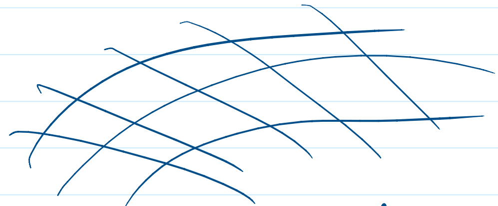
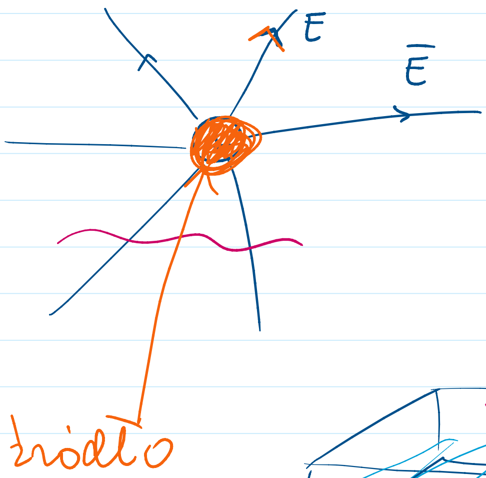
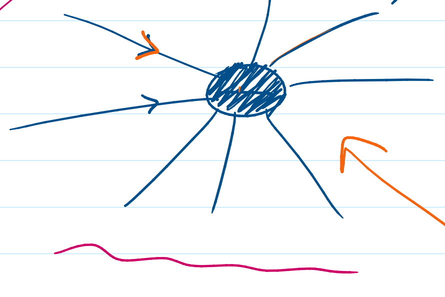
$$\operatorname{grad} \phi(x,y,z) = \left(\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial x}}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$$



## Dywergencja

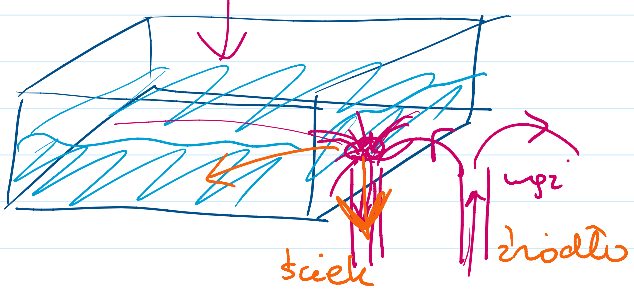
**Pole wektorowe** $\underline{\bar{E}}, \bar{H}$, $\underline{\bar{v}}$ (pole prędkości wody w rzece, w wannie...)

