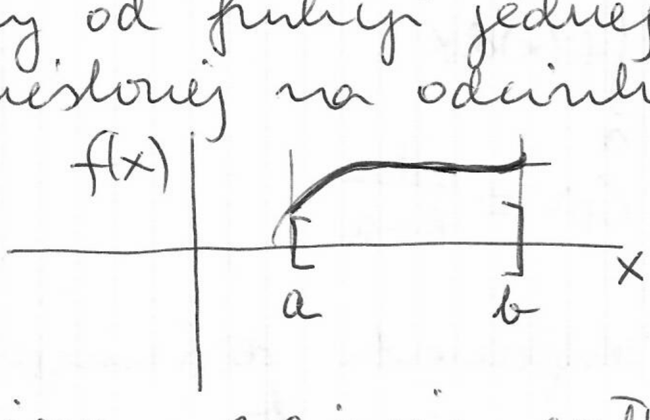
17.04.2020

Bryła sztywna – uzupełnienie

Bieżące materiały zacząłem od liczb zespolonych. Ustaliliśmy jednak, że na najbliższym kolokwium będzie zadanie z bryły sztywnej więc powtarzam jeszcze wiadomości z tego zakresu.

(1) Środek ciężkości.

Pojęcie środka ciężkości rozumiemy intuicyjnie ale w fizyce trzeba podać jego definicję. Aby do niej dojść, zacznijmy od funkcji jednej zmiennej, $f(x)$, określonej na odcinku $[a, b]$ (niech $f(x)>0$ dla $x \in [a, b]$)



Policzmy najpierw całkę: $N = \int_a^b f(x)dx$

Zdefiniujmy funkcję $p(x)$ która różni się od $f(x)$ jedynie normalizacją (czynnikiem stałym)

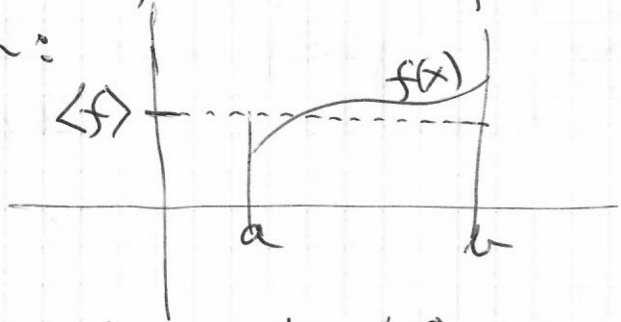
$$p(x) = \frac{1}{N} f(x)$$

Widzimy, że $\int_a^b p(x)dx = 1$.

Dla odcinka $[a, b]$ można zdefiniować następujące dwie wielkości średnie:

- średnia wartość funkcji $f(x)$ lub $p(x)$: $\langle f \rangle$, $\langle p \rangle$
- średnia wartość argumentu x: $\langle x \rangle$

• Średnią wartość funkcji definiuje się tak:



aby pole pod $\langle f \rangle = \text{const}$ było równe polu pod $f(x)$ czyli:

$$\langle f \rangle \cdot (b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

czyli $\langle f \rangle = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

łatwo pokazać, że $\langle p \rangle = \dfrac{1}{b-a}$

• Średnią wartość argumentu definiuje się następująco

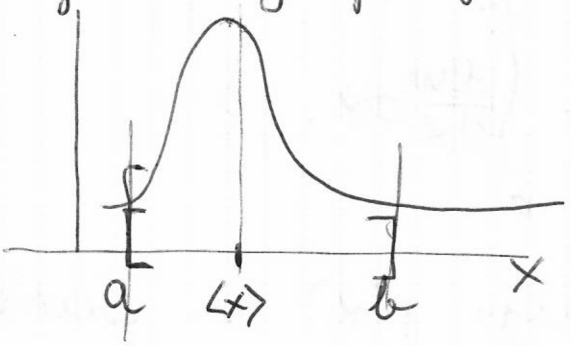
$$\langle x \rangle = \int_a^b x\, p(x)\,dx = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}.$$

