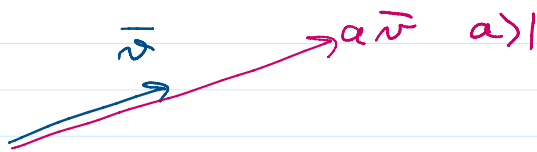
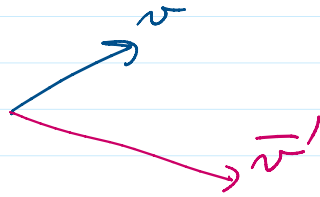


Prezentacja liniowa

$$L(\vec{v}) = \underline{a} \vec{v} \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \rightarrow (\underline{a}v_1, \underline{a}v_2, \underline{a}v_3)$$



Takim prezentowaniem nie osiągniemy up.



Maciarnie $\vec{v}' = \hat{M} \vec{v}$
 $\hat{M}$ - tabliczka $n \times n$

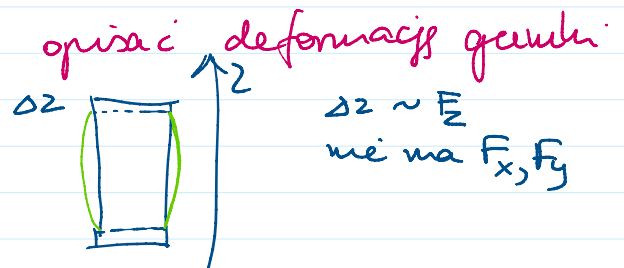
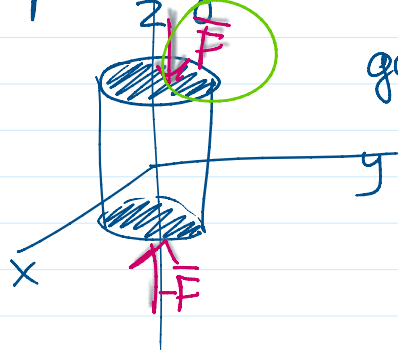
n - wymiar wektora $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$
 $n=3$

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}$$

row iersi 9 elementin
 M_{ij} i numeruje iersi i numeruje iersi
 column iersi iersi
 przekłna maciarny
 diagonal
 konwercja (umowa)

M_{kk} - to są wyznaczniki diagonalne

Przykład opisu zjawiska przy pomocy macierzy gęstości



wygli zjawiskami wadzi z powoduje deformacji wadzi x, y i

myli zwichamei matrici z powodujacy deforamacji matrici x, y !

Przyjmyz matrici z , skutek matrici x, y, z deforamacji

$$\begin{pmatrix} \sigma_1' \\ \sigma_2' \\ \sigma_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}$$

idea
 i, j indety
aby $\Delta x \neq 0$ $M_{13} \neq 0$
 $\Delta y \neq 0$ $M_{23} \neq 0$

Wzorzenie wektora per macien:

$$\sigma_i' = M_{i1} \sigma_1 + M_{i2} \sigma_2 + M_{i3} \sigma_3$$

wogolnic na i -ty składowy σ'

$$\sigma_i' = \sum_{j=1}^n M_{ij} \sigma_j$$

Zapis macienowy wzorzenia wektora per liczy:

$$\bar{\sigma}' = a \bar{\sigma}$$

$$\begin{pmatrix} a\sigma_1 \\ a\sigma_2 \\ a\sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$\parallel a \hat{I}$$

$$\hat{I}$$

$$\hat{I} = \hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

macien jednostkowa

Przelatowanie $\bar{\sigma}' = \hat{M} \bar{\sigma}$ jest liniowe

$n=3$

$$\hat{M}(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \alpha \hat{M} \bar{u} + \beta \hat{M} \bar{v}$$

$$(\hat{M} \alpha \bar{u})_i = \sum_j M_{ij} \alpha u_j = \alpha \sum_j M_{ij} u_j$$

$$\sum_j = \sum_{j=1}^n$$

suma n wyrazow

$$\hat{M}(\vec{u} + \vec{v}) = \sum_j M_{ij}(u_j + v_j) = \sum_j (M_{ij}u_j + M_{ij}v_j) = \sum_j M_{ij}u_j + \sum_j M_{ij}v_j = \hat{M}\vec{u} + \hat{M}\vec{v}$$

summa 6 wyrazów
j=3
x 2
(a+b)+c = a+(b+c)
a+b = b+a

byli rachodni

Macierze wektora przez macierze - jest operacja liniowa przekształceń

Operacje na macierzach

Dodawanie macierzy: $\hat{A}, \hat{B}$ $\hat{A} + \hat{B} = ?$

dodawemy: $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

✓ ~~$A_{ij} B_{ij}$~~

odejmujemy: $\hat{D} = \hat{A} - \hat{B}$

$$D_{ij} = A_{ij} - B_{ij}$$

macierze macierzy: $(\hat{B} \cdot \hat{A}) = \hat{E}$

macierz macierzy

i ty wersja

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

j-ta kolumna

Ogólne wyrażenie

$$(BA)_{ij} = \sum_k A_{kj} B_{ik}$$

tak, jak iloczyn skalarny

$$\begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{21}B_{12} + A_{31}B_{13} \\ A_{11}B_{21} + A_{21}B_{22} + A_{31}B_{23} \\ A_{11}B_{31} + A_{21}B_{32} + A_{31}B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{12}B_{21} + A_{22}B_{22} + A_{32}B_{23} \\ A_{13}B_{31} + A_{23}B_{32} + A_{33}B_{33} \end{pmatrix}$$

