

Fizyka z Matematyką II

(zadania domowe 2021-04-02)

Przekształcenia liniowe, układy równań, macierz odwrotna

Zadanie 1. Mając dane przekształcenia liniowe:

1) $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, T_1(x, t) = (x + 2t, 3x - 4t, x + t),$

2) $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T_2(x, t) = (6x - 2t, x - 3t),$

3) $T_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, T_3(x, t, u) = (t - u, -x + t + u)$

podać macierze tych przekształceń w bazach standardowych oraz wyznaczyć macierze następujących przekształceń liniowych:

a) $2T_1$, b) $3T_1 \circ T_2$, c) $(T_1 \circ T_2) \circ T_3$, d) $T_3 \circ (T_1 \circ T_2)$ e) $T_2 \circ (T_1 \circ T_3)$ f) $T_2 \circ (T_3 \circ T_1)$.

Zadanie 2. Sprawdzić, czy wektory $\vec{v}_1 = (1, 1, -2, 0, 1)$ i $\vec{v}_2 = (-2, 0, 0, 1, 1)$ należą do podprzestrzeni jądra przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ wyrażonego wzorem $L(x, y, z, u, v) = (x - 2y + u + v, x - y + z + 2v, 3x - 4y + 2z + u + 5v, x - 3y - z + 2u)$. Podać przykład innego wektora należącego do podprzestrzeni jądra tego przekształcenia.

Zadanie 3. Rozwiąż układ równań sprowadzając macierz rozszerzoną do postaci schodkowej. Powtórzyć rozwiązanie metodą wyznaczników

$$\begin{cases} 2z - 3y + 5x = 3 \\ 4x + 5y - 3z = 21 \\ -2y + 5x - 3z = -12 \end{cases}$$

Zadanie 4. Podać macierz dopełnień algebraicznych oraz macierz odwrotną do macierzy M

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 5. Znaleźć macierz odwrotną układu równań

$$\begin{cases} x + z - y = 4 \\ 2x - y - 8 = 0 \\ x - 3z = 36 \end{cases},$$

a następnie rozwiązać ten układ równań. Powtórzyć rozwiązanie sprowadzając macierz rozszerzoną do postaci schodkowej.

Zadanie 6. Obliczyć iloczyny macierzy AB i BA , gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Dla jakich wartości parametru m zachodzi $AB = BA$?

Zadanie 7. Niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Rozwiąż równanie macierzowe $AB = C$ ze względu na B .