$ .

Podobnie obliczamy drugą składową wektora środka masy

$$Y = \frac{1}{S} \int_0^h \int_{-ax/h}^{ax/h} y dx dy = \frac{1}{S} \int_0^h dx \int_{-ax/h}^{ax/h} y dy = 0.$$

Skorzystaliśmy tu z faktu, że całka z funkcji nieparzystej po symetrycznym odcinku jest równa zero.

Ostatecznie, wektor położenia środka masy

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} h \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Zadanie 4.** Jaką siłę należy przyłożyć do punktu na równiku Ziemi, aby zahamować jej obrót w czasie  $\Delta t = 100$  lat (1 rok = 365.25 dób gwiazdowych)? Przyjąć, że Ziemia jest kulą o masie  $m \approx 6 \cdot 10^{24}$  kg i promieniu  $r \approx 6400$  km.

**Rozwiązanie:** Moment pędu Ziemi wynosi

$$L = \frac{2}{5} mr^2 \omega,$$

gdzie  $\omega = 2\pi/(24 \cdot 3600)$  1/s jest prędkością kątową Ziemi. Aby zatrzymać Ziemię w czasie  $\Delta t$  należy działać momentem siły spełniającym równość

$$L = M\Delta t = Fr\Delta t.$$

Stąd siła

$$F = \frac{2mr\omega}{5\Delta t}.$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy

$$F = \frac{2}{5} \cdot \frac{2\pi \cdot 6 \cdot 6.4 \cdot 10^{30}}{24^2 \cdot 3.6^2 \cdot 365.25 \cdot 10^8} \approx 3.5 \cdot 10^{17} N.$$

**Zadanie 5.** Znaleźć przyspieszenie kątowe i liniowe jednorodnego walca i cienkiej rury o masie  $m$  i promieniu  $r$  podczas staczania się bez poślizgu z równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha$  w stałym polu grawitacyjnym o natężeniu  $g$ . Jaki warunek musi spełniać kąt nachylenia równi, aby ruch odbywał się bez poślizgu, jeżeli współczynnik tarcia statycznego wynosi  $\mu$ ?

**Rozwiązanie:**

Równanie ruchu postępowego środka masy

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}.$$

Ruch odbywa się bez poślizgu, zatem na ciało działa siła tarcia i wypadkowa siła działająca wzdłuż równi

$$F = mg \sin \alpha - T,$$

gdzie  $T$  jest wartością siły tarcia. Równanie ruchu postępowego w postaci skalarnej

$$ma = mg \sin \alpha - T.$$

Równanie ruchu obrotowego względem osi przechodzącej przez środek masy

$$I\vec{\varepsilon} = \mathbf{M},$$

gdzie  $I$  jest momentem bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy. Wypadkowy moment siły względem tej osi

$$M = rT$$

i równanie ruchu obrotowego w postaci skalarnej

$$I\varepsilon = rT.$$

Ponieważ ruch odbywa się bez poślizgu, przyspieszenie kątowe i przyspieszenie liniowe łączy zależność

$$a = r\varepsilon.$$

Stąd układ równań

$$\begin{cases} ma = mg \sin \alpha - T \\ Ia = r^2 T \end{cases}$$

czyli przyspieszenie liniowe

$$a = \frac{mr^2 g \sin \alpha}{I + mr^2}.$$

Przyspieszenie kątowe

$$\varepsilon = \frac{mrg \sin \alpha}{I + mr^2}.$$

Ponieważ walec i cienka rura o tej samej masie i promieniu mają różne momenty bezwładności, przyspieszenia obu ciał będą różne. Moment bezwładności rury względem osi rury

$$I_r = mr^2.$$

Moment bezwładności walca względem osi walca

$$I_w = \int_V r'^2 dm = \int_0^r r'^2 \underbrace{\frac{2\pi r' dr'}{\pi r^2} m}_{dm} = \frac{2m}{r^2} \int_0^r r'^3 dr' = \frac{1}{2}mr^2.$$

Stąd przyspieszenia liniowe rury i walca wynoszą odpowiednio  $a_r = \frac{1}{2}g \sin \alpha$ ,  $a_w = \frac{2}{3}g \sin \alpha$  ( $a_w > a_r$ ).

