Równanie niejednorodne

$m\ddot{x}$ = suma sił działających na ciało masę m

$= -kx + F_0(t)$ — jawna zależność od czasu (niejednorodność)

$m\ddot{x} + kx = F_0(t)$

(*) $\underbrace{\ddot{x} + \omega_0^2 x}$ $=$ $\underbrace{a_0 \sin\omega t}$ = funkcja czasu

$\frac{F_0}{m} = \underbrace{\frac{f_0}{m}}_{a_0}\sin\omega t$

w ogólności $\omega_0 \neq \omega$

częstość własna układu $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

częstość siły wymuszającej ruch

(*) Rozwiązanie: $\boxed{x_s(t) = C \cdot \sin\omega t}$ C – stała

$-C\omega^2 \cancel{\sin\omega t} + C\omega_0^2 \cancel{\sin\omega t} = a_0 \cancel{\sin\omega t}$ $\sin\omega t \neq 0$ tożsamościowo

$C(\omega_0^2 - \omega^2) = a_0$

$$x_s(t) = \frac{a_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \sin\omega t$$ ← rozwiązanie szczególne

Gdzie są warunki początkowe?

(*) $x(t) = \underbrace{x_j(t)} + x_s(t)$ s – szczególne

$\ddot{x}_j + \omega_0^2 x_j = 0$ rozw. r. jednorodnego

$x_j(t) = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t$

Dlaczego tak? (*) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \sin\omega t$ ← to

Sprawdzamy, że $x(t) = x_j(t) + x_s(t)$ rozwiązuje to równanie

Podstawiamy:

rozwiązanie

Podstawiamy:

$$\ddot{x}_j + \ddot{x}_s + \omega_0^2 x_j + \omega_0^2 x_s = a_0 \sin \omega t$$

$$\underbrace{\ddot{x}_j + \omega_0^2 x_j}_{=0}$$

$$\ddot{x}_s + \omega_0^2 x_s = a_0 \sin \omega t$$

Wniosek: znajduję rozw. szczególne r. niejednorodnego (nie zawiera stałych niezanych) i dodaję ogólną postać rozwiązania r. jednorodnego.

$$(*) \quad x(t) = \underbrace{A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t}_{x_j} + \underbrace{\frac{a_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t}_{x_s}$$

czyli rozw. $x(t)$ zależy od 2 stałych A, B które wyznaczamy z warunków początkowych

Najprostszy przykład: $x(0) = 0$
$\dot{x}(0) = 0$

$$x(0) = B = 0$$

$$\dot{x}(t) = A\omega_0 \cos \omega_0 t - B\omega_0 \sin \omega_0 t + \frac{a_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

$$\dot{x}(0) = A\omega_0 + \frac{a_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$A = -\frac{\omega}{\omega_0} \frac{a_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$x(t) = -\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \frac{a_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega_0 t + \frac{a_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

$$x(t) = \frac{a_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right)$$

nie ma tłumienia (tarcia)

gdy $\omega \to \omega_0$ osobliwość

Oscylator harmoniczny z siłą tłumiącą (z oporem)

$$m\ddot{x} = -kx + F_{op}$$

$$= -kx - \gamma \dot{x}$$

F_{op} – siła oporu

$\gamma = \text{const}$

$$F_{op}(v) = -\gamma \dot{x}$$

v

$= -kx - \gamma\dot{x}$

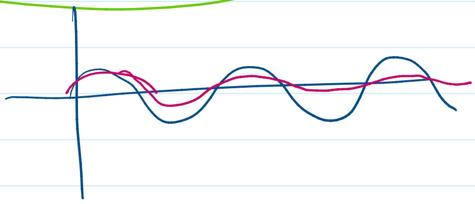
$$F_{op}(v) = -\gamma \underbrace{\dot{x}}_{v}$$

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0 \quad /m \qquad \Gamma = \frac{\gamma}{m}$$

$$\boxed{(1)\ \ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

r.r. 2 go rzędu
2 go, 1 wszy poch.
0-wy

r. liniowe
o stałych wsp.