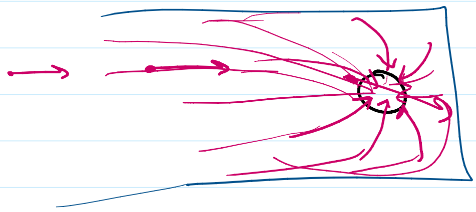


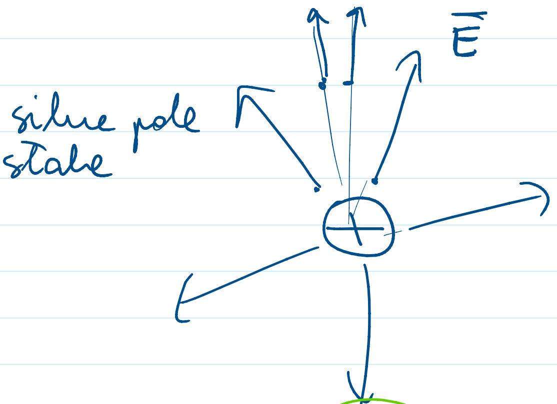
$$\frac{1}{r^2}$$

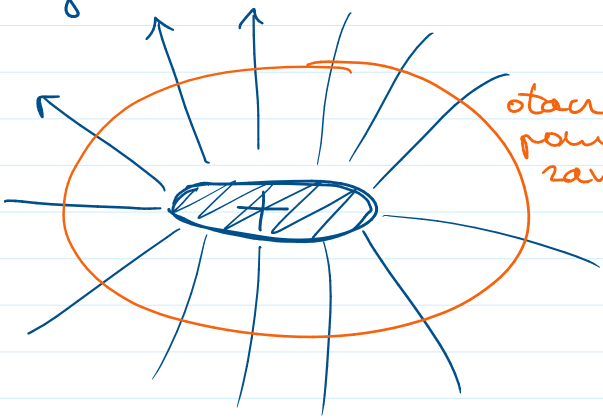
$$\boxed{\bar{F} = q\bar{E}}$$



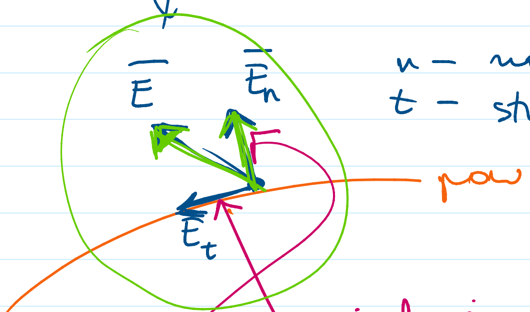



Zachodzi potrzeba opisu takiego kształtu linii pola wektorowego



otaczam źródło powierzchnią zamkniętą



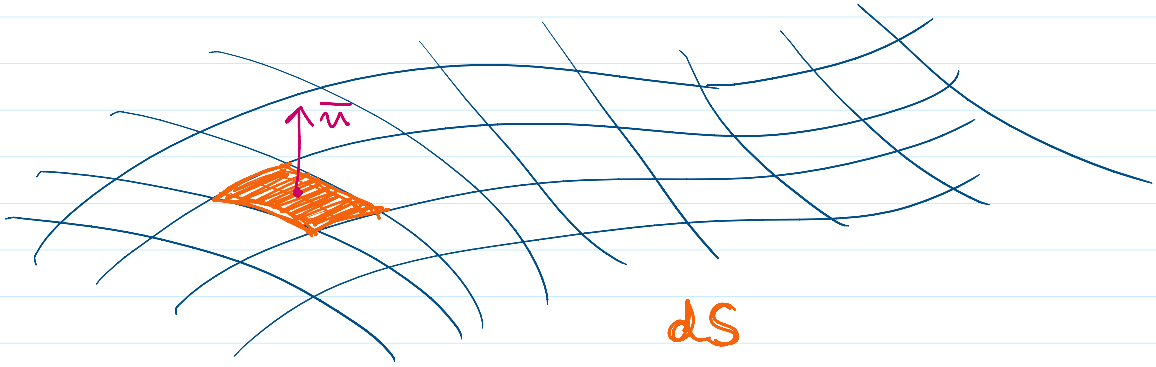

n – normalna
t – styczna

nie daje wkładu do wypływu

daje wkład

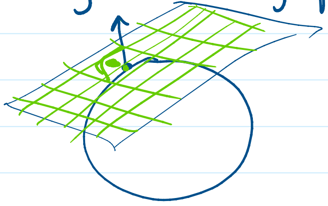
dany układ

Element zorientowany powierzchni




Przyporządkowujemy wektor $\bar{n}$ $\quad |\bar{n}| = 1$

$\bar{n} \perp$ do płaszczyzny stycznej do tej powierzchni w danym punkcie

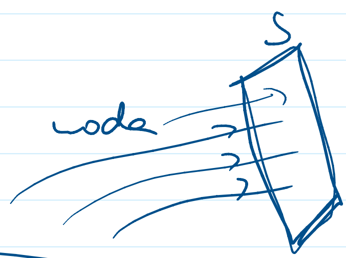


$$\boxed{d\bar{S} = \bar{n}\, dS}$$

$$E_n\, dS = \bar{E}\cdot\bar{n}\, dS = \underbrace{\bar{E}\cdot d\bar{S}}_{\text{nazywam elementem strumienia}}$$

iloczyn skalarny!

