Równania różniczkowe 27.04.2020

Równania różniczkowe (r.r.) spotykamy w fizyce dosłownie wszędzie. Podstawowe prawa przyrody (mechanika, elektromagnetyzm, drgania i fale, termodynamika, mechanika kwantowa) są ~~podawane~~ zapisane ~~zapo~~ przy pomocy pochodnych lub różniczek.

W naszym kursie zajmować się będziemy r.r. funkcji jednej zmiennej i w dodatku w najprostszej postaci – liniowymi (choć takie równania mają głównie wartość dydaktyczną gdyż w "prawdziwych" problemach występują zazwyczaj równania nieliniowe).

Na początek, zabawmy się w napisanie jakiegoś równania, którego rozwiązaniem będzie funkcja $f(x) = x \ln x$. Policzmy więc przynajmniej pierwszą pochodną:

$$\frac{df}{dx} \quad f' = \ln x + 1$$

i zbudujmy równanie pierwszego rzędu. Skoro $\ln x = \frac{f}{x}$ to ma ono postać

$$\frac{df}{dx} = \frac{f}{x} + 1.$$

To jest najprostsze równanie, gdyż

możemy napisać wiele równań tego rodzaju, których rozwiązaniem będzie funkcja $f(x) = x\ln x$.

W zagadnieniach fizycznych dochodzimy w trakcie rozważań do jakiegoś równania różniczkowego a następnie musimy je rozwiązać, czyli znaleźć funkcję spełniającą to równanie, a wcale nie musi być ono proste.

Równanie będące pomysłem przykładem jest dość proste, choć liniowe to współczynniki przy funkcji lub pochodnej nie są stałe i również zawiera wyraz wolny. Można je zapisać inaczej: $xf' - f = x$.

wyraz przy f' nie stały (x)

ten wyraz przy f jest stały (-1)

wyraz wolny

Zanim rozwiążemy to równanie, napiszmy jeszcze prostsze:

$$g' - g = 0. \qquad g = g(x).$$

Jest to równanie liniowe o stałych współczynnikach i bez "prawej strony" czyli <u>jednorodne</u>.

Przepiszmy je do postaci:

$$g' - g = 0$$

$$\frac{dg}{dx} = g \; ; \quad \frac{dg}{g} = dx$$

Taką czynność nazywamy rozdzieleniem zmiennych. Po lewej stronie mamy tylko funkcję g, po prawej tylko funkcję x. Takie równanie możemy scałkować stronami

$$\int \frac{dg}{g} = \int dx + C \qquad (*)$$

dodając stałą C po którejś stronie gdyż po różniczkowaniu ona znika a zawiera dodatkową informację o rozwiązaniu – musimy ją jakoś wyznaczyć (niżej).

Wykonując całki otrzymujemy:

$$\ln g = x + C$$

i w takim razie

$$g(x) = e^{C} e^{x} = A e^{x} \quad \text{gdzie } A = e^{C}.$$

Gdybyśmy nie uwzględnili stałej C $(*)$ wówczas rozwiązanie miałoby postać $= e^{x}$. A przecież widzimy, że każda funkcja Ae^{x} rozwiązuje to równanie!

Uświadamiamy więc sobie, że równanie różniczkowe $g' - g = 0$ prowadzi do klasy rozwiązań $g(x) = Ae^{x}$ bez określenia stałej A, i jeśli chcemy podać jakieś konkretne rozwiązanie, to musimy sami wybrać A. W języku matematyki oznacza to, że musimy dodać warunek, np.

$$g(0) = 5$$

zwany warunkiem początkowym, i wówczas stała A jest jest określona:

$$g(x) = Ae^{x}; \quad g(0) = A = 5 \Rightarrow A = 5$$

i pełne rozwiązanie ma postać:

$$g(x) = 5e^{x}.$$

Warunek początkowy może mieć inną postać, np:

$$g(4) = 8.$$

Mamy wówczas:

$$g(4) = Ae^{4} = 8 \Rightarrow A = 8 \times e^{-4}$$

i rozwiązanie:

$$g(x) = \underbrace{8 \times e^{-4}}\, e^{x}$$

Widzimy więc, że rozwiązanie powyższego r. r. zależy od warunku początkowego !!!

