Wykład 12

czwartek, 15 kwietnia 2021 13:14

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} = a \qquad\qquad x(t)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \checkmark$$

2-rzędu

$\Downarrow$

1-rzędu

$$\frac{dv}{dt} = a \qquad \underline{dv = a\,dt} \qquad \int \text{stronami}$$

$$\boxed{v(t) = at + C_1}$$

$$\frac{dx}{dt} = at + C_1 \qquad dx = (at + C_1)\,dt =$$

$$dx = \underbrace{at\,dt} + \underbrace{C_1\,dt} \qquad \int \text{stronami}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{at^2}{2} + C_1 t + C_2}$$

ogólna postać rozw. równania $\frac{d^2x}{dt^2} = a$

C_1, C_2 ← muszę wyliczyć z dodatkowych warunków: warunki początkowe (czas)

Matematyka:

$x(t_0) = x_0$ — położenie (funkcja) w chwili czasu t_0

$\frac{dx}{dt}(t_0) = v_0$ — prędkość (pierwsza poch.) —||—

$$v(t) = at + C_1 \implies v(t_0) = at_0 + C_1 = v_0$$

$$\underline{C_1 = v_0 - at_0}$$

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + C_1 t + C_2$$

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + (v_0 - at_0)\cdot t + C_2$$

$$x(t_0) = \frac{at_0^2}{2} + (v_0 - at_0)\,t_0 + \underbrace{C_2} = x_0$$

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + (v_0 - at_0)t + x_0 - \frac{at_0^2}{2} - (v_0 - at_0)t_0$$

$$x(t) = \frac{a}{2}(t^2 - t_0^2) + (v_0 - at_0)(t - t_0) + x_0$$

$x(t) = \frac{at^2}{2} + (v_0 - at_0)t + x_0 - \frac{at_0^2}{2} - (v_0 - at_0)t_0$

$$\boxed{x(t) = \frac{a}{2}(t^2 - t_0^2) + (v_0 - at_0)(t - t_0) + x_0}$$

zwykle przyjmuje się $t_0 = 0$ i wówczas

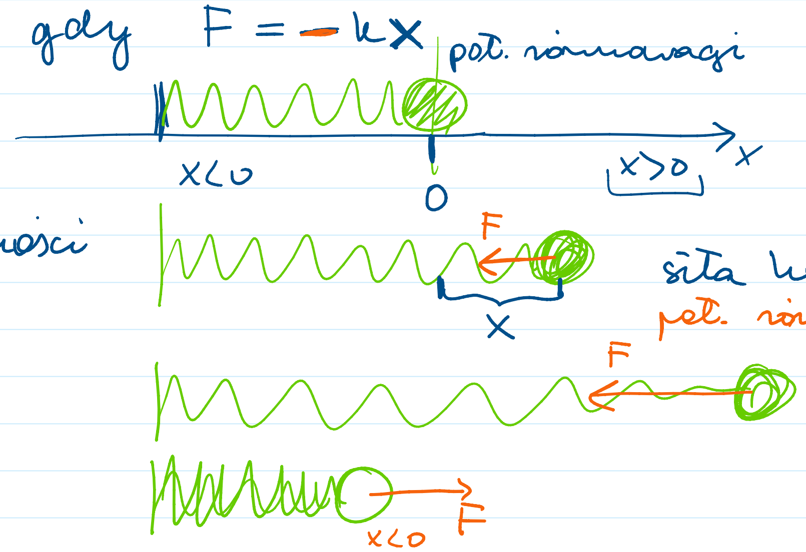
$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$$

STAŁE CAŁKOWANIA

Równanie oscylatora harmonicznego (1D)

r. ruchu gdy $F = -kx$

k – stała proporcjonalności



siła kierująca do poł. równowagi

Równanie ruchu 1D w jednym wymiarze

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F = -kx$$

z tarciem (tłumieniem)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F + F_T$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \qquad (m \neq 0)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$$

szukam funkcji $x(t)$ takiej aby jej druga pochodna była równa tejże funkcji $\cdot \left(-\frac{k}{m}\right)$

Nie można tego równania w tym: rozdzielić stronami
scałkować stronami

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\cdot x \qquad \int dt$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}\cdot x \qquad dv = -\frac{k}{m}x\,dt$$

nic nie daje

$\int dv = -\frac{k}{m}\int x\,dt$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}\cdot x \qquad dv = -\frac{k}{m}\, x\, dt$$

$$\int dv = -\frac{k}{m}\int x\, dt$$

nie znam $x(t)$

Jak się rozw. równanie oscylatora harmonicznego

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad x(t)$$

harmoniczny

swobodny

matematyka: r. r. 2-go rzędu
liniowe
o stałych współczynnikach
jednorodne

fizyka: r. ruchu oscylatora harmonicznego
$F = -kx$
swobodny (nie ma siły wymuszającej ruch)
bez tłumienia
(nie ma tarcia)

$$\underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}} + \underbrace{\omega_0^2 x} = 0$$

$$\sin''(\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos''(\alpha) = -\cos\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\sin\omega_0 t = \omega_0 \cos\omega_0 t$$
$$\frac{d^2}{dt^2}\sin\omega_0 t = -\omega_0^2 \sin\omega_0 t$$

