



Katowice, 9 czerwca 2025 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Mateusza Czai
"Multiloop Corrections to Semileptonic Decays of the B Meson"

Na pracę doktorską magistra Mateusza Czai liczącą 164 stron składają się wprowadzenie, trzy główne rozdziały, konkluzje i spis literatury do 235 prac naukowych. Rozprawę doktorską przygotowano na podstawie pracy opublikowanej w Journal of High Energy Physics w 2025 roku i częściowo publikacji w Symmetry z 2024 roku oraz European Physical Journal C z 2023 roku.

Rozprawa poświęcona jest obliczeniu inkluzywnego, semileptonowego rozpadu mezonu B i wyznaczeniu poprawki drugiego rzędu (NNLO) względem silnej stałej sprzężenia α_s do szerokości połówkowych rozpadów z pojedynczym kwarkiem powabu c , $b \rightarrow X_{1c} l \bar{\nu}_l$ (gdzie X_{1c} to pojedynczy kwark c z możliwymi bezmasowymi dżetami) oraz trzema kwarkami c : $b \rightarrow cc\bar{c} l \bar{\nu}_l$. Szerokości te są wyznaczone w funkcji niezmienniczej masy pary leptonów tych rozpadów oraz tzw. momentów widm. Rachunki wykonano przy pomocy metody rozwinięcia amplitud w wiodącym rzędzie masy kwarku b .

Rozpatrywane procesy są wykorzystywane do testów Modelu Standardowego (SM), w szczególności macierzy mieszania kwarków CKM i elementu V_{cb} oraz wartości masy kwarków pięknego (ang. bottom b), powabnego (ang. charm c) oraz nieperturbacyjnych parametrów używanych w teorii rozpadów mezonu B.

We wprowadzeniu opisano główne cechy SM, zwrócono uwagę na fakt, że przyszłe eksperymenty (Belle II, LHCb, HL-LHC) w następnych dwóch dekadach zwiększą kilkukrotnie dokładność eksperymentów w fabrykach zapachu, motywując precyzyjniejsze obliczenia teoretyczne odpowiednich obserwacji. Wyjaśniono w jaki sposób stosuje się rozwinięcie w masie ciężkich kwarków (HQE) do wyznaczenia mieszania V_{cb} , dokonuje się reparametryzacji niezmienniczej członów niezależnych od prędkości i redukcji liczby członów w rozwinięciu HQE, przedstawiono historię odpowiednich obliczeń w fizyce kwarków b .

Rozdział pierwszy opisuje poprawki perturbacyjne w teorii pola wraz z redukcją LSZ, zapis amplitud i szerokości połówkowych rozpadu poprzez nieredukowalne

wkłady 1PI, wprowadzenie do problemu rozbieżności w kwantowej teorii pola, regularyzacji całek Feynmana i wprowadzenie kontrczłonów. Przedyskutowano problem algebry Diraca i członów zawierających macierze γ_5 w analizie wymiarowej oraz algebrę grupy $SU(3)$ dla oddziaływań silnych koloru. W tym rozdziale pokazano dwa przykładowe obliczenia dla diagramu dwupętlowego z propagatorem fotonowym i gluonowym (amplituda oraz obliczenie śladów z macierzy, które sprowadzono do 28 całek skalarnych).

Rozdział drugi przedstawia główny problem w obliczeniach całek wielopętlowych przy pomocy równań różniczkowych, które są zastosowane w rozprawie doktorskiej, czyli metody całkowania przez części (IBP), w której wyznacza się wszystkie potrzebne całki tensorowe Feynmana danego rzędu poprzez skończoną liczbę całek MIs oraz sposób ich obliczenia. W trzecim przykładzie obliczeń dla tego samego diagramu co w rozdziale drugim wyznaczono 13 całek MIs. To jak i pozostałe obliczenia IBP w pracy wykonano przy pomocy publicznie dostępnego programu Kira. Mając zbiór całek MIs do obliczenia, omówiono bardzo starannie problem kontrukcji równań różniczkowych w postaci kanonicznej, w której zależność od wymiarowego regulatora nieskończoności ϵ jest sfaktoryzowana, co prowadzi do uproszczonej struktury rozwiązań całek MIs w postaci uogólnionych polylogarytmów (GPL). Odpowiednie równania różniczkowe dla dyskutowanego przykładu dwupętlowego uzyskano przy użyciu programu Libra i procedury prowadzącej do kanonicznej postaci równań opracowanej przez R.N. Lee. W ten sposób końcowy wynik dla procesu $b \rightarrow X_{1c} l \bar{\nu}_l$ wyznaczono w postaci analitycznej przy pomocy funkcji GPL.

