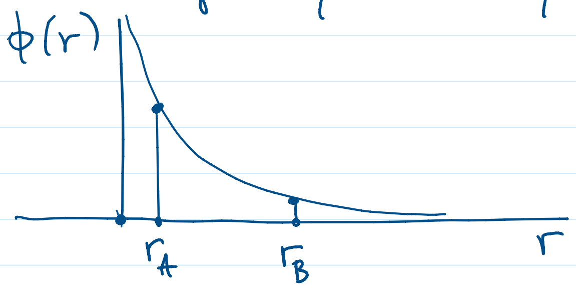
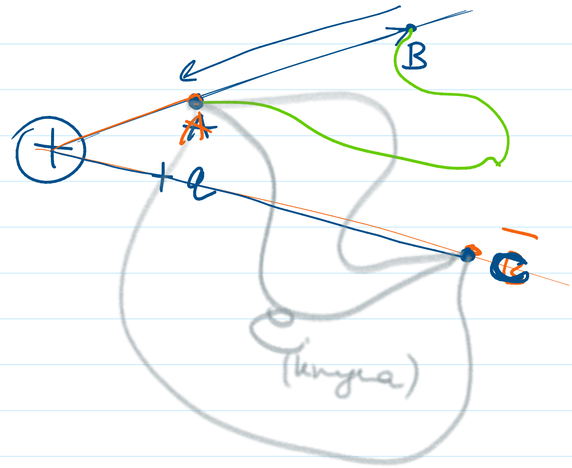
Wykład 20

czwartek, 13 maja 2021 13:04

$\bar{E} = -\operatorname{grad}\phi$ ϕ – potencjał



$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + \underline{\underline{\phi_0}}$$



$dW = \bar{F}d\bar{l}$

$W_{AB} > 0$

$W_{BA} < 0$ $dW = q\bar{E}d\bar{l} = -q\cdot\operatorname{grad}\phi\cdot d\bar{l}$

$$dW = -q\,\underline{\operatorname{grad}\phi}\cdot d\bar{l}$$

$$W_{AC} = -q\int_A^C \underline{\operatorname{grad}\phi}\, d\bar{l} = \underline{-q\left(\phi(C)-\phi(A)\right)}$$

wynik zależy tylko od wartości potencjału w punktach C i A

nie zależy od formy drogi (krzywej C)

$\phi(r_C)$ ....

gdy $\underline{W_{AC} = -q\left(\phi(C)-\phi(A)\right)} = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_C}-\frac{1}{r_A}\right)$

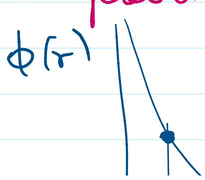
$$W_{AA} = -q\oint_C \underline{\operatorname{grad}\phi\, d\bar{l}} = -q\left(\phi(A)-\phi(A)\right) = 0$$

Praca po drodze zamkniętej $= 0$

Takie pole nazywamy zachowawczym

$\oint dW = 0$

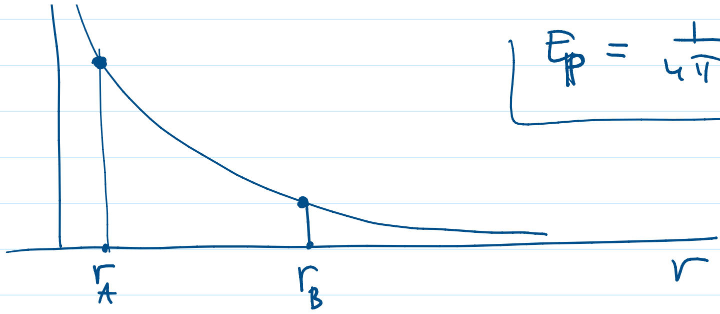
Energia potencjalna



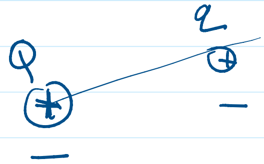
$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r}$$

$$\boxed{E_p = q \cdot \phi}$$



$$\boxed{E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r}}$$



$$E_p(A) = E_p(B) + W_{AB}$$

Jednostka potencjału : Volt $1V$

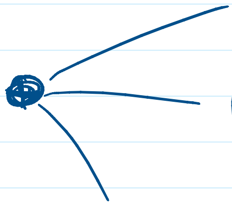
energii : Joule $1J$

$$1J = 1C \cdot 1V$$ w układzie SI

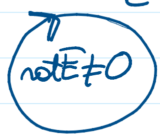
Napięcie = różnica potencjałów $\cancel{\phi_0}$