Aby ruch odbywał się bez poślizgu,

$$T \leq \mu mg \cos \alpha.$$

Siła tarcia

$$T = m(g \sin \alpha - a) = mg \sin \alpha \left(1 - \frac{mr^2}{I + mr^2}\right) = mg \sin \alpha \frac{I}{I + mr^2}.$$

Z warunku

$$mg \sin \alpha \frac{I}{I + mr^2} \leq \mu mg \cos \alpha$$

otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu \left(1 + \frac{mr^2}{I}\right).$$

Dla rury kąt graniczny spełnia warunek

$$\operatorname{tg} \alpha_r = 2\mu.$$

Dla walca

$$\operatorname{tg} \alpha_w = 3\mu.$$

Problem staczania się z równi pochyłej bez poślizgu ciała o symetrii cylindrycznej (kula, walec, rura) można także rozpatrywać w układzie związanym z chwilową osią obrotu

W układzie tym równanie ruchu obrotowego

$$I'\vec{\varepsilon} = \mathbf{M} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{g}),$$

gdzie  $I' = I + mr^2$  jest momentem bezwładności ciała względem chwilowej osi obrotu. Wektor momentu pędu jest równoległy do osi obrotu i skierowany zgodnie z wektorem prędkości kątowej i przyspieszenia kątowego. Współrzędne wektorów spełniają równość (równanie ruchu w postaci skalarnej)

$$I'\varepsilon = mgr \sin(\pi - \alpha) = mgr \sin \alpha$$

Stąd przyspieszenie kątowe

$$\varepsilon = \frac{mgr \sin \alpha}{I'}.$$

Ponieważ ruch odbywa się bez poślizgu, przyspieszenie liniowe środka masy

$$a = r\varepsilon = \frac{mr^2g \sin \alpha}{I'} = \frac{mr^2g \sin \alpha}{I + mr^2}.$$

**Zadanie 6.** Znaleźć moment bezwładności cienkiej prostokątnej płyty o bokach  $a$  i  $b$  względem osi zawierających oba równoległe boki o długości  $b$ , jeżeli powierzchniowa gęstość masy płyty zmienia się wzdłuż boku  $a$  w sposób określony zależnością  $\sigma(x) = \sigma_0 \left(\frac{x}{a}\right)^n$  ( $n \geq 0$ ,  $\sigma_0 > 0$ ), gdzie  $x$  jest odległością od krawędzi płyty. Jaki jest moment bezwładności płyty względem osi przechodzącej przez środek masy i równoległej do rozważanych osi?

**Rozwiązanie:** Masa płyty wynosi

$$m = \int_0^a \sigma_0 \left(\frac{x}{a}\right)^n b \, dx = \frac{\sigma_0 b}{a^n} \int_0^a x^n \, dx = \frac{\sigma_0 b a}{n+1}.$$

Moment bezwładności względem osi zawierającej lewy bok o długości  $b$

$$I_1 = \int_S x^2 \, dm = \int_0^a x^2 \underbrace{\sigma_0 \left(\frac{x}{a}\right)^n b \, dx}_{dm} = \frac{\sigma_0 b}{a^n} \int_0^a x^{n+2} \, dx = \frac{\sigma_0 b a^3}{n+3} = \frac{n+1}{n+3} m a^2.$$