Wróćmy teraz do pierwszego równania, ze str. 47. Jak znaleźć jego rozwiązanie? Widać od razu, że nie da się tego równania rozdzielić stronami. Trzeba więc albo zgadywać (czemu nie? to dość nieskomplikowane równanie) albo postużyć się następującą metodą zwaną "uzmiennieniem stałej".

Napiszmy równanie w postaci:

$$\frac{df}{dx} - \frac{f}{x} = 1.$$

Znajdźmy rozwiązanie równania jednorodnego czyli

$$\frac{df}{dx} - \frac{f}{x} = 0.$$

To równanie można rozwiązać drogą rozdzielenia zmiennych gdyż:

$$\frac{df}{f} = \frac{dx}{x}.$$

Całkując stronami otrzymujemy

$$\ln f = \ln x + C.$$

Ale stałą C można zapisać w postaci

$C = \ln D$ aby dojść do następującego rozwiązania:

$$f = D x$$

Następnie "zamieniamy" stałą D na funkcję D(x) i zobaczmy co otrzymamy:

$$f(x) = D(x) \cdot x$$

$f' = D'x + D$ i podstawiając do powyższego równania mamy ($f' = \frac{f}{x} + 1$):

$D'x + D = D + 1$ czyli

$$\frac{dD}{dx} \cdot x = 1 \Rightarrow \frac{dD}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dD = \frac{dx}{x}$$

Całkując stronami dostajemy:

$D(x) = \ln x + A$ gdzie A jest stałą całkowania.

Tak więc ogólna postać rozwiązania jest następująca:

$$f(x) = x(\ln x + A). \quad \triangle$$

Można sprawdzić, że spełnia ona równanie $f' = \frac{f}{x} + 1$. Aby jednoznacznie wyznaczyć funkcję $f(x)$ musimy podać warunek początkowy, np. $f(1) = 1$ (jak widać funkcja $f(x)$ ma osobliwość dla $x = 0$ z powodu $\ln x$, choć granica $x \ln x$ istnieje dla $x \to 0$ ale darujmy sobie ten przypadek).

Gdy $f(1) = 1 = 1 \cdot (0 + A) = A \Rightarrow A = 1$ i pełne rozwiązanie ma postać:

$$f(x) = x(\ln x + 1)$$

A jak w tym odnaleźć oryginalną funkcję $f(x) = x \ln x$, przy pomocy której stworzyliśmy równanie? To jest oczywiście przypadek $A=0$, jak widać z $\triangle$ na poprzedniej stronie. Odpowiada to warunkowi brzegowemu $f(1)=0$.

Podejmy teraz przykład równania drugiego rzędu, tzn. w którym występuje przynajmniej druga pochodna funkcji (oraz ew. pierwsza i sama funkcja). Można pokazać przez podstawienie, że funkcja $f(x)=x\ln x$ spełnia następujące r.r. drugiego rzędu:

$$f' = \ln x + 1 \qquad \left(\ln x = \frac{f}{x}\right)$$

$$f'' = \frac{1}{x}$$

i utwórzmy równanie np. takie:

$$x^2 f'' - x f' + f = 0 \qquad \square$$

A może jednak? Patrz niżej...

Nie będziemy tego równania tu rozwiązywać. Powiedzmy sobie tylko tyle, że rozwiązanie będzie zawierało $\underline{\underline{2}}$ stałe, które musimy wyznaczyć z warunków początkowych, takich jak:

$$f(x_0) = f_0$$
$$f'(x_0) = f'_0$$

stałe dane

jakaś wartość argumentu dana

Teraz przytaczam ~~jedno~~ w skrócie jedno z ważniejszych twierdzeń dotyczących r. różniczkowych.

Jeśli mamy dane r.r. i funkcję która je rozwiązuje przy spełnieniu określonych warunków początkowych — to ta funkcja jest wyznaczona jednoznacznie.

Znaczy to, że nie ma innej ~~[illegible]~~ funkcji spełniającej te warunki. Jeśli byśmy drogą prób i błędów (a nie jakąś określoną metodą) doszli do rozwiązania i spełniałoby ono nasze warunki początkowe, to byłoby to jedyne rozwiązanie danego równania. Nie musimy się martwić, że jest jeszcze jakieś inne.

