c.d. wyznaczniki, zagadnienie własne

własności det

(1) $\det I = 1$

(2) gdy jedna lub więcej kolumna / jeden wiersz jest zerowy

to $\det(A) = 0$

$$\det\begin{pmatrix} x & x & 0 & x \\ x & x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & x \end{pmatrix} = 0$$

(3) macierz transponowana

zamienione miejscami wyrazy a_{ij} $i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{A^T} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{23} \end{pmatrix} = A^T$$

zostaje

(wzajemna zamiana wierszy i kolumn)

$$\det A^T = \det A$$

(4) macierz odwrotna A^{-1} $\quad A^{-1} A = I$

$$\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$$

(5) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

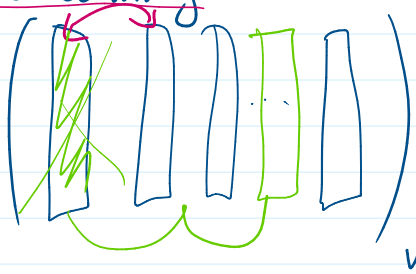
$\det(A^{-1}A) = \det I = 1$

$$\boxed{\det A^{-1} \cdot \det A = 1}$$

$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$

(6) $\det(A+B) \neq \det A + \det B$

(7) gdy przestawiam w macierzy wiersze lub kolumny



to wyrażenie nie zmienia wartości abs. lecz może zmienić znak

parzysta liczba przestawień — nie

nieparzysta — tak

Zagadnienie własne

eigenproblem

eigenvalue

Ansatz

bremsstrahlung

w przypadku macierzy:

Dana jest tylko macierz A $(n \times n)$

Szukamy wektorów $\bar{v}$ (n) i wartości λ takich aby był spełniony warunek:

$$\boxed{A \bar{v}_i = \lambda_i \bar{v}_i}$$

$\bar{v}$ – wektor własny

λ – wartość własna

i – numeracja

$$\downarrow$$

$$A \bar{v} = \lambda I \bar{v}$$

$$(A - \lambda I)\bar{v} = 0$$

$$\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ 0 & & & \ddots \; \lambda \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22}-\lambda & & & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} & & \\ & a_{22}-\lambda & \\ a_{n1} & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

Można pokazać że wartości własne otrzymamy z równania:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

najwyższa potęga $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda)$ rzędu λ^n

W przypadku macierzy $n \times n$ mamy równanie n-tego rzędu (wielomian n-tego rzędu $= 0$)

$$W_n(\lambda) = 0$$

$\boxed{\text{Istnieje co najwyżej } n \text{ różnych rozwiązań tego równania}}$

$$c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_0 = 0$$

w ogólności rozwiązania mogą być zespolone

Podstawowe twierdzenie algebry

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v}$$

$\leftarrow$ może być również $\boxed{A\psi = \lambda\psi}$

operator

funkcja

Można podać warunek na A aby wszystkie wartości własne były rzeczywiste

$$(A^T)^* = A$$

Mamy już $\lambda_1 \dots \lambda_n$, drugi etap:

$$A\bar{v}_i = \lambda_i \bar{v}_i$$

$\leftarrow$ rozw. równanie dla znanej już wartości własnej λ_i

dane

znam

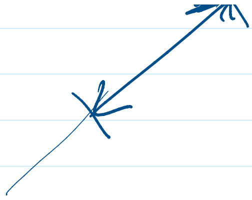
Wektor własny określony jest z dokładnością do normy czyli długości

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v} \quad / \cdot \}$$

$\bar{v}$

$$A\bar{v} = \lambda \bar{v} \quad / \cdot \xi$$

$$A\,\underline{\xi \bar{v}} = \lambda\, \underline{\xi \bar{v}}$$



RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

Są to równania dla funkcji i jej pochodnych

$$F(f, f', f'', \dots) = 0$$

$ax + b = 0$

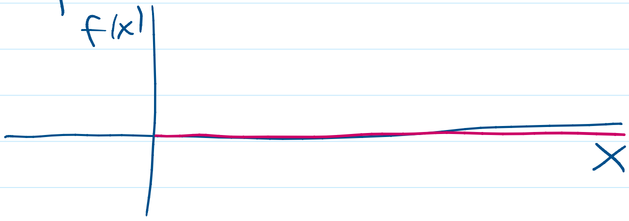
$F(x) = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$

$F(x) = 0$

Równanie dot. funkcji, np.

(1) $f(x) = 0$



$$f' = \frac{df}{dx}$$

$$f'' = \frac{d^2 f}{dx^2} \quad \dots$$

(2) $\boxed{f'(x) = 0}$ r. różniczkowe 1-wszego rzędu

$$\frac{df}{dx} = 0 \Rightarrow f = \text{const}$$

to równanie nie zawiera informacji o wartości tej stałej!