strumień $\phi_E$ : $\quad d\phi_E = \bar{E}\cdot d\bar{S}$



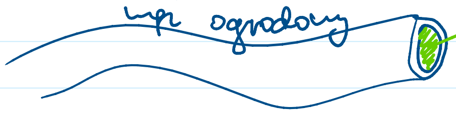

$v \cdot S$

$$\phi_E = \int_S \bar{E}\cdot d\bar{S}$$

S ← dowolna powierzchnia określona

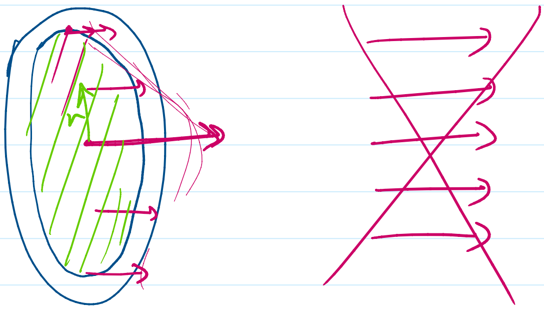
— to jest pow. S

S ← dowolna powierzchnia określona




to jest pow. S

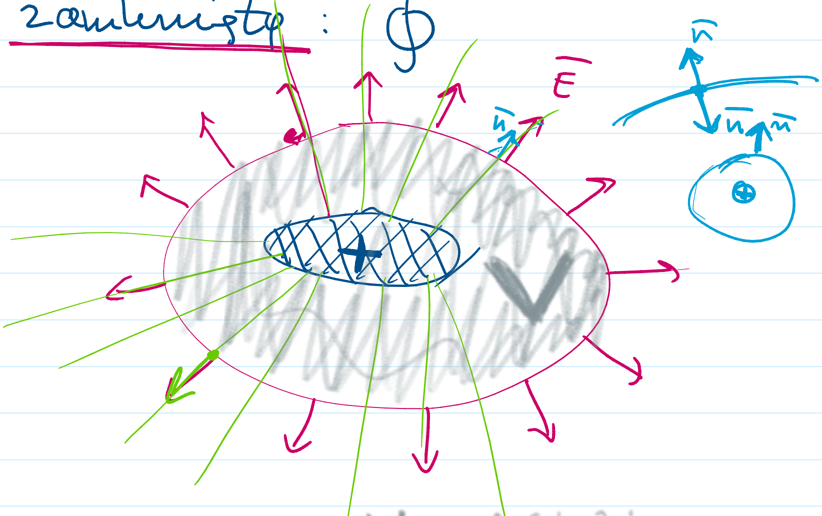
$$\phi_v = \int \bar{v}\, d\bar{S}$$



Szczególny przypadek: strumień przez powierzchnię zamkniętą: $\oint$

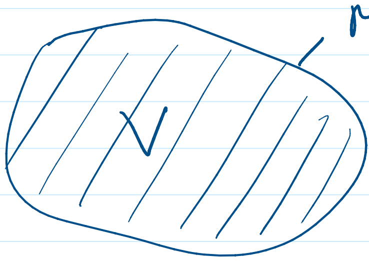
$$\boxed{\phi_E = \oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S}}$$

$$\phi_E = \oint_S \bar{E} \cdot \bar{n}\, dS$$

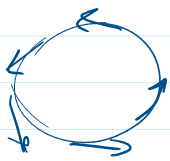


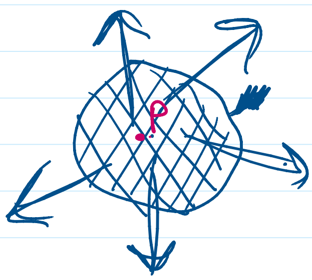

V – objętość zamknięta. wewn. powierzchni S

Powierzchnia zamknięta "zamyka" wewnątrz pewną objętość V




pow. zamk. S



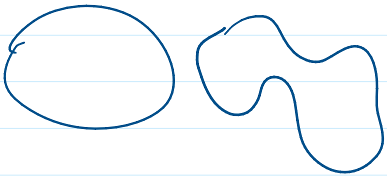



$$\operatorname{div} \bar{E} = \lim_{\substack{V \to 0 \\ \text{punkt } P}} \frac{1}{V} \overbrace{\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S}}^{\text{skalar}}$$