Moment bezwładności względem równoległej osi zawierającej drugi bok o długości  $b$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_S (a-x)^2 \, dm = \int_0^a (x^2 - 2ax + a^2) \sigma_0 \left(\frac{x}{a}\right)^n b \, dx = \frac{\sigma_0 b}{a^n} \int_0^a (x^{n+2} - 2ax^{n+1} + a^2 x^n) \, dx \\ &= \sigma_0 b a^3 \left( \frac{1}{n+3} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2\sigma_0 b a^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{2ma^2}{(n+2)(n+3)} = \frac{2I_1}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia Steinera

$$\begin{cases} I_1 = I_0 + m x_0^2 \\ I_2 = I_0 + m(a-x_0)^2, \end{cases}$$

gdzie  $I_0$  jest momentem bezwładności płyty względem osi przechodzącej przez jej środek masy,  $x_0$  jest współrzędną środka masy płyty. Powyższy układ równań rozwiązujemy ze względu na  $I_0$  i  $x_0$ . Najprościej odjąć od siebie równania stronami, co szybko prowadzi do

$$x_0 = \frac{n+1}{n+2} a$$

(ponieważ gęstość masy zależy jedynie od  $x$ , więc współrzędna  $y$  środka masy ma postać  $y_0 = b/2$ ). Z pierwszego lub drugiego równania wyznaczamy następnie

$$I_0 = \frac{\sigma_0 b a^3}{(n+3)(n+2)^2} = \frac{n+1}{(n+3)(n+2)^2} m a^2.$$

Dla  $n = 0$  (jednorodna płyta o gęstości powierzchniowej masy  $\sigma_0$ ) masa płyty  $m = \sigma_0 a b$  i środek masy  $x_0 = a/2$ . Momenty bezwładności

$$I_1 = I_2 = \frac{\sigma_0 b a^3}{3} = \frac{1}{3} m a^2.$$

Moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy

$$I_0 = \frac{1}{12} m a^2.$$

**Zadanie 7.** Znaleźć moment bezwładności jednorodnej cienkiej płyty o masie  $m$  i kształcie trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych  $a$  i  $b$  względem osi leżących w płaszczyźnie trójkąta, prostopadłych do odcinka  $a$  i przechodzących przez jego końce.

**Rozwiązanie:** Problem sprowadza się do problemu rozważanego w poprzednim zadaniu. Masa wycinka o szerokości  $dm$  wzdłuż krawędzi  $a$

$$dm = \sigma_0 b \frac{x}{a} dx = \sigma_0 k x dx,$$

gdzie  $x$  jest odległością od wierzchołka trójkąta przy kącie ostrym, odpowiada masie  $dm$  z poprzedniego zadania dla  $n = 1$ . Stąd moment bezwładności

$$I_1|_{n=1} = \frac{\sigma_0 b a^3}{4} = \frac{1}{2} \frac{ab}{2} \sigma_0 a^2 = \frac{1}{2} m a^2.$$

Przy obrocie wokół osi zawierającej przyprostokątną

$$I_2|_{n=1} = \frac{2\sigma_0 b a^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{6} \frac{ab}{2} \sigma_0 a^2 = \frac{1}{6} m a^2.$$

Zauważmy, że suma obu momentów momentów bezwładności równa jest momentowi bezwładności płyty o masie  $2m$  względem osi przechodzącej przez bok  $b$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{3} 2m a^2.$$

**Zadanie 8.** Jaką pracę należy wykonać, aby kwadratowej cienkiej płycie o boku  $a$  i masie  $m$  nadać prędkość kątową  $\omega$  względem osi przechodzącej przez środek płyty i prostopadłej do jej powierzchni?

**Rozwiązanie:** szukana praca równa jest energii kinetycznej obracającej się płyty

$$W = \frac{I_0 \omega^2}{2},$$

gdzie  $I_0 = \alpha m a^2$  jest momentem bezwładności płyty względem osi obrotu ( $\alpha$  jest pewną stałą).

Moment bezwładności  $I_0 = 4I_1$ , gdzie  $I_1$  jest momentem bezwładności płyty o masie  $m/4$  i boku  $a/2$  względem osi przechodzącej przez wierzchołek mniejszego kwadratu.