Metoda rozwiązywania:

(1) wielomian charakterystyczny $W_n(\lambda) = 0$

$$W_2(\lambda) = \underbrace{\lambda^2 + \Gamma\lambda + \omega_0^2} = 0 \quad \text{i rozwiązujemy}$$

$$\lambda = \frac{-\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{\Gamma}{2} \underbrace{\pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}}$$

dwa pierw. zespolone

Przypadki: (1) tłumienie jest słabe tzn. $\Gamma^2 < 4\omega^2$

(2) tłumienie krytyczne $\Gamma^2 = 4\omega_0^2$ $\quad \omega_0 = \frac{\Gamma}{2}$ podwójny pierw.

(3) tłumienie silne $\Gamma^2 > 4\omega^2$ $\quad$ dwa pierwiastki rzeczywiste

(1) $$\lambda = \underbrace{-\frac{\Gamma}{2}}_{Re(\lambda)} \pm i\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}}_{Im(\lambda)} > 0$$

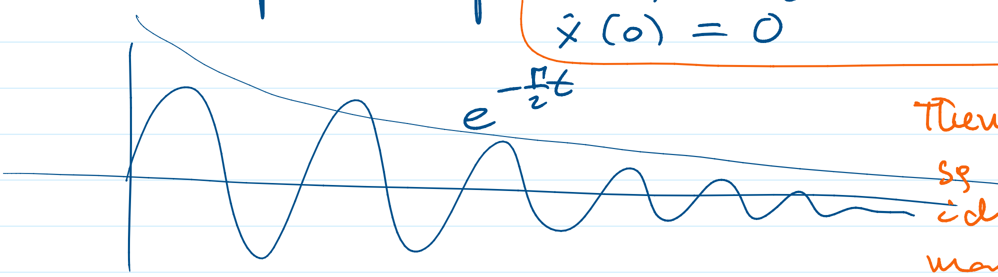
$-\frac{\Gamma}{2} + i\sqrt{\ }$

$-\frac{\Gamma}{2} - i\sqrt{\ }$

$$\boxed{x(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left(A\sin\Omega t + B\cos\Omega t\right)} \qquad \left(Ae^{i\Omega} + Be^{-i\Omega}\right)$$

po podst. do rozwiązania otrzymujemy: $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}$ $\qquad \omega_0$ – częstość własna

Jakieś war. pocz.: np. $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ lub $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$



Tłumienie słabe: są oscylacje lecz ich amplituda maleje i częstość jest stała lecz $\Omega < \omega_0$

(3) Tłumienie silne $\qquad \frac{\Gamma^2}{4} > \omega_0^2 \qquad \frac{F_{op}}{m} = -\Gamma v$

$$\lambda = -\frac{\Gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\Gamma^2}{\ } \ \ \omega^2}$$

(3) Tłumienie silne

$$\lambda = -\frac{\Gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\Gamma^2}{4} - \omega_0^2} \qquad \frac{\Gamma^2}{4} > \omega_0^2$$

[illegible]

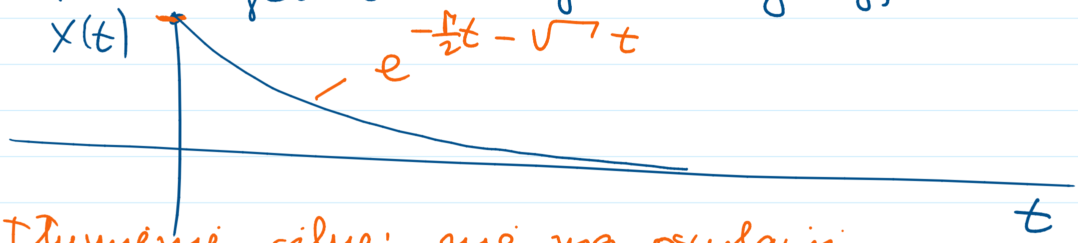
dwa pierwiastki rzeczywiste

$$e^{\lambda_1 t}, \; e^{\lambda_2 t} = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} e^{-\sqrt{\ }t}$$

$$= e^{-\frac{\Gamma}{2}t} e^{+\sqrt{\ }t}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left(A \sinh \omega_0 t + B \cosh \omega_0 t\right)$$

to równanie nie jest oscylujące



Tłumienie silne: nie ma oscylacji
ciało "nie przechodzi na drugą stronę względem położenia równowagi"

(2) $x(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}(A + B \cdot t)$ nie ma oscylacji

Practice makes perfect