

Fizyka z Matematyką II

(zadania domowe 2020-05-07)

Równania różniczkowe, drgania normalne

Zadanie 1. Ciało o masie m porusza się pod wpływem siły $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_0 e^{-\beta t}$ ($\beta > 0$, $\mathbf{F}_0$ jest stałym wektorem) i siły oporu proporcjonalnej do prędkości, $\mathbf{F}_{op} = -2m\beta\mathbf{v}$. Znaleźć zależność prędkości ciała od czasu, jeżeli w chwili początkowej ciało spoczywało.

Zadanie 2. Prędkość zmian liczby cząstek jest proporcjonalna do liczby tych cząstek N . Czasem połowicznego zaniku $T_{1/2}$ nazywamy czas, po którym początkowa liczba rozpadających się cząstek spadnie o połowę. Znaleźć zależność $N(t)$, wiedząc, że na początku było N_0 cząstek.

Zadanie 3. Znajdź rozwiązanie równań

a) $y'' + y = 0$ spełniające warunki $y(0) = 1$ i $y'(\pi/2) = 1$

b) $y'' + 2y' + 4y = 0$ spełniające warunki $y(0) = 1$ i $y'(0) = 0$

c) $x'' - x' + \frac{1}{4}x = 0$ spełniające warunki $x(0) = 1$ i $x'(0) = 0$.

Zadanie 4. Znaleźć rozwiązania ogólne równań

a) $\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 0$, b) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$

i wyznaczyć funkcję $x(t)$ spełniające warunki początkowe $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$.

Zadanie 5. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 5e^{2t}.$$

Podać postać funkcji $x(t)$ spełniającej warunki początkowe $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 6$.

Zadanie 6. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 4e^{-t}$$

i wyznaczyć funkcję $x(t)$ spełniającą warunki początkowe $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 1$.

Zadanie 7. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\ddot{x} - x = 4te^t$$

i wyznaczyć funkcję $x(t)$ spełniającą warunki początkowe $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 2$.

Wskazówka: szukając rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego zaproponować to rozwiązanie w postaci $x(t) = (At^2 + Bt)e^t$ i znaleźć współczynniki A i B .