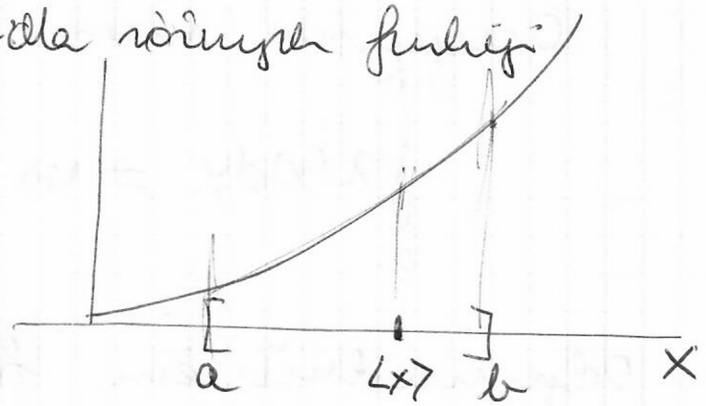
$\frac{1}{b-a}$

Przykład: gdy $p(x) = \text{const}$ wówczas oczekujemy, że $\langle x \rangle$ wypadnie w połowie odcinka $[a, b]$:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{a+b}{2} = a + \frac{(b-a)}{2}$$

Przykłady graficzne dla różnych funkcji





Spójrzmy na definicję jeszcze raz:

$$\langle x\rangle = \int_a^b x\, p(x)dx$$

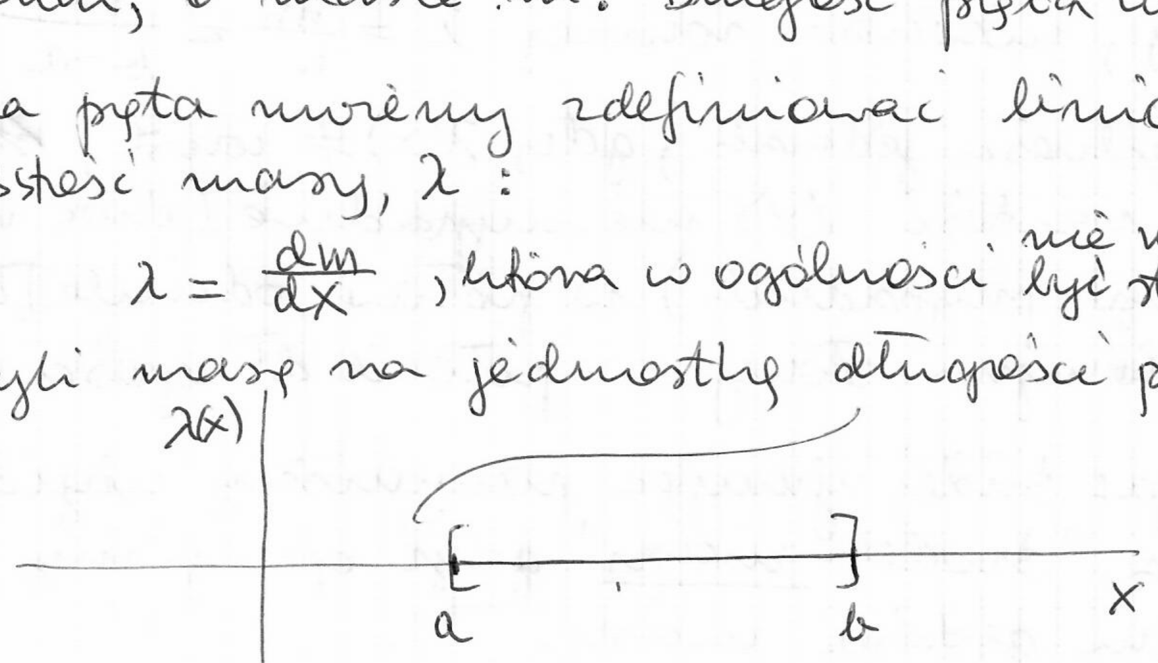
Pod całką funkcja $p(x)$ jest wagą z jaką wartość x jest całkowane. Na lewym wykresie ~~[illegible]~~ waga jest większa dla x-ów bliżej a i dlatego $\langle x\rangle$ będzie "na lewo" od połowy odcinka. Na prawym wykresie – przeciwnie.

Przejdźmy teraz do zastosowania tego pojęcia w fizyce. Niech będzie dany pręt o jednym wymiarze, tzn. nieskończenie cienki, o masie m. Długość pręta wynosi L.

Dla pręta możemy zdefiniować liniową gęstość masy, λ:

$\lambda = \frac{dm}{dx}$, która w ogólności nie musi być stała,

czyli masę na jednostkę długości pręta.



