

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Dimitrios Patramanisa pt. “Complexity, holography and geometry”

Praca doktorska Pana mgr Dimitrios Patramanisa pt. “Complexity, holography and geometry” została przygotowana na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego. Promotorem pracy był dr hab. Paweł Caputa.

Tematyka rozprawy dotyczy bardzo aktualnego tematu badawczego jakim jest złożoność kwantowa. Obecne, znaczące zainteresowanie tym kierunkiem badawczym związane jest zarówno z praktycznym znaczeniem złożoności kwantowej w kontekście obliczeń kwantowych jak i wyłaniającymi się w fizyce teoretycznej związkami pomiędzy złożonością kwantową a oddziaływaniami podstawowymi, w szczególności oddziaływaniem grawitacyjnym. Należy w tym miejscu podkreślić, że nie istnieje jeden ugruntowany sposób definiowania, jak również wyznaczania złożoności kwantowej. Co więcej, określanie złożoności kwantowej jest, z wyjątkiem wybranych układów kwantowych, typowo zadaniem bardzo skomplikowanym.

Poczynione w ostatnich kilkunastu latach obserwacje dotyczące analizy układów kwantowych przez pryzmat ich dualnych grawitacyjnych odpowiedników, stwarzają nadzieję na opracowanie bardziej efektywnych sposobów kwantyfikacji złożoności kwantowej. Dotyczy to, w szczególności, hipotetycznych związków złożoności kwantowej z objętością oraz z działaniem, dla układów dualnych. Podejście takie otwiera nowy rozdział w badaniach nad złożonością kwantową w chaotycznych układach kwantowych, zarówno tych odpowiadających operacjom wykonywanym na procesorach kwantowych, jak i tych związanych z fundamentalnymi procesami kwantowymi, związanymi chociażby z przetwarzaniem informacji kwantowej na horyzoncie czarnej dziury.

W swojej rozprawie, mgr Patramanis skupił swoją uwagę na eksploracji tak zwanej złożoności kwantowej Krylova, wprowadzonej w 2019 roku. Jest to nowe podejście, odwołujące się do tzw. *przestrzeni Krylova*, która (w rozważanych przypadku) jest przestrzenią operatorową, której stany bazowe są generowane przez odpowiednie krotności działania operatorem Liouville’a, dla zadanego hamiltonianu układu. Ortonormalizacja bazy w przestrzeni Krylova możliwa jest z wykorzystaniem tzw. *algorytmu Lanczosa*, który ma swoje korzenie w ortogonalizacji Grama-Schmidta. Złożoność kwantowa Krylova kwantyfikuje to w jaki sposób rozważany operator ewolucji, rozkłada się w bazie Krylova. Jest to intuicyjnie średnia z krotności zastosowania operatora Liouville’a niezbędnych do otrzymania rozkładu badanego operatora w bazie Krylova.

W swojej rozprawie doktorskiej, mgr Patramanis operacjonalizuje definicję złożoności kwantowej Krylova i wnikliwie bada ją dla spektrum wybranych układów kwantowych o zadanych symetriach. Pozwala to odsłonić szereg ciekawych własności, w szczególności dotyczących związku złożoności kwantowej Krylova z wykładnikami Lyapunova, podejściem

Nielsena do kwantyfikacji złożoności kwantowej oraz z objętością w przestrzeni fazowej. Ta ostatnia obserwacja jest szczególnie interesująca w kontekście holograficznej hipotezy o związku złożoności kwantowej z objętością w przestrzeni dualnej.

Zaprezentowane wyniki stanowią wkład do w czterech publikacjach:

[1] P. Caputa, J. M. Magan and D. Patramanis, “Geometry of Krylov complexity,” Phys. Rev. Res. **4** (2022) no.1, 013041.

[2] D. Patramanis, “Probing the entanglement of operator growth,” PTEP **2022** (2022) no.6, 063A01

[3] D. Patramanis and W. Sybesma, “Krylov complexity in a natural basis for the Schrödinger algebra,” SciPost Phys. Core **7** (2024), 037.