Powyższe twierdzenie nosi nazwę twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań r. r.

Gdy powyżej napisałem o zgadywaniu rozwiązań, nie było to pozbawione sensu, gdy przyjmiemy że np. rozwiązanie równania ($\boxed{1}$) str. 53 to jakaś kombinacja funkcji x i $\log x$ (na próbę) z jakimiś stałymi (nie twierdzę że to proste). Ale gdy takie rozwiązanie znajdziemy — problem rozwiązany na podstawie tw. o jednoznaczności.

Dla ilustracji rozwiążmy równanie I ze strony 53, oczywiście "zapominając" jaka funkcja nas do niego doprowadziła.

Poszukajmy rozwiązania w postaci

$$f(x) = x \cdot C(x).$$

Mamy więc:

$$f' = C + xC'$$

$$f'' = xC'' + 2C'$$

Po podstawieniu do równania I otrzymujemy proste równanie dla funkcji $C(x)$

$$xC'' + C' = 0.$$

Jako, że nie występuje w nim sama funkcja C, to możemy sprowadzić je do równania 1-go rzędu przez podstawienie $C'(x) = h(x)$ i mamy:

$$xh' + h = 0.$$

To równanie jest łatwo rozwiązać przez rozdzielenie zmiennych

$$\frac{dh}{h} = -\frac{dx}{x}$$ i całkując stronami:

$$\ln h = -\ln x + \ln a$$ gdzie $\ln a$ jest stałą całkowania.

Tak więc

$$h(x) = \frac{a}{x} = C'(x)$$

i całkując drugi raz otrzymujemy

$$C(x) = a \ln x + b$$ gdzie b jest drugą stałą całkowania.

W takim razie pełne rozwiązanie równania (D) ma postać

$$f(x) = x(a\ln x + b)$$ gdzie a, b są stałymi.

Te stałe trzeba wyznaczyć z warunków początkowych, np:

$$f(1) = 1 \qquad (f' = a\ln x + b + a)$$
$$f'(1) = 0.$$

Mamy wówczas: $f(1) = b = 1$
$f'(1) = b + a = 0 \Rightarrow a = -1$

I rozwiązanie ostatecznie ma postać

$$f(x) = x(1 - \ln x)$$ przy tych warunkach początkowych.

A gdy przyjmiemy inne warunki początkowe np:

$$f(1) = 1$$
$$f'(1) = 2$$ to otrzymamy $b = 1$, $a = 1$

$$f(x) = x(\ln x + 1)$$

czyli inną funkcję!!!

Ciekawostka: gdy przyjmiemy
$f(1) = 1$
$f'(1) = 1$ wówczas $b = 1$ i $a = 0$ tzn.
$\boxed{f(x) = b\,x}$ ← taka funkcja też spełnia to równanie 2-go rzędu:

$$\underbrace{x^2 f''}_{0} - \underbrace{x f'}_{-x\cdot b} + \underbrace{f}_{bx} = 0$$

Napiszmy jeszcze równanie rzędu 3 wychodząc z funkcji $f = x\ln x$, na przykład:
$\left(f''' = \cancel{\ } - \frac{1}{x^2}\right)$:

$$x^2 f''' + f' - \frac{1}{x} f = 0.$$

Korzystając z programu Mathematica (polecam) przepisuję ogólne rozwiązanie:

$$f(x) = x\left(A \ln^2 x + B\ln x + C\right).$$

[Dla zainteresowanych: ~~DSo~~
DSolve[$x^2 f'''[x] + f'[x] - \frac{1}{x} f[x] == 0, f[x], x$]]

Widzimy więc, że modyfikuje się człon w nawiasie, patrząc na równanie (Δ), i oczywiście są 3 stałe do wyznaczenia z warunków początkowych. Rozwiązanie $f(x) = x\ln x$ otrzymuje się przez podanie takich warunków aby $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$.

Tak więc równanie (różniczkowe), które napisaliśmy sobie wychodząc z zadanej funkcji, u nas: $f(x) = x\ln x$, ma coraz więcej ~~dowolnych~~ rodzajów rozwiązań w miarę wzrostu rzędu równania, gdyż przybywa stałych. Oczywiście funkcja wyjściowa jest jednym z przypadków szczególnych tych rozwiązań.