Szczególnie w przypadku wieloparametrowych całek (wiele mas) nie zawsze można uzyskać analityczne rozwiązania, dlatego obecnie popularność zyskała bardzo ciekawa metoda numerycznych obliczeń całek wielopętlowych opracowana przez Liu, Ma i Wanga. W rozprawie omówiono tę metodę nazwaną przez autorów metodą pływ masy niezmienniczej oraz odpowiednie publicznie dostępne oprogramowanie AM-Flow przy pomocy którego, jeśli tylko możliwa jest redukcja IBP całek i konstrukcja odpowiednich równań różniczkowych, można obliczyć dowolne całki wielopętłowe z bardzo dużą dokładnością, w rozprawie całki obliczono z dokładnością minimum 30 cyfr.

Rozdział trzeci zawiera fizyczne wyniki czyli obliczenie wiodącego członu w HQE widma q^2 dla inkluzywnego rozpadu semileptonowego na poziomie dwupętlowym (NNLO) w parametrze α_s . W tym przybliżeniu można rozdzielić wkłady od tensorów leptonowych i kwarkowych. Perturbacyjne rozwinięcie HQE amplitudy jest możliwe ponieważ proces jest traktowany inkluzywnie.

Na początku rozdziału trzeciego zdefiniowano w ramach SM człony Lagrangianu prowadzące do tensorów hadronowych i leptonowych i podano wzór na różniczkową szerokość połówkową w parametrze q^2 dla ogólnego procesu $B \rightarrow X_c Q$, ważny w każdym rzędzie α_s . Dalej omówiono zakres stosowalności rachunku zaburzeń w QCD rozpatrując równanie dla biegnącej stałej sprzężenia α_s definiując graniczną skalę

QCD rzędu 210 MeV. Następnie zdefiniowano kontrczłon dla propagatora gluonu oraz dopasowanie pomiędzy pełną teorią QCD oraz rozwinięciem HQET i wpływem niezmienniczości reparametryzacji członów rozwinięcia na współczynniki Wilsona HQE. Ponieważ widmo q^2 oraz jego momenty są niezmiennicze ze względu na rozpatrywaną reparametryzację HQE, niezmienniczość tą można wykorzystać do wyeliminowania z HQE po jednym z operatorów o wymiarze masy 5 i 6 i czterech operatorów o wymiarze masy 7 prowadząc do mniej skomplikowanych relacji w wyznaczeniu V_{cb} . Wykres 14 przedstawia wynik otrzymany dla widma $\hat{q}^2$ rozpadów półleptonowych mezonu B na poziomie NLO (na podstawie wzoru analitycznego). W pełnym zakresie $\hat{q}^2$ zbieżność na poziomie NLO jest już bardzo dobra (stosunek NLO/LO jest poniżej 10%).

Na poziomie NNLO, dla procesu $b \rightarrow X_c Q$ otrzymano 151 trójpętlowych MIs dla 39 topologii, przy redukcji z całkowitej liczby 17664 całek skalarnych. 97 MIs ma części zespolone dające wkład do szerokości połówkowych. Całki te odpowiadają cięciu diagramu poprzez jedną i trzy linie z kwarkiem powabnym co odpowiada odpowiednio procesom $b \rightarrow X_{1c} l \bar{\nu}_l$ oraz $b \rightarrow c \bar{c} l \bar{\nu}_l$. Całki odpowiadające pojedynczym cięciom linii kwarku c da się wyrazić przez funkcje GPL. Pozostałe całki odpowiadające cięciu trzech linii kwarku c obliczono przy pomocy AMFlow. Numeryczne obliczenia kontrczłonów na poziomie NNLO oraz gołych poprawek NNLO przedstawiono na Fig. 20 oraz Fig. 21. Wyniki numeryczne dla zrenormalizowanej poprawki NNLO do widma $\hat{q}^2$ rozpatrywanego inkluzywnego procesu przedstawiono na Fig. 22, gdzie oszacowano również zakres zmian związany ze zmianą skali μ . Z wykresu wynika, że stosunek NNLO/NLO jest poniżej 2% w całym zakresie $\hat{q}^2$.

Oprócz w pełni inkluzywnego wyniku dla widma $\hat{q}^2$ w rozprawie pokazano również zaniedbany we wcześniejszej literaturze wynik na rozpad kwarku b do trzech kwarków powabnych. Do procesu rzędu α_s^2 wkład ma 58 diagramów, z czego 6 trójpętlowych diagramów z trzema cięciami na linii kwarku c . Wyniki, na podstawie dopasowania odpowiedniej formuły przedstawiono na Fig. 24. Zgodność dopasowania w porównaniu z dokładnym wynikiem numerycznym (całki policzone metodą AMFlow) jest bardzo dobra, różnice nie przekraczają 1.5%. W podobny sposób, po odjęciu od pełnego inkluzywnego wyniku kanału z trzema kwarkami c skonstruowano dopasowanie funkcji odpowiadającej kanałowi z jednym kwarkiem c . Wyniki porównano z analitycznym wynikiem wyrażonym przez funkcje GPL otrzymanym wcześniej przez Faella i Herrena w pracy [67]. Względny błąd uzyskany z tych dwóch obliczeń nie przekracza 0.004%.