Macierze macierzy w ogólności nie jest przemienne

$$AB \neq BA$$

$$AB \neq BA$$

Možná pokaž: $\hat{I} \cdot \hat{A} = \hat{A} = \hat{A} \cdot \hat{I}$
 $\hat{I} \cdot \hat{I} = \hat{I}$

$$\hat{A} \cdot (\hat{B} + \hat{C}) = \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}$$

$$(\hat{B} + \hat{C}) \cdot (\hat{D} + \hat{E}) = \hat{B}\hat{D} + \hat{B}\hat{E} + \hat{C}\hat{D} + \hat{C}\hat{E}$$

$\hat{A} \quad B \quad \hat{A} \quad B$ kolejnost!

$$\hat{A}^2 = \hat{A} \cdot \hat{A}$$

$$AA + AB + BA + BB$$

$$(\hat{A} + \hat{B})^2 = \hat{A}^2 + \hat{B}^2 + \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$$

$$\neq 2\hat{A}\hat{B}$$

$$(\hat{A} + \hat{I})^2 =$$

$$\hat{A}^2 + \hat{I}^2 + 2\hat{A} \cdot \hat{I}$$

možná mě píšec

$$(\hat{B} + \hat{A})^2 =$$

$$\hat{A} + \hat{I} = \begin{pmatrix} A_{11}+1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22}+1 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}+1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Průtah: $\bar{v} = \frac{1}{a} \bar{v}$

$$\begin{pmatrix} v_3 \\ v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice disjunktiva $\hat{D} = a \hat{I}$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$\bar{u} \cdot \bar{w} = \bar{w} \cdot \bar{u}$$

$$\bar{u} \times \bar{w} = -\bar{w} \times \bar{u}$$

jest
nejest
převrácen.

$$(b+c)(d+e) = bd$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$ab = ba$

$$A \cdot A = A^2$$

$$A \cdot A \cdot A \cdot A = A^4$$

A^n

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

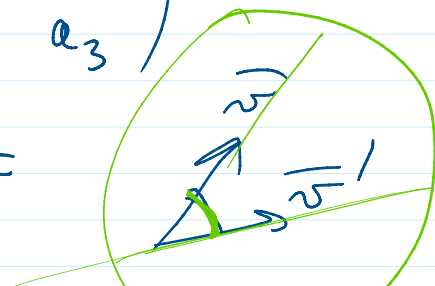
macieñ diagonalna $\hat{D} = a \hat{I}$
 sup. przyp.
 $\vec{v}' = a \vec{v} = \hat{D} \vec{v}$
 $\vec{v}' \parallel \vec{v}$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$\vec{v}' = \begin{pmatrix} a_1 v_1 \\ a_2 v_2 \\ a_3 v_3 \end{pmatrix} = \hat{D}_1 \vec{v}$

$\hat{D}_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$ diagonalna ale $a_1 \neq a_2 \neq a_3$

i teraz $\vec{v}' \nparallel \vec{v}$ ($\frac{a}{a} = 1$)



Macieñ odwrotna:

$$\hat{A}^{-1} \hat{A} = \hat{I}$$

-1 nie oznacza tu $\frac{1}{\hat{A}}$

- symbol macieñy odwrotnej

("nie ma" dzielenia macieñy)

~~$\frac{\hat{A}}{\hat{B}}$~~ $\hat{A} \cdot \hat{B}$
 $\hat{A} \pm \hat{B}$

✓ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i mam 4 równania, 4 niewiadome!

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 2 &= 1 \\ a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 2 &= 0 \end{aligned} \right\} 4 \text{ równań}$$

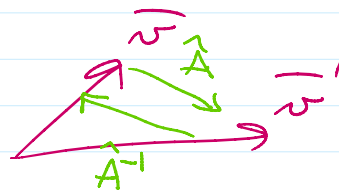
$$\hat{A}^{-1} \vec{v}' = \underbrace{\hat{A}^{-1} \hat{A}}_{\hat{I}} \vec{v}$$

$$\hat{A}^{-1} \vec{v}' = \vec{v}$$

$$\vec{v}' = \hat{A} \vec{v}$$

musi istnieć $\hat{A}^{-1}$

działamy na ^{drugą} stronę macieñ $\hat{A}^{-1}$ (jeżeli istnieje)



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a, \frac{1}{a} \quad \boxed{a \neq 0}$$