Korzystając z twierdzenia Steinera

$$I_0 = 4(I'_0 + m d^2/4),$$

gdzie  $I'_0 = \alpha(m/4)(a/2)^2 = I_0/16$  jest momentem bezwładności mniejszego kwadratu względem osi przechodzącej przez środek masy, zaś  $d = a\sqrt{2}/4$  odległością środka masy mniejszego kwadratu od osi obrotu.

Moment bezwładności

$$I_0 = 4 \left( \frac{I_0}{16} + \frac{m a^2}{32} \right) = \frac{I_0}{4} + \frac{m a^2}{8},$$

czyli

$$I_0 = \frac{1}{6} ma^2.$$

Szukana praca

$$W = \frac{ma^2\omega^2}{12}.$$

Istnieje inny sposób rozwiązania zadania. Moment bezwładności figury płaskiej względem osi prostopadłej do płaszczyzny figury jest sumą momentów bezwładności względem dwóch osi prostopadłych do osi obrotu. Dla kwadratowej płyty, wybierając symetralne boków jako osie  $x$  i  $y$  oraz oś  $z$  jako oś obrotu, szukany moment bezwładności

$$I_z = I_x + I_y = 2I_x,$$

gdzie  $I_x = \frac{1}{12} ma^2$ . Stąd

$$I_0 = I_z = \frac{1}{6} ma^2.$$

**Zadanie 9.** Znaleźć moment bezwładności cienkiego kołowego krążka o masie  $m$  i promieniu  $r$  względem osi symetrii leżącej w płaszczyźnie krążka.

**Rozwiązanie:** wybierając układ współrzędnych tak, że początek układu znajduje się w środku krążka, oś  $z$  jest prostopadła do powierzchni krążka i oś  $x$  pokrywa się z osią obrotu, szukany moment bezwładności

$$I = I_x = \frac{1}{2} I_z$$

( $I_z = I_x + I_y = 2I_x$ ). Stąd

$$I = \frac{1}{4} mr^2.$$

**Zadanie 10.** Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu wokół osi  $x$  obszaru pod krzywą  $y = x^2$ , dla  $x \in [0, 1]$ . Obliczyć pole powierzchni tej bryły. Znaleźć jej środek masy i moment bezwładności przy obrocie wokół osi symetrii.

**Rozwiązanie:** Objętość bryły powstałej z obrotu wokół osi  $x$  obszaru pod krzywą

$$K : y = f(x), \quad \text{dla } x \in [a, b]$$

wynosi

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Pole powierzchni ("bocznej") tej bryły równe jest

$$P = 2\pi \int_a^b [f(x)] \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Z symetrii wynika, że jej środek masy znajduje się na osi OX, tzn.  $\mathbf{R} = (0, 0, x_0)$ . Ponieważ  $dV = \pi f(x)^2 dx$ , więc

$$x_0 = \frac{\pi}{M} \int_a^b \rho x f(x)^2 dx.$$

By wyznaczyć moment bezwładności  $I$  bryły obrotowej zauważmy, że wkład do  $I$  wnoszą infitezymalnie cienkie "krążki" o momentach bezwładności

$$dI = \frac{y^2}{2} dm = \frac{y^2}{2} \rho \pi y^2 dx = \frac{\pi}{2} \rho f(x)^4 dx.$$

Stąd moment bezwładności  $I$  wynosi

$$I = \int dI = \frac{\pi}{2} \int_a^b \rho f(x)^4 dx.$$

Zadanie rozwiążemy korzystając z powyższych wzorów i przyjmując, że  $\rho = \text{const}$ .