[4] P. Caputa, J. M. Magan, D. Patramanis and E. Tonni, “Krylov complexity of modular Hamiltonian evolution,” Phys. Rev. D **109** (2024) no.8, 086004.

Praca ma 135 stron i została napisana w języku angielskim. Dysertacja została podzielona na siedem rozdziałów (zawierających podrozdziały) oraz bibliografię, zawierającą 261 pozycji literaturowych.

Rozdział 1 dysertacji stanowi zawiera ciekawe refleksje Autora na temat znaczenia złożoności, także od strony semantyki pojęcia “złożoność”. Można polemizować z niektórymi z zawartymi tam obserwacjami. Należy jednak docenić Autora za przyjęty w tym rozdziale otwarty styl wypowiedzi, odchodzący od formatu “bezpiecznego” wstępu, trzymającego się ściśle wyników naukowych. W mojej ocenie, jest to znak świadczący o dużej otwartości umysłu doktoranta, co jest cechą niezwykle pożądaną w pracy naukowej.

W Rozdziale 2, mgr Patramanis przechodzi do dyskusji podstawowych koncepcji i definicji, na których opierać się będzie zasadnicza część rozprawy. W szczególności, Autor definiuje wybrane metody wyznaczania złożoności kwantowej, mające związek z prezentowanymi oryginalnymi wynikami. W szczególności, szczegółowo opisana została złożoność kwantowa Krylova. W mojej ocenie, w tym rozdziale zabrakło jednak szerszej dyskusji aspektów fizycznych, których badanie wymaga odwołania się do złożoności kwantowej. Dyskusja taka umożliwiłaby czytelnikowi lepiej zrozumieć motywację fizyczną stojącą za podejmowaniem tematyki złożoności kwantowej. Cenne byłoby również nawiązanie do pojęcia klas złożoności kwantowych oraz sposobów ich określania w algorytmice kwantowej. Pomimo, że podejście kwantowe jest bardziej fundamentalne, nakreślenie związku z klasycznymi sposobami kwantyfikacji złożoności (poza przywołanymi wykładnikami Lyapunova) umożliwiłoby czytelnikowi zbudować głębszą intuicję złożoności kwantowej, na bazie znanych wyników klasycznych (np. złożoności Kołmogorowa).

Rozdział 3, przywołuje wyniki artykułu [1]. Jest to obiektywnie bardzo dobrze napisana i bogata w nowe wyniki publikacja. W artykule tym, Autorzy rozwijają metodologię wyznaczania złożoności Krylova z wykorzystaniem algorytmu Lanczosa. Rozwinięte podejście analizowane jest następnie dla przypadków układów fizycznych z symetriami $SL(2, \mathbb{R}) \cong SU(1, 1)$, $SU(2)$ oraz z symetrią Weyla-Heisenberga. Ten pierwszy przypadek, jest interesujący zarówno poprzez związek ze stanami koherentnymi, jak również z uwagi na dostarczany uproszczony model dla konforemnych teorii pola (poprzez redukcję algebry Virasoro). Dla wszystkich analizowanych przypadków, Autorzy wyznaczają dokładne wyrażenia na złożoność Krylova. Niezwykle ciekawym i nieoczywistym wynikiem tej pracy jest powiązanie złożoności Krylova z objętością w przestrzeni fazowej. Stanowi to kluczową obserwację dotyczącą aspektów geometrycznych złożoności Krylova. Co istotne, poczyniona obserwacja dotycząca związku złożoności Krylova z objętością w przestrzeni fazowej jest zbieżna ze znanymi w literaturze wynikami dotyczącymi hipotezy o związku złożoności kwantowej z objętością. Szczególnie interesujący jest tu przypadek dla grypy $SU(2, \mathbb{R})$ której geometria jest hiperboliczna, co stanowi punkt zaczepienia z wynikami otrzymanymi dla przypadku holograficznego. Warto podkreślić, że jest tu mowa o objętości przestrzeni fazowej, która semiklasycznie odpowiada dostępnemu wymiarowi przestrzeni Hilberta. To intuicyjnie wiąże złożoność kwantową z ilością stanów w przestrzeni Hilberta obejmowanych przez trajektorie o zadanej długości.

