

28.03.2020

Wyprowadzenie wzoru Eulera:

Funkcje  $\sin x$  i  $\cos x$  zdefiniowane są przy pomocy szeregów:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Napiszmy szereg ~~dla  $\cos x$~~  dla wyrażenia  $\cos x + i \sin x$ :

$$1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \dots$$

Napiszmy szereg dla funkcji  $e^{ix}$ : (\*)

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \dots$$

Można pokazać ścisłym rachunkiem że powyższe rachunki

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Ten wywód nie jest ścisłym dowodem lecz ilustracją jak należy dowód przeprowadzić.

$$(*) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} ; e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!}$$

(0! = 1)

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \\ i^5 &= i \\ &\vdots \end{aligned}$$