$b-a=L$

Oczywiście musi zachodzić:

$$\int_a^b \lambda(x)dx = m = \int_a^b \frac{dm}{dx}dx.$$

Odpowiednikiem funkcji $p(x)$ na wcześniejszych stronach jest:

$$p(x) = \frac{\lambda(x)}{m}.$$

<u>Średnia wartość argumentu x będzie środkiem ciężkości</u> tego pręta, czy śr. masy;

$$\langle x \rangle = \frac{1}{m}\int_a^b x\,\lambda(x)dx = \int_a^b x\,p(x)dx$$

Pokazaliśmy już wcześniej że gdy $p(x) = \text{const} = \frac{1}{b-a}$ to $\langle x \rangle$ wypada w połowie odcinka.

Tego oczekiwalibyśmy w przypadku pręta jednorodnego tzn. o stałej gęstości liniowej masy, równej $\lambda = \frac{m}{L} = \frac{m}{b-a}$.

W ogólności jednak, gdy $\lambda(x) \neq \text{const}$, wartość $\langle x \rangle$ nie wypadnie (choć może w pewnych przypadkach) w połowie odcinka $[a,b]$ lub innymi słowy w połowie długości pręta.

Uwaga: ściślej ujmując powinniśmy użyć pojęcia "środek <u>masy</u>" gdyż operujemy pojęciem gęstości masy.

Często jednak używa się pojęcia zamiennie "środek ciężkości" zakładając że ciało znajduje się w jednorodnym polu ciężkości (grawitacyjnym).

Przejście do bryły w 3 wymiarach jest już proste. Gęstość liniową $\lambda(x)$ musimy zastąpić gęstością objętościową $\rho(x) = \frac{dm}{dV}$, całkę po dx → całkę po dV i mamy:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{m}\int_V x\,\rho(\bar{r})\,dV$$

$$\langle y \rangle = \frac{1}{m}\int_V y\,\rho(\bar{r})\,dV$$

$$\langle z \rangle = \frac{1}{m}\int_V z\,\rho(\bar{r})\,dV$$

gdzie $\rho(\bar{r})$ oznacza $\rho(x,y,z)$

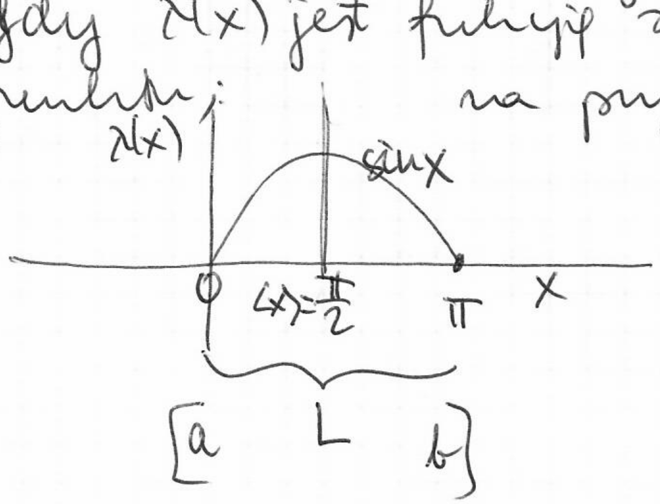
$dV = dx\,dy\,dz$ we wsp. kartezjańskich.

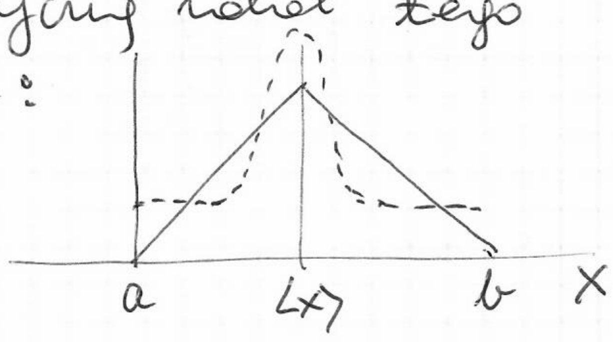
gdzie V – objętość bryły

I zapisując to przy pomocy wektora:

$$R_{CM} = \frac{1}{m}\int \bar{r}\,\rho(\bar{r})\,dV.$$

I jeszcze jeden przykład gdy $\lambda(x) \neq const$ a środek masy wypada w połowie pręta: gdy $\lambda(x)$ jest funkcją symetryczną wokół tego punktu; na przykład:





etc.