jeśli taka granica istnieje

nie zależy od wyboru pow. S

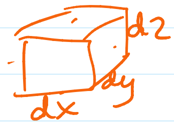
def.: niezależna od wyboru współrzędnych



wybór pow. S

div $\bar{E}$ jest określona w tym punkcie $P(x,y,z)$

czyli jest wielkością lokalną




divergence – rozbieżność

convergence – zbieżność

(grad $\phi$ $\longrightarrow$ wektor)

div $\bar{E}$ $\longrightarrow$ skalar

We wsp. kartezjańskich $\quad \bar{E} = \left(E_x(x,y,z), E_y(x,y,z), E_z(x,y,z)\right)$

$$\mathrm{div}\,\bar{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$(x,y,z)$

$(r,\theta,\varphi)$

dla pola radialnego $\quad \bar{E}(r) = f(r)\cdot \bar{e}_r \quad$ nie zal. od $\theta,\varphi$

$$\mathrm{div}\,\bar{E} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 f(r)\right)$$

Własności divergencji: / strumienia

$$\oint_S (\bar{E}_1+\bar{E}_2)\,d\bar{S} = \underbrace{\oint \bar{E}_1\,d\bar{S}}_{\phi_1} + \underbrace{\oint \bar{E}_2\,d\bar{S}}_{\phi_2} = \phi_1 + \phi_2$$

$$\boxed{\mathrm{div}\,(\bar{E}_1+\bar{E}_2) = \mathrm{div}\,\bar{E}_1 + \mathrm{div}\,\bar{E}_2}$$

$a \neq 0$

$$\boxed{\mathrm{div}\,(a\bar{E}) = a\,\mathrm{div}\,\bar{E}} \qquad \phi_{aE} = \oint_S a\bar{E}\,d\bar{S} = a\oint \bar{E}\,d\bar{S} = a\,\phi_E$$

$$\mathrm{div}\left(g(x,y,z)\cdot\bar{E}\right) = $$ we wsp. kartezjańskich

$$\mathrm{div}\left(g(x,y,z)\cdot \bar{E}\right) =$$

$$\bar{E}_1 = g\cdot \bar{E} = (gE_x, gE_y, gE_z)$$

$$\mathrm{div}\,\bar{E}_1 = \frac{\partial}{\partial x}(gE_x) + \frac{\partial}{\partial y}(gE_y) + \frac{\partial}{\partial z}(gE_z)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(gE_x) = \frac{\partial g}{\partial x}\cdot E_x + g\frac{\partial E_x}{\partial x} \longrightarrow \text{podst.}$$

$$\underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}\cdot E_x + \frac{\partial g}{\partial y}E_y + \frac{\partial g}{\partial z}E_z}_{\underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right)}_{\mathrm{grad}\, g}\cdot \underbrace{(E_x, E_y, E_z)}_{\bar{E}}} + \underbrace{g\frac{\partial E_x}{\partial x} + g\frac{\partial E_y}{\partial y} + g\frac{\partial E_z}{\partial z}}_{g\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = g\,\mathrm{div}\,\bar{E}}$$

$$\boxed{\mathrm{div}(g\bar{E}) = g\,\mathrm{div}\,\bar{E} + \bar{E}\cdot\mathrm{grad}\, g}$$

Laplasjan – operator Laplace'a $\Delta$

$$\Delta\phi = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi = \mathrm{div}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

div można zapisać symbolicznie:

$$\boxed{\mathrm{div}\,\bar{E} = \nabla\cdot\bar{E}} \qquad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$E_x, E_y, E_z$

$$\Delta = \nabla\cdot\nabla = \nabla^2$$