Dla  $f(x) = x^2$  otrzymujemy

$$V = \frac{\pi}{5},$$

natomiast pole powierzchni

$$P = 2\pi \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

wymaga obliczenia całki z funkcji niewymiernej. Podstawiając nową zmienną  $t$  taką, że  $x = \frac{1}{2} \sinh t = (e^t - e^{-t})/4$  otrzymujemy

$$P = \frac{\pi}{4} \int_0^{t_0} \sinh^2 t \cosh^2 t dt,$$

gdzie  $\sinh t_0 = 2$ . Kontynuując,

$$\begin{aligned} P &= \frac{\pi}{16} \int_0^{t_0} \sinh^2(2t) dt = \frac{\pi}{32} \int_0^{t_0} (\cosh(4t) - 1) dt = \frac{\pi}{32} \left( \frac{\sinh(4t)}{4} - t \right) \Big|_0^{t_0} = \\ &= \frac{\pi}{32} (\cosh(2t_0) \sinh t_0 \cosh t_0 - t_0) = \frac{\pi}{32} (18\sqrt{5} - \operatorname{arsinh} 2). \end{aligned}$$

Podobnie wyznaczamy

$$x_0 = \frac{5}{6}, \quad I = \frac{5}{18} M,$$

gdzie  $M$  jest masą bryły.

**Zadanie 11.** Obliczyć objętość i pole powierzchni kuli o promieniu  $r$ . Znaleźć moment bezwładności kuli przy obrocie względem jej osi symetrii. Wykorzystać fakt, że kula jest bryłą obrotową. Masa kuli wynosi  $m$ .

**Rozwiązanie:** Kula powstaje przez obrót krzywej  $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  wokół osi OX. Korzystając ze wzorów z poprzedniego zadania otrzymujemy

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3, \quad P = 4\pi r^2, \quad I = \frac{2}{5} m r^2. \quad (1)$$

**Zadanie 12.** Wycinek koła o promieniu  $R$  i mierze kąta środkowego  $\alpha = \pi/3$ , może obracać się wokół osi przechodzącej przez wierzchołek kąta i prostopadłej do powierzchni wycinka. Powierzchniowa gęstość masy wycinka  $\sigma(r, \varphi) = ar$ , gdzie  $a > 0$ . Jaką prędkość kątową uzyska ten wycinek w położeniu równowagi, jeśli został on wychylony z tego położenia o kąt  $\varphi_0 = \pi/3$  i puszczony. Natężenie pola grawitacyjnego wynosi  $g$ .

**Rozwiązanie:** z zasady zachowania energii

$$Mg\Delta h = \frac{I\omega^2}{2},$$

gdzie  $M$  jest masą wycinka,  $I$  jego momentem bezwładności względem osi obrotu.

Zmiana wysokości położenia środka masy

$$\Delta h = h(1 - \cos \varphi_0)$$

gdzie  $h$  jest odległością środka masy od osi obrotu. Z symetrii wnioskujemy, że środek masy leży na dwusiecznej kąta. Wybierając początek układu współrzędnych w wierzchołku kąta i kierując oś  $x$  tak, aby pokrywała się z dwusieczną kąta, odległość środka masy od osi obrotu

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{M} \int_S x \, dm = \frac{1}{M} \int_S \underbrace{r \cos \varphi}_x \underbrace{a r}_\sigma \underbrace{r \, d\varphi \, dr}_{dS} = \frac{a}{M} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^R r^3 \, dr = \frac{a}{M} 2 \sin(\alpha/2) \frac{1}{4} R^4 \\ &= \frac{a \sin(\alpha/2)}{2M} R^4 \end{aligned}$$

Moment bezwładności wycinka względem osi przechodzącej przez jego wierzchołek

$$I = \int_S r^2 \, dm = \int_0^R r^2 \underbrace{a r}_\sigma \underbrace{r \alpha \, dr}_{dS} = a\alpha \int_0^R r^4 \, dr = \frac{1}{5} a\alpha R^5$$

Podstawiając znalezione wielkości do równania wyrażającego zasadę zachowania energii, otrzymujemy

$$Mg \frac{a \sin(\alpha/2)}{2M} R^4 (1 - \cos \varphi_0) = \frac{1}{10} a\alpha R^5 \omega^2,$$

czyli

$$g \sin(\alpha/2) (1 - \cos \varphi_0) = \frac{\alpha}{5} R \omega^2$$

i ostatecznie

$$\omega = \sqrt{\frac{5g \sin(\alpha/2) (1 - \cos \varphi_0)}{\alpha R}} = \sqrt{\frac{15}{4\pi} \frac{g}{R}}.$$