Warto zauważyć, że wprowadzenie zależności od objętości poczynione jest poprzez wycałkowanie po zmiennej kątowej. Jest to możliwe z uwagi a brak zależności zmiennej kątowej od czasu dla otrzymanych trajektorii. Dotyczy to wszystkich rozpatrywanych przypadków. Wydaje się jednak, że własność taka nie musi być w ogólności spełniona, w przypadku anizotropowych geometrii przestrzeni fazowych. To rodzi pytanie, czy otrzymane związki uogólniają się poza przypadki izotropowych geometrii. Kwestia ta jednak nie była przedmiotem analizy w dyskutowanej publikacji, czy też w dalszych kontrybucjach do dysertacji.

Ciekawą część pracy stanowi również dyskusja związku złożoności Krylova z geometryczną definicją złożoności Nielsena. Autorzy pokazują, że złożoność Nielsena można zrozumieć w sensie odległości (w sensie funkcji kosztu $\mathcal{F}_1$) pomiędzy dwoma stanami, różniącymi się o kąt $d\phi$, w sensie parametryzacji zmiennymi fazowymi. Ugruntowuje to postrzeganie złożoności Krylova w sposób podobny do definicji dewiacji trajektorii fazowych, co stanowi punkt wyjścia do wprowadzenia współczynników Lapunowa.

Rozdział 4, przywołuje wyniki artykułu [2]. Publikacja ta stanowi naturalną kontynuację rozważań zaprezentowanych w rozdziale 3. W artykule tym, Autor rozszerza analizę do kwantowych układów kompozytowych. Pierwszy z rozważanych przypadków dotyczy symetrii $SU(1, 1)$, która pokrywa również 2-modowe stany koherentne (w ogólności, stany ściśnięte). Dla tego przypadku, Autor znalazł dokładne wyrażenie na złożoność Krylova, mające postać analogiczną do przypadku 1-modowego. Następnie, Autor dokonał analizy

entropii kwantowych, poprzez wyśladowanie po części układu kwantowego. Kolejny analizowany przypadek dotyczy grupy $SU(2)$, dla której Autor zbadał nieanalizowane w pracy [1] własności splątania kwantowego. Autor zauważa, że analiza entropii oraz innych miar kwantowo-informacyjnych, w szczególności tzw. pojemności splątania, dostarcza dodatkowych informacji o analizowanych stanach kwantowych, nie ujętych w złożoność Krylova. Praca nie stawia silnych konkluzji, lecz bardziej stanowi zachętę do dalszych badań w tym obszarze.

Rozdział 5, przywołuje wyniki artykułu [3]. Przedstawione wyniki stanowią zastosowanie metody omówionej w Rozdziale 3 do algebry Schrödingera. Algebra ta spełniona jest dla generatorów maksymalnej grupy symetrii równania Schrödingera dla cząstki swobodnej lub dla cząstki w potencjale harmonicznym. Warto zauważyć, że analizowane w pracach przypadki dla grupy $SU(1,1)$ oraz dla grupy Weyla-Heisenberga stanowią podgrupy algebry Schrödingera. Zasadniczym krokiem na drodze do analizy złożoności Krylova dla tego przypadku było rozpatrzenie uogólnionych stanów koherentnych odpowiadających rozważanej grupie symetrii. Na tej podstawie, Autorzy wyprowadzili wyrażenie na złożoność kwantową Krylova. Autorzy, pokazali, że dla przypadków granicznych odpowiadającym dwóm wspomnianym podgrupom, otrzymane wyrażenie redukuje się do zależności znalezionych w pracy [1]. Podobnie jak dla wcześniejszych przypadków, dokonano identyfikacji wykładnika Lapunowa, charakteryzującego zachowanie chaotyczne. W pracy nie znalazłem dyskusji związku otrzymanego wyrażenia na złożoność kwantową Krylova z objętością w przestrzeni fazowej. Zawarcie takiej dyskusji byłoby cenne w świetle analizy powiązań holograficznych i geometrycznych, stanowiących tytułowy przedmiot dysertacji.