Wartości Γ_{1c} na poziomie dokładności α_s^2 dominują ponad Γ_{3c} , co pokazuje Fig. 26. Względny stosunek $\Gamma_{3c}^{(2)}/\Gamma_{3c}^{(2)}$ jest co najwyżej 10^{-4} dla małych wartości $\hat{m}_c$ i spada bardzo szybko z tym parametrem. Obliczając więc ten (spodziewany) mały wkład $3c$ do rozpadów półleptonowych kwarku b , zmniejszono szacunkowy błąd teoretyczny dla tego procesu.

Na zakończenie przedstawiono wyniki na momenty $\hat{q}^2$ widm, które stosuje się do ekstrakcji wartości V_{cb} i mas kwarków b i c z wyników eksperymentalnych. Oszacowano, że wpływ kanału $3c$ do momentów widma jest zanedbywalny przy obecnej precyzji pomiarów, natomiast wkład NNLO przesuwają pierwszy i następne momenty w zakresie $(0.1 \div 0.8)\%$.

Praca napisana jest starannie. Poniżej wymieniam kilka pomniejszych uwag i pytań, które mam po przeczytaniu rozprawy.

Jako motywację dla dokładniejszych obliczeń teoretycznych podano wzrost dokładności eksperymentów w fizyce zapachu i jako przykład podano w Tab. 1 oczekiwany wzrost dokładności pomiarów dla kilku obserwacji w Belle II, jednak nie podano jakie są obecne błędy teoretyczne dla tych procesów. W procedurze obliczeń na stronie 12 podano, że jeśli to możliwe wyznacza się MIs z najprostszą strukturą biegunów (punkt 10). Co to oznacza i czy takie uproszczenie jest niezależne od punktu 11, gdzie poszukuje się MIs dające równania różniczkowe w formie kanonicznej? Moim zdaniem w rozdziale 1 można było pominąć podręcznikowe treści związane z teorią pola i przedyskutować na przykład problem "overlapping divergencies" czy też procedurę R^* , które spotykamy przy renormalizacji diagramów wielopętlowych.

Z rozkładów MIs (np. Fig. 7, wzory 2.77, 2.115, Fig. 18, 19) wynika, że MIs są skonstruowane w bazie całek skalarnych, gdzie najwyżej pojawiają się "dotted" propagatory (z wyższymi potęgami), bez struktur tensorowych. Taki rozkład jednak nie zawsze jest najlepszy, na przykład właśnie ze względu na rozkłady w parametrze ϵ mogą wystąpić dodatkowe rozbieżności przy współczynnikach MIs (tematyka ta jest dyskutowana w literaturze, swego czasu o wyborze bazy MIs również napisałem pracę w PRD z D. Kosowerem i K. Kajdą). Czy tego typu problemy mogą wystąpić w rozpatrywanych przybliżeniach HQET/ α_s ? Problem ten może okazać się istotny na poziomie NNNLO.

Na stronie 133 jest wzmianka o tym, że zależność od cechowania znika na poziomie MIs. Czy tak jest w ogólności czy też jest to specyficzna sytuacja dla wykonanych obliczeń?

W sumie, przy dyskusji wykresów i wyników nie opisano dlaczego mamy zależność od $\hat{q}^2$ a nie q^2 , jaka jest różnica. Uwaga dotyczy także mas kwarków, na przykład we wzorze (3.203) występują równocześnie $m_c, \hat{m}_c, \tilde{m}_b$. Wydaje mi się, że dobrze byłoby tego typu notację zebrać w jednym miejscu i wyjaśnić. Niespójność jest widoczna na przykład przy Fig. 14 gdzie w opisie wykresu mowa jest o widmie q^2 a na osi odciętych wykresu zaznaczono zmienną $\hat{q}^2$. Na wykresach w rozdziale z wynikami numerycznymi nie określono jednostek (masy, energie).

Podsumowując, rozprawa doktorska przedstawia frontowe obliczenia, które są prowadzone w fizyce zapachu i jest bardzo wartościowa w kontekście testów SM w wiodących eksperymentach fizyki kwarku b Belle czy też LHCb. Poprawa dokładności przewidywań procesów w ramach SM poprzez obliczenia poprawek kwantowych wyższych rzędów w rachunku perturbacyjnym jest warunkiem koniecznym do porównań z rzadkimi procesami w których poszukiwane są nowe cząstki czy też oddziaływania i dla których standardowe procesy takie jak obliczone w pracy doktorskiej stanowią tło.

Moim zdaniem rozprawa doktorska w pełni spełnia wymagania stawiane pracom doktorskim i wnioskuję o dopuszczenie mgra Mateusza Czaję do dalszych etapów przewodu doktorskiego.



prof. dr hab. Janusz Gluza