

Fizyka z Matematyką II

Równania różniczkowe liniowe

Zadanie 43. Sklasyfikuj następujące równania różniczkowe jako liniowe bądź nieliniowe. Znak ' oznacza pochodną względem zmiennej niezależnej. Gdy tą zmienną jest czas, często używa się symbolu $\dot{y}$.

- | | |
|--------------------------|-----------------------------|
| a) $ty' + y = e^t$ | d) $y'e^y = y$ |
| b) $yy' + y = e^t$ | e) $3y' + 10y = t^4$ |
| c) $(1 + t^2)y' + y = 0$ | f) $\sin y + x \cos y' = 0$ |

Zadanie 44. Rozwiąż równanie: $\dot{y} + ty = t$ z warunkiem początkowym $y(0) = y_0$.

Zadanie 45. Rozwiąż równanie: $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$, $y(2) = 3$.

Zadanie 46. Rozwiąż równanie: $y' - 2xy = \sin xe^{x^2}$, $y(0) = 0$.

Zadanie 47. Rozwiąż równanie: $y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 0$, $y(1) = 2$.

Zadanie 48. Znajdź rodzinę krzywych, która ma tę właściwość, że odcinek stycznej do każdej z tych krzywych poprowadzony od punktu styczności do przecięcia z osią Oy jest dzielony przez przecięcie z osią Ox na pół.

Zadanie 49. Liczba bakterii w holowli drożdży prowadzonej w pewnym laboratorium wzrasta proporcjonalnie do ich bieżącej liczby. Określ, jaka będzie liczba bakterii w momencie upływu trzeciej godziny hodowli, jeśli podwoiła się ona w ciągu pierwszej godziny.

Zadanie 50. Liczba umierających mrówek w danym mrowisku jest proporcjonalna do ich populacji. Gdyby nowe mrówki się nie rodziły, to populacja po jednym tygodniu redukowalaby się do połowy. Jednak z uwagi na narodziny nowych mrówek, populacja ich podwaja się co dwa tygodnie. Określ tygodniowe tempo urodzeń.

Zadanie 51. Kropla deszczu spada na Ziemię z nieruchomej chmury. Znajdź jej prędkość jako funkcję czasu, przyjmując, że kropla doznaje siły oporu proporcjonalnej do jej prędkości. Przedyskutuj założenia upraszczające przyjęte przy wyprowadzaniu równania różniczkowego opisującego spadanie kropli.

Zadanie 52. Rozwiąż poniższe równania metodą uzmienniania stałej:

a) $\dot{y} + \frac{1}{1-t}y = 1-t$ z warunkiem początkowym $y(0) = 1$

b) $y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}$ z warunkiem początkowym $y(1) = 1$.

Zadanie 53. Znaleźć zależność prędkości od czasu ciała o masie m pod wpływem siły $\mathbf{F} = F_0 \cos \omega t$ i siły oporu proporcjonalnej do prędkości, $\mathbf{F}_{op} = -\gamma \mathbf{v}$. W chwili początkowej ciało spoczywało.

Zadanie 54. Znaleźć ogólne rozwiązanie problemu oscylatora harmonicznego z tłumieniem. Przedyskutować przypadki tłumienia słabego, silnego i krytycznego.

Zadanie 55. Znaleźć rozwiązanie stacjonarne problemu oscylatora harmonicznego z tłumieniem i siłą wymuszającą $F(t) = F_0 \cos \Omega t$. Znaleźć częstotści rezonansowe amplitudy wychylenia i amplitudy prędkości.