22.04.2020

Zagadnienie własne (Problem własny)

Poniższe określenie może się wydać dziwne i nienormalne ale oznacza problem matematyczny związany z rozwiązaniem równania własnego i znalezienia wartości własnych i wektorów własnych.
(Oczywiście "własne" nie oznacza tu prywatne, osobiste etc. tzn. że ja mam z czymś problem...)

Sformułowanie zagadnienia:
Ograniczmy się do macierzy i wektorów takich jakie znamy tzn. tablicach liczb oraz słupków z elementami będącymi liczbami rzeczywistymi (dla uproszczenia).
Dana jest macierz A (i nic więcej).
Szukamy wartości λ i wektorów $\bar{v}$ spełniających następujące równanie:

$$\boxed{A\bar{v} = \lambda \bar{v}.}$$

(*) Uwaga: takich par $(\lambda, \bar{v})$ może być wiele!

które nazywa się równaniem własnym.

Powtarzam: ani λ ani (lub) $\bar{v}$ nie są dane.
Komentarz: oryginalnie używa się w języku angielskim zlepka Eigenproblem,

Eigen – z niemieckiego "własny"; problem – wiadomo (czyli można rzec, że to jest własny problem macierzy A). Wektory $\bar{v}$ nazywamy wektorami własnymi (eigenvector) zaś liczby λ nazywamy wartościami własnymi (eigenvalue).

Rozpiszmy równanie własne (*) w przypadku $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$$

Sprowadzając prawą stronę na lewą otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lub w postaci macierzowej

$$(A - \lambda \cdot \mathbb{1})\bar{v} = 0.$$

Wprowadzamy pojęcie wielomianu charakterystycznego, $W_n(\lambda)$

$$W_2(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}$$ dla tego przypadku

lub ogólnie dla $n \times n$:

$$W_n(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot \mathbb{1})$$

czyli mając macierz A $(n \times n)$ odejmujemy od przekątnej λ i liczymy wyznacznik. ~~[illegible]~~

$W_n(\lambda)$ jest wielomianem rzędu n.

$$W_n(\lambda) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

<u>Równanie charakterystyczne</u> to po prostu:

$$W_n(\lambda) = 0.$$

Istnieje twierdzenie które mówi, że wartości własne równania ~~[illegible]~~ własnego (*) są rozwiązaniami równania charakterystycznego dla tej macierzy, A.

Rozpatrujemy ten najprostszy przykład $n=2$.

Równanie własne ma postać:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{21}a_{12} = 0,$$

co prowadzi do równania kwadratowego:

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})}_{\text{to jest akurat } \det A} = 0,$$

które łatwo rozwiązać.

W wyniku rozwiązania otrzymujemy n wartości własnych, czyli tu: λ_1 i λ_2.

Uwaga: w ogólności wartości własne mogą być liczbami zespolonymi – to zależy od postaci macierzy A; gdyż tu wyróżnik Δ / równania kwadratowego (w naszym przykładzie) może być liczbą ujemną:

$$\Delta = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} \gtrless 0,$$

jak również to stwierdzenie dotyczy przypadku ogólnego dla macierzy $n \times n$.

W tym miejscu należy powołać się na <u>podstawowe twierdzenie algebry</u> (taka jest nazwa): równanie $W_n(x) = 0$ ma <u>co najwyżej n</u> różnych rozwiązań (w ogólności zespolonych). "Co najwyżej" oznacza, że nie więcej niż n, ale <u>różnych</u> natomiast niektóre rozwiązania mogą być wielokrotne!

Oznacza to, że równanie własne dla macierzy o wymiarze $n \times n$ może mieć nie więcej niż $\underline{\underline{n}}$ wartości własnych!

Załóżmy więc, że dla naszej macierzy policzyliśmy już wartości własne, w przypadku ogólnym $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$

gdzie $m \leq n$.

Jak teraz wyznaczyć wektory własne?
Uwaga: wektor własny związany jest ("nierozerwalnie") z daną wartością własną.

Weźmy wartość własną λ_k. Szukamy teraz wektora $\vec{v}_k$ takiego aby spełniał równanie (poza rozw. trywialnym $\vec{v}_k = 0$)

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{dana}}}{A}\vec{v}_k = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{już znana}}}{\lambda_k} \vec{v}_k$$

Mamy więc równania w zapisie macierzowym:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_k \end{pmatrix} \underset{\text{niewiadome}}{\begin{pmatrix} v_1^k \\ v_2^k \end{pmatrix}} = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ale tutaj wyznacznik tej macierzy jest równy zero, bo wartość m.in. λ_k otrzymaliśmy z takiego właśnie warunku!

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_k \end{pmatrix} = 0 .$$

Nie można otrzymać dwóch niezależnych rozwiązań jak w przypadku gdy det$(\cancel{A})\neq 0$. Mamy bowiem układ 2 równań z dwiema niewiadomymi v_1^k i v_2^k

$$(a_{11}-\lambda_k)v_1^k + a_{12}v_2^k = 0 \qquad (1)$$

$$a_{21}v_1^k + (a_{22}-\lambda_k)v_2^k = 0 \qquad (2).$$

Z równania (1) mamy

$$\Delta \quad v_1^k = -\frac{a_{12}}{a_{11}-\lambda_k}v_2^k$$

z (2) mamy

$$v_1^k = -\frac{a_{22}-\lambda_k}{a_{21}}v_2^k$$

Ale gdy wyznacznik zero, tzn.

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{21}a_{12} = 0,$$

zachodzi: $\dfrac{a_{12}}{a_{11}-\lambda_k} = \dfrac{a_{22}-\lambda_k}{a_{21}}$

czyli oba powyższe związki Δ są równoważne. Oznacza to, że wektor własny $\bar{v}^k$ możemy podać tylko w następujących postaciach:

$$\bar{v}_I^k = \begin{pmatrix} -\dfrac{a_{12}}{a_{11}-\lambda_k}v_2^k \\ v_2^k \end{pmatrix} \text{ lub } \bar{v}_{II}^k = \begin{pmatrix} v_1^k \\ -\dfrac{a_{11}-\lambda_k}{a_{12}}v_1^k \end{pmatrix}$$

Zauważmy, że oba wektory I i II różnią się tylko stałą multiplikatywną czyli

$$\bar{v}_I^k \sim \bar{v}_{II}^k \quad \text{(proporcjonalność)}$$

Oznacza to, że że wartości własnej λ_k odpowiada jeden wektor własny z dokładnością do stałej multiplikatywnej.

$$\bar{v}^k_{I} \cdot \underbrace{\left(-\frac{a_{11}-\lambda_k}{a_{12}}\right)}_{\frac{v_1^k}{v_2^k}} = \bar{v}^k_{II}$$

Oczywiście tak musi być, co wynika z natury równania własnego. Jeśli równanie $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ spełnia wektor $\bar{v}$, to również spełnia je wektor $\bar{v}' = c \cdot \bar{v}$, gdzie $c =$ stała:

$$A\bar{v}' = \lambda\bar{v}'.$$

Tak więc aby jednoznacznie podać wektor własny musimy zaproponować jeszcze jedno równanie. Może to być na przykład warunek normalizacji wektora własnego czyli narzucenie długości (oraz dodatkowo zwrotu), czyli na przykład:

$$\left|\bar{v}^k_{norm}\right|^2 = 1 \quad \text{gdzie } \bar{v}^k_{norm} = c \cdot \bar{v}^k$$

i stąd można wyznaczyć stałą c.