**Zadanie 13.** Jednorodna kula stacza się bez poślizgu po skoczni o wysokości  $h$ . Znaleźć równanie toru środka kuli po opuszczeniu skoczni, jeżeli początkowa prędkość kuli była równa zero i w końcowym odcinku skoczni jest pozioma. Natężenie pola grawitacyjnego wynosi  $g$ .

**Rozwiązanie:** ponieważ w końcowym odcinku skoczni jest pozioma, prędkość ruchu postępowego kuli w chwili oderwania się od skoczni ma jedynie składową poziomą  $v$  (rzut poziomy). Wybierając początek układu współrzędnych w środku kuli w chwili opuszczania skoczni i kierując oś  $y$  do góry, położenie środka kuli po opuszczeniu skoczni

$$\begin{cases} x(t) = vt \\ y(t) = -gt^2/2 \end{cases}$$

czyli

$$y(x) = -\frac{gx^2}{2v^2}.$$

Początkową prędkość znajdziemy z zasady zachowania energii

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{5} = \frac{7mv^2}{10},$$

gdzie skorzystaliśmy ze znajomości momentu bezwładności  $I = \frac{2}{5}mR^2$  kuli względem osi przechodzącej przez jej środek i warunku ruchu bez poślizgu,  $\omega = v/R$ . Stąd

$$\frac{g}{v^2} = \frac{7}{10h}$$

i ostatecznie równanie toru

$$y(x) = -\frac{7x^2}{20h}.$$

**Zadanie 14.** W jakiej odległości od końca jednorodnego pręta o masie  $m$  należy umieścić masę punktową  $m$  tak, aby układ pozostawał w równowadze podparty w  $1/3$  długości?

**Rozwiązanie:** Umieścimy pręt na osi OX tak by jego końce leżały w punktach  $x = 0$  oraz  $x = l$ . Na pręt działają trzy siły:

- siła grawitacji  $\mathbf{F}_1 = -mg\mathbf{e}_y$ , pochodząca od samego pręta, zaczepiona w połowie długości pręta, czyli w punkcie  $x = l/2$ ,
- siła grawitacji  $\mathbf{F}_2 = -mg\mathbf{e}_y$  pochodząca od masy  $m$ , zaczepiona w punkcie  $x = x_0$ , który musimy wyznaczyć,
- siła reakcji  $\mathbf{N} = N\mathbf{e}_y$ ,  $N > 0$  zaczepiona w punkcie podparcia pręta, czyli w punkcie  $x = l/3$ .

Pręt będzie w równowadze jeśli suma sił oraz suma momentów sił działających na pręt będą znikać, tzn.

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{N} = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \mathbf{M}_i = 0, \quad (2)$$

gdzie  $\mathbf{M}_i$  są momentami sił  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  i  $\mathbf{N}$ .

*Metoda I:* Wyznamy momenty sił względem środka  $O$  układu współrzędnych. Wówczas

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = \frac{l}{2}\mathbf{e}_x \times (-mg\mathbf{e}_y) = -\frac{mgl}{2}\mathbf{e}_z \\ \mathbf{M}_2 &= \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = x_0\mathbf{e}_x \times (-mg\mathbf{e}_y) = -mx_0g\mathbf{e}_z \\ \mathbf{M}_3 &= \mathbf{r}_3 \times \mathbf{N} = \frac{l}{3}\mathbf{e}_x \times N\mathbf{e}_y = \frac{lN}{3}\mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

gdzie użyliśmy  $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$ . Równania (2) redukują się do następujących dwóch równań skalarnych