$\bar{E} = -\operatorname{grad}\phi$ tylko gdy $\operatorname{rot}\bar{E} = 0$

bezwirowe



pole źródłowe



nie ma potencjału $\cancel{\phi}$

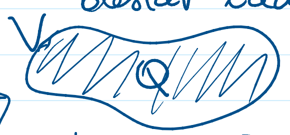
$\oint \bar{E}\,d\bar{l} \neq 0$

Przypadek ogólny: ładunki rozciągłe

$\cdot e \ -e$

$p \cdot \ +e$

obszar ładunku



ale $\rho = \frac{dQ}{dV}$ gęstość ładunku przestrzenna

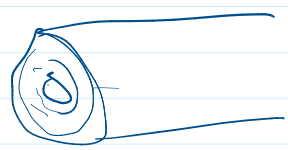
$\rho(x,y,z) =$

$dV = dx\,dy\,dz$

całkowity ładunek

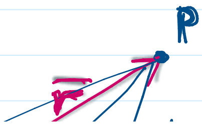
$$\boxed{\int_V \rho\, dV = Q}$$

$\rho = \frac{dm}{dV}$



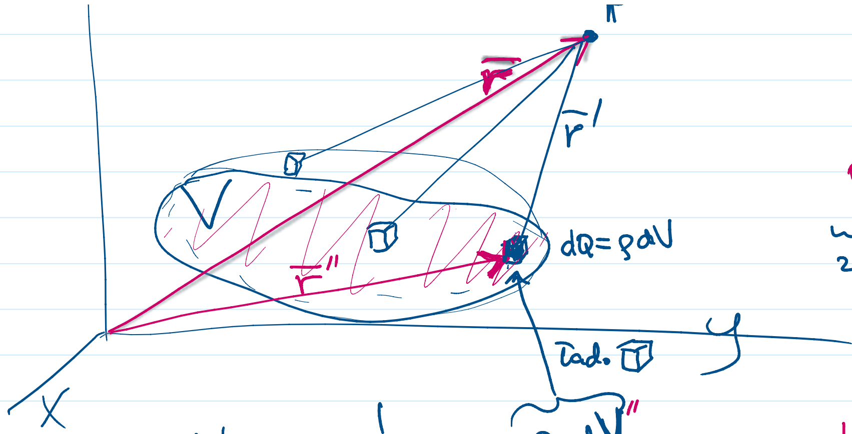
Jak policzyć pole $\bar{E}$? w punkcie P

z



$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

$\rho = \frac{dQ}{dV}$



$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

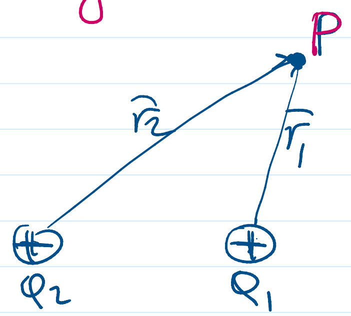
$\phi(\bar r)$ infinitezymalne wkłady od "kostek" z całej objętości V

$|\bar r'|$

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\, dV''}{|\bar r'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho'' dV''}{\underbrace{|\bar r - \bar r''|}_{\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2}}}$$

Zasada leżąca u podstaw takiego rachunku

$$\phi(\bar r) = \int_V d\phi$$



Zasada superpozycji pól

Pole/potencjał ($\bar E$ / ϕ) w danym punkcie P jest sumą prostą pól/potencjałów ($\bar E$ / ϕ) od poszczególnych źródeł

→ w przypadku rozciągłego rozkładu ładunki → całka

$\phi(P) = \phi_1(P) + \phi_2(P)$ Tak ale

$\bar E(P) = \bar E_1(P) + \bar E_2(P)$

$\bar E = -\text{grad}\,\phi$

Można pokazać, że podstawowym równaniem

pole $\bar E$ ⟷ źródło = ładunek

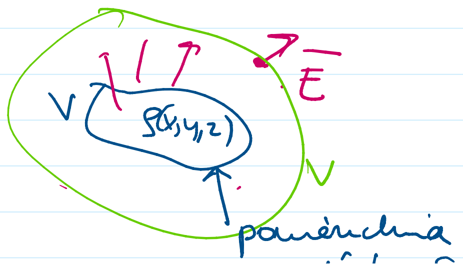
$$\boxed{\text{div}\,\bar E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$\rho(x,y,z)$ $\bar E(x,y,z)$

różniczkowa postać I r. Maxwella.