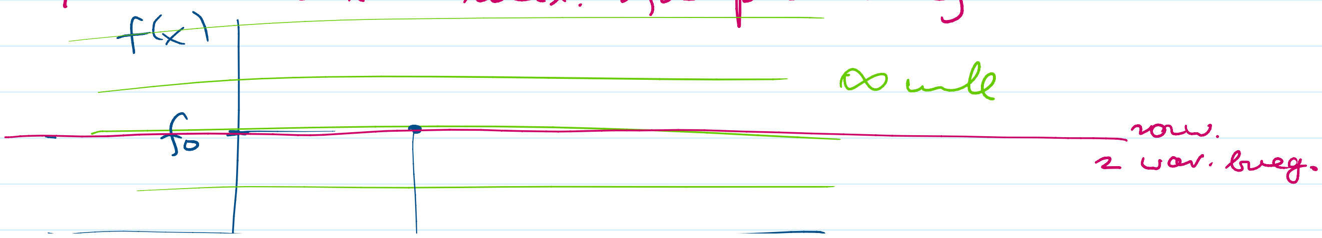
muszę sam dodać tę informację! aby rozwiązanie było jednoznaczne

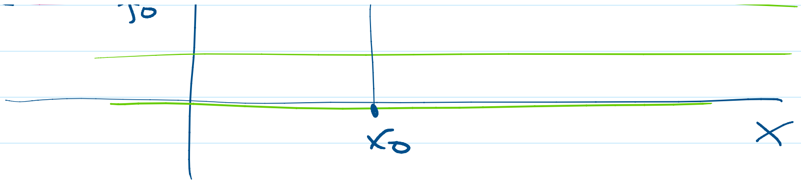
np. podać $\boxed{f(x_0) = f_0}$ $\Longrightarrow$ warunek brzegowy ($f(x)$) lub początkowy ($f(t)$)

$$f(x) = \text{const} \qquad f(x_0) = \text{const} = f_0$$

Rów. jednoznaczne: $f(x) = f_0$

Rząd równania – max. rząd pochodnej





z war. brzeg.

(3) nadal r.r. 1-wszego rzędu ale trudniejsze

$$f' + af = 0 \qquad \frac{df}{dx} + af = 0 \qquad a \neq 0$$

$$F(f, f') = 0$$

Rozwiązanie:

$$\frac{df}{dx} = -af$$

rozdzielamy zmienne (tu da się)

$$\frac{df}{f} = -a\,dx \qquad \left(\frac{\text{funkcja}}{f}\right) = (\text{argument } x)$$

całkujemy stronami

$$\int \frac{df}{f} = -a \int dx + C \qquad C - \text{stała}$$

$$\ln f = -ax + C \; !$$

$$f(x) = e^{-ax+C} = \underbrace{e^{C}}_{\text{stała}} e^{-ax}$$

$$f(x) = e^{c} e^{-ax} = A e^{-ax} \qquad A - \text{stała} = e^{c}$$

rozw. jest zależne od pewnej stałej
brak C (C=0) oznacza A=1

Warunek brzegowy np. $f(x_0) = d$

$$f(x) = A e^{-ax}$$

tu $\xrightarrow{}$ wstawiam war. $f(x_0) = \underbrace{d = A e^{-ax_0}} \Rightarrow A = d e^{+ax_0}$

wstawiam war. brzegowy $\quad f(x_0) = \underbrace{d = A e}$ $\quad \Rightarrow \quad A = d e$

Pełne rozw: $\boxed{f(x) = d e^{ax_0} e^{-ax} = d e^{a(x_0 - x)}}$

(1) spełnia równanie $f' + af = 0$
(2) spełnia war. brzegowy

(4) $\quad f' + af = 0$

pierwszego rzędu

liniowe (gdyż f i f' występują w 1-wszej potędze)

o stałych współczynnikach

jednorodne $(=0)$

przykład r. nieliniowego (b. Ricatty)

$$f' + b f^2 = 0$$

$$\frac{df}{dx} = -b f^2 \qquad \text{mogę rozdzielić zmienne}$$

$$\frac{df}{f^2} = -b\,dx \qquad \int \text{stronami}$$

$$-\frac{1}{f} = -bx + C$$

$$\frac{1}{f} = bx - C$$

$$f(x) = \frac{1}{bx - C}$$ i muszę podać war. brzegowy

inny przykład $\quad (f')^2 + g \cdot f = 0 \qquad f' = \pm\sqrt{-gf} \qquad -gf > 0, \; < 0$

(5) $\quad x f' + af = 0$

r.r. lin. I rzędu

nie ma stałych wsp.

jednorodne

$$x \frac{df}{dx} = -af$$ rozdzielamy zmienne

da się!

$df \qquad dx$

dx

$$\frac{df}{f} = -\frac{a\,dx}{x}$$

da się!

$\int$ stronami

$$\ln f = -a \ln x + C$$

$$\ln f + \cancel{a} \ln x^a = C$$

$$\ln (x^a \cdot f) = C$$

$$x^a f = e^C$$

stała

$$\boxed{f(x) = \frac{e^C}{x^a}}$$

(6) równanie drugiego rzędu, które dobrze znacie

$$\boxed{ma = F}$$

(działanie)

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = F$$

r.r. 2-go rzędu
liniowe
o stałych współczynnikach
niejednorodne ale niejednorodność = <u>const</u>

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} = \text{const} \qquad F = \text{const}$$

zamieniamy r. 2 rzędu na r. 1 rzędu: $\frac{dx}{dt} = v$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

$\int$ stronami

$$dv = \frac{F}{m}\,dt$$

$$v(t) = \frac{F}{m} \cdot t + C_1$$