$$-mg - mg + N = 0, \quad -\frac{mgl}{2} - mx_0g + \frac{lN}{3} = 0,$$

których rozwiązaniem jest

$$N = 2mg, \quad x_0 = \frac{l}{6}.$$

*Metoda II:* Warto inaczej wybrać punkt, względem którego wyznaczamy momenty sił. Zauważmy, że jeśli wybierzemy punkt  $O' = (l/3, 0, 0)$  to moment siły  $\mathbf{N}$  znika, gdyż  $\mathbf{r}'_3 = 0$ . Zatem niezerowe są jedynie dwa momenty sił:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}'_1 &= \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{F}_1 = \frac{l}{6} \mathbf{e}_x \times (-mg \mathbf{e}_y) = -\frac{mgl}{6} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{M}'_2 &= \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{F}_2 = -\left(\frac{l}{3} - x_0\right) \mathbf{e}_x \times (-mg \mathbf{e}_y) = mg\left(\frac{l}{3} - x_0\right) \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Z równania  $\mathbf{M}'_1 + \mathbf{M}'_2 = 0$  otrzymujemy

$$\frac{mgl}{6} + mg\left(\frac{l}{3} - x_0\right) = 0,$$

co prowadzi do rozwiązania  $x_0 = l/6$ . Zauważmy, że w tej metodzie nie ma potrzeby wyznaczania siły reakcji  $\mathbf{N}$ .

**Zadanie 15.** Pokazać, że jeżeli wypadkowa siła działająca na ciało i wypadkowy moment siły względem pewnego punktu są równe zero, to wypadkowy moment siły względem każdego innego punktu jest także równy zero.

**Rozwiązanie:** Załóżmy, że suma sił działających na ciało znika, tzn.

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = 0 \quad (3)$$

oraz suma momentów sił (względem dowolnego punktu  $O$ ) działających na ciało także wynosi zero, tzn.

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0. \quad (4)$$

Wektory  $\mathbf{r}_i$  są poprowadzone od punktu  $O$  do punktu, w którym zaczepione są siły  $\mathbf{F}_i$ . Przyjmijmy teraz, że momenty sił wyznaczamy względem innego punktu  $O'$  takiego, że

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{R},$$

gdzie  $\mathbf{R}$  jest stałym wektorem łączącym punkty  $O'$  i  $O$ . Wówczas całkowita siła działająca na ciało jest wciąż równa zero, ale poszczególne momenty sił  $\mathbf{M}'_i = \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i$  są różne od  $\mathbf{M}_i$ . Mimo to całkowity moment pędu względem punktu  $O'$  jest wciąż równy zero, co pokazuje następujący rachunek:

$$\mathbf{M}' = \sum_i \mathbf{M}'_i = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}_i) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{R} \times \sum_i \mathbf{F}_i + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0,$$

gdzie użyliśmy (3) i (4).

**Zadanie 16.** Jednorodny pręt o masie  $m$  i długości  $l$  zawieszono na dwóch równoległych niciach o jednakowych długościach. W odległości  $l/4$  od jednego z końców pręta umieszczono masę punktową  $m$ . Znaleźć siły naciągu nici. Natężenie pola grawitacyjnego wynosi  $g$ .

**Rozwiązanie:** Przyjmijmy, że pręt leży na osi  $OX$  między punktami  $x = 0$  i  $x = l$ . Na pręt działają cztery siły:

- siła grawitacji  $\mathbf{F}_1 = -mg \mathbf{e}_y$  zaczepiona w środku pręta,

- siła grawitacji  $\mathbf{F}_2 = -mg\mathbf{e}_y$  pochodząca od masy  $m$ , zaczepiona w punkcie  $x = l/4$ ,
- siła reakcji  $\mathbf{N}_1 = N_1\mathbf{e}_y$ ,  $N_1 > 0$  (od pierwszej nici) zaczepiona w środku układu współrzędnych,
- siła reakcji  $\mathbf{N}_2 = N_2\mathbf{e}_y$ ,  $N_2 > 0$  (od drugiej nici) zaczepiona w punkcie  $x = l$ .