Rozdział 6, przywołuje wyniki artykułu [4], dyskutujący złożoność kwantową dla Hamiltonianów modularnych, opisujących zredukowane macierze gęstości. W pracy, analizowana jest tzw. *spread complexity*, wprowadzona w 2022 roku i jest zdefiniowana jako wynik minimalizacji procesu rozkładu analizowanego stanu we wszystkich możliwych bazach. To okazuje się zaś związane z konstrukcją bazy Krylova. Należy podkreślić, że w tym przypadku, konstrukcja bazy Krylova, poprzez zastosowanie algorytmu Lanczosa, odnosi się do stanów kwantowych nie zaś do operatorów, jak to miało miejsce w przypadku artykułów [1,2,3]. Sama definicja złożoności jest tu analogiczna do przypadku złożoności Krylova. W artykule, analizowany jest szereg przypadków. Należą do nich: parametryzowany stan splątany dwóch kubitów, układ dwóch sprzężonych oscylatorów, dwuwymiarowy model konforemnej teorii pola oraz losowy hamiltonian modularny. W rozważaniach, złożoność analizowana jest w funkcji parametru s , parametryzującego ewolucję podukładu, ze względu na Hamiltonian modularny. Podobnie jak to miało miejsce w przypadku wcześniejszych wyników dla złożoności Krylova, również *spread complexity* wykazuje związek z wykładnikami Lapunowa. Ciekawym wynikiem pracy jest, wykazanie, że w granicy dużych czasów modularnych s , wykładniki te wykazują uni-

wersalne zachowanie $\lambda = 2\pi$, co wysyca tzw. *wież chaosyczny*, odkryty w 2015 roku. Warto podkreślić, że analiza Hamiltonianów modularnych odgrywa szczególną rolę w związku holograficznym, poprzez tzw. Pierwsze Prawo Entropii Splątania. Stąd też, otrzymane wyniki mogą potencjalnie znaleźć odniesienie do fizyki układów grawitacyjnych, w szczególności do procesu tzw. scrambling w otoczeniu horyzontu czarnej dziury. Ciekawe w tym kontekście jest w szczególności, czy otrzymane wyrażenia na złożoność posiadają interpretację w języku geometrycznym.

Rozprawę podsumowuje Rozdział 7 w którym mgr Patramanis stara się wyekstrahować najistotniejsze obserwacje wynikające z przeprowadzonych rozważań. Zarysowane zostają również kolejne możliwe kroki związane z rozszerzeniem przeprowadzonych badań.

Reasumując, praca stanowi spójny ciąg rozumowania, zgodny z metodologią pracy naukowej. Analiza pracy dostarcza przekonania o wnikliwym zrozumieniu przez mgr Dimitriosą Patramanisa zagadnienia złożoności kwantowej Krylova. Przedstawione wyniki, wzmacniają relację pomiędzy złożonością Krylova a klasyczną definicją chaosu deterministycznego, poprzez wykładniki Lapunova. Z przedstawionych wyników wyłania się również nowe wsparcie dla hipotezy o związku pomiędzy złożonością kwantową a objętością (w przestrzeni fazowej). Przedstawione wyniki nie stanowią zamkniętego rozdziału, lecz stanowią bogate źródło motywacji do eksploracji dalszych własności wyłaniających się z poczynionych obserwacji.

Dysertacja została przygotowana w oparciu o cztery publikacje, opublikowane w renomowanych czasopismach fizycznych. Na uwagę zasługuje publikacja [2] która jest pracą jednoautorską. Na podstawie bazy INSPIRE HEP, publikacje stanowiące wkład do dysertacji były cytowane: [1] - 186, [2] - 52, [3] - 21 oraz [4] - 36, co łącznie daje 295 cytowań. Te pokazane liczby cytowań, jak na prace teoretyczne, wskazują na bardzo dobre i szybkie przyjęcie otrzymanych rezultatów przez społeczność naukową.

Warto dodać, że oprócz czterech publikacji, stanowiących wkład do dysertacji, mgr Dimitrios jest również współautorem publikacji:

- J. de Boer, R. Espíndola, B. Najian, D. Patramanis, J. van der Heijden and C. Zukowski, “Virasoro entanglement Berry phases,” JHEP **03** (2022), 179,

cytowanej 15