(1) Funkcje $\sin\omega_0 t$ i $\cos\omega_0 t$ rozwiązują to równanie

(2) Funkcje $A\cdot\sin\omega_0 t$ i $B\cos\omega_0 t$ — " —

(3) Funkcja najogólniejsza rozwiązująca równanie to

$$x(t) = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t$$

gdyż jest to r. liniowe

Funkcje $\sin(.)$ i $\cos(.)$ nazywamy funkcjami harmonicznymi

$\Rightarrow$ oscylator harmoniczny

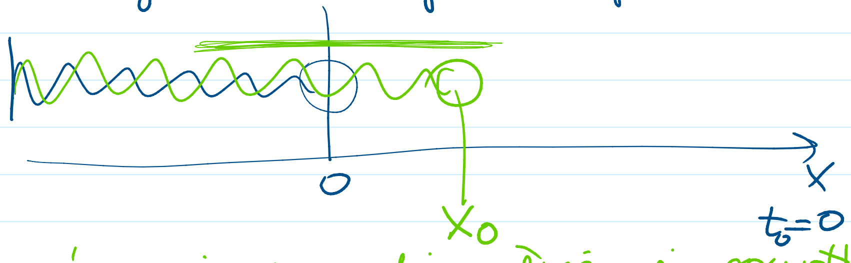
Stałe A, B nie są dane poprzez równanie

Stałe A, B nie są dane poprzez równanie

A i B należy wyznaczyć z war. początkowych

Równanie n-tego rzędu wymaga n war. początkowych do jednoznacznego rozwiązania

$x(t)=0$



(1) naciągnąć sprężynę czyli położenie początkowe kulki jest w $x=x_0$ a jej prędkość $=0$

$x(0)=x_0$ $\qquad \frac{dx}{dt}(0)=0$

$x(t)=A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t$ $\qquad x(0)=B=x_0$

$v=\frac{dx}{dt}(t)=A\omega_0\cos\omega_0 t - B\omega\sin\omega_0 t$ $\qquad v(0)=\frac{dx}{dt}(0)=A\omega_0=0$

$A=0$

$$\boxed{x(t)=x_0\cos\omega_0 t} \leftarrow$$ jest jednoznaczne

Twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań r. różniczkowych

jeśli znaleźliśmy funkcję spełniającą równanie i dane warunki początkowe — to jest jedyne rozwiązanie (nie ma innego)

$\frac{d^4x}{dt^4}=0$ spełnia je
$x=5$
$x=2t^2+3$
$x=t^3$

$3t^2$
$6t$
6

(2) $x(t)=A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t$ ✓

w położeniu równowagi $x(0)=0$ nadaję kulce prędkość $v(0)=v_0=\frac{dx}{dt}(0)$

$\frac{dx}{dt}(t)=A\omega_0\cos\omega_0 t - B\omega_0\sin\omega_0 t$ ✓

$x(0)=0=B$ $\qquad B=0$

$x(0) = 0 = B$ $\qquad B = 0$

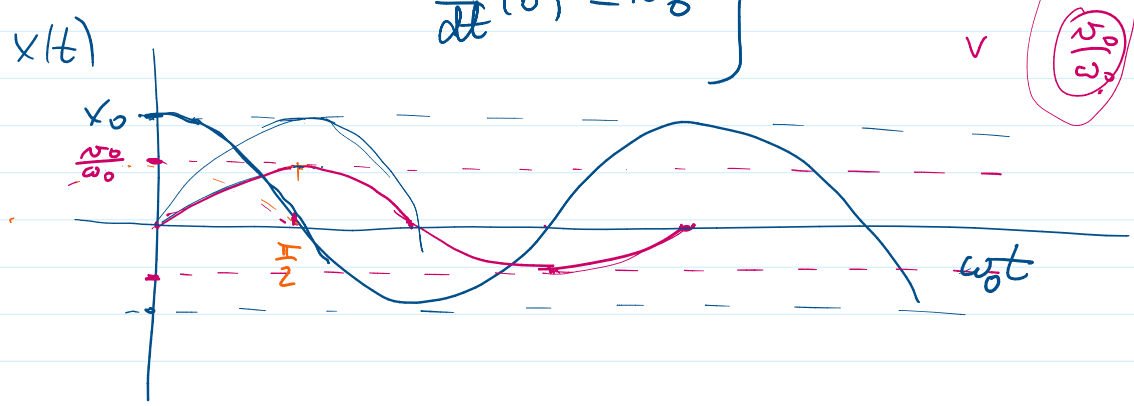
$\frac{dx}{dt}(0) = v_0 = A\omega_0$ $\qquad A = \frac{v_0}{\omega_0}$

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t}$$

(3) do domu : $\left.\begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ \frac{dx}{dt}(0) = v_0 \end{array}\right\}$

$\checkmark \quad x_0 \cos\omega_0 t$

$\checkmark \quad \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$



Rozw. $x(t) = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t$ można zapisać w postaci

$x(t) = C\sin(\omega_0 t + \varphi) = D\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$

$C\sin(\omega_0 t + \varphi) = \underbrace{C\cos\varphi}_{A}\sin\omega_0 t + \underbrace{C\sin\varphi}_{B}\cos\omega_0 t$

$\sqrt{A^2 + B^2} = C$ $\qquad \varphi$ – faza

$\frac{B}{A} = \operatorname{tg}\varphi$

$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{B}{A}$

Rozw. (1) $B = x_0 \quad A = 0$ $\qquad x(t) = x_0\cos\omega_0 t$

jak zapisać w postaci $x(t) = C\sin(\omega_0 t + \varphi)$

$C = x_0$

$\varphi = \underset{A=0}{\operatorname{arctg}\frac{B}{A}} \Rightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{B}{A} \underset{A=0}{\Longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

$$\underbrace{x(t) = x_0 \underbrace{\sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)}}$$

sin $\omega_0 t$ przesunięty o $\frac{\pi}{2}$ w lewo

$f(z)$ to $f(z-a)$ jest przesunięta w prawo o a

$f(z+a)$ w lewo o a