Pręt jest w równowadze, więc suma sił  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 = 0$ , co prowadzi do równania

$$N_1 + N_2 = 2mg. \quad (5)$$

Niezerowe momenty sił względem początku układu współrzędnych wynoszą

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = \frac{l}{2}\mathbf{e}_x \times (-mg\mathbf{e}_y) = -\frac{mgl}{2}\mathbf{e}_z \\ \mathbf{M}_2 &= \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \frac{l}{4}\mathbf{e}_x \times (-mg\mathbf{e}_y) = -\frac{mgl}{4}\mathbf{e}_z \\ \mathbf{M}_3 &= \mathbf{r}_3 \times \mathbf{N}_2 = l\mathbf{e}_x \times N_2\mathbf{e}_y = lN_2\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

(moment siły  $\mathbf{N}_1$  znika, gdyż siła  $\mathbf{N}_1$  zaczepiona jest w środku układu współrzędnych, względem którego obliczamy momenty). Z równania  $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 = 0$  dostajemy wartość siły naciągu drugiej nici

$$N_2 = \frac{3}{4}mg,$$

a korzystając z (5) wyznaczamy wartość siły naciągu pierwszej nici:

$$N_1 = \frac{5}{4}mg.$$

**Zadanie 17.** Jednorodną drabinę o masie  $m$  oparto o ścianę pod kątem  $\alpha$  do poziomu. Współczynnik tarcia drabiny o podłogę wynosi  $\mu$ , zaś ściana jest gładka. Znaleźć minimalną wartość kąta  $\alpha$ , przy którym drabina nie ześlizgnie się. Natężenie pola grawitacyjnego wynosi  $g$ .

**Rozwiązanie:** Umieścmy drabinę w układzie współrzędnych tak by jej końce leżały w punktach o współrzędnych  $A = (l \cos \alpha, 0)$  oraz  $B = (0, l \sin \alpha)$ . Na drabinę działają cztery siły:

- siła grawitacji  $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_y$  zaczepiona w środku pręta, czyli w punkcie  $C = \frac{l}{2}(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ,
- siła reakcji  $\mathbf{N}_1 = N_1\mathbf{e}_x$ ,  $N_1 > 0$ , zaczepiona w punkcie  $B$ ,
- siła reakcji  $\mathbf{N}_2 = N_2\mathbf{e}_y$ ,  $N_2 > 0$ , zaczepiona w punkcie  $A$ ,
- siła tarcia  $\mathbf{T} = -T\mathbf{e}_x$ ,  $T > 0$ , zaczepiona w punkcie  $A$ .

By drabina była w równowadze suma sił działających na nią musi znikać, tzn.

$$\mathbf{F} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \mathbf{T} = 0,$$

czyli

$$N_1 = T, \quad N_2 = mg. \quad (6)$$

Wyznaczmy momenty sił względem punktu  $A$ . Momenty sił  $\mathbf{N}_2$  oraz  $\mathbf{T}$  są równe zero, gdyż siły te są zaczepione w punkcie  $A$ . Momenty pozostałych sił mają postać

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_1 &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{N}_1 = (-l \cos \alpha \mathbf{e}_x + l \sin \alpha \mathbf{e}_y) \times N_1 \mathbf{e}_x = -l N_1 \sin \alpha \mathbf{e}_z \\ \mathbf{M}_2 &= \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} = \frac{1}{2} \left( -l \cos \alpha \mathbf{e}_x + l \sin \alpha \mathbf{e}_y \right) \times (-mg \mathbf{e}_y) = \frac{lmg}{2} \cos \alpha \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Z równania  $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = 0$  otrzymujemy

$$N_1 = \frac{mg}{2} \cot \alpha.$$

Drabina nie ześlizgnie się o ile

$$T \leq \mu |\mathbf{N}_2| = \mu N_2.$$

Wykorzystując (6) otrzymujemy warunek

$$\cot \alpha \leq 2\mu.$$