$$\text{div}\,\bar E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

↑ funkcja pola ↑ źródło pola



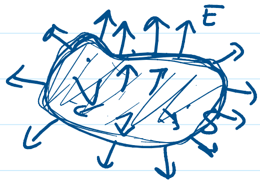
funkcja pola $\uparrow$ $\qquad$ $\uparrow$ źródło pola $\qquad$ $\uparrow$ powierzchnia zamknięta S

$$\int \operatorname{div} \bar{E}\, dV = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dV}_{Q}$$

V – objętość

$$\int_V \operatorname{div} \bar{E} \cdot dV = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

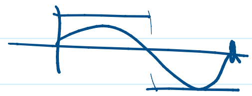
Tw. Gaussa :
$$\boxed{\int_V \operatorname{div} \bar{E}\, dV = \oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S}}$$



$$\boxed{\oint \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

$\Rightarrow$ wynika prawo Coulomba

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$



I r. Maxwella

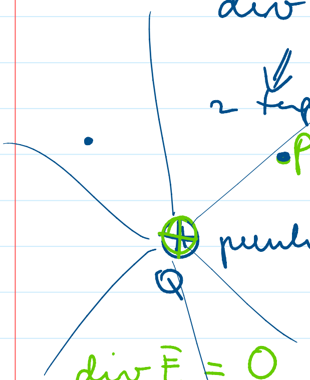
postać różniczkowa $\qquad$ postać całkowa

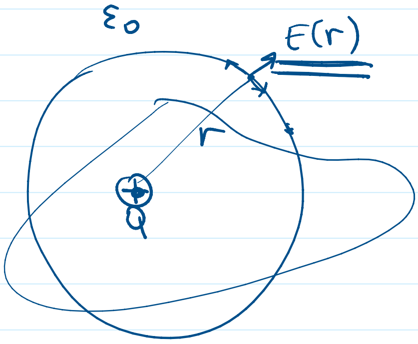
$$\operatorname{div} \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \longrightarrow \oint_S \bar{E} d\bar{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

z tego równania $\qquad$ sfera $\downarrow$

$\cdot P$ tu $\rho = 0$

punktowy





$\operatorname{div} \bar{E} = 0 \qquad E(r) = E_r$

$$\underbrace{E(r)}\cdot\underbrace{4\pi r^2} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}}$$

$$\frac{1}{r^2}\underbrace{\frac{d}{dr}(r^2 E_r)} = 0$$

$$\frac{d}{dr}\underbrace{(r^2 E_r)}_{C} = 0$$

$$r^2 E_r = C \qquad \boxed{E_r = \frac{C}{r^2}}$$

zależność coulombowska

Równanie

$$\boxed{\operatorname{div} \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \text{ i podstawię } \bar{E} = -\operatorname{grad}\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Poissona $$\boxed{\Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots\right)\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

~ próżnie ρ mogę policzyć potencjał $\phi(r)$

$\Delta \phi = 0$ Laplace'a

$$\frac{1}{r^2}\underbrace{\frac{d}{dr}\left(\underbrace{r^2 \frac{d\phi}{dr}}\right)} = 0$$

$$r^2 \frac{d\phi}{dr} = D$$

Przykład

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\phi}{dr}\right) = \frac{\overset{= \text{const}}{\rho}}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{d}{dr}\underbrace{\left(r^2 \frac{d\phi}{dr}\right)} = \frac{\rho r^2}{\varepsilon_0}$$

$$r^2 \frac{d\phi}{dr} = \frac{\rho r^3}{3 \varepsilon_0} + E \quad / : r^2$$

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\rho r}{3 \varepsilon_0} + \frac{E}{r^2}$$

$$\boxed{\phi(r) = \cancel{\frac{\rho r^2}{6 \varepsilon_0}} - \frac{E}{r} + \underline{\underline{D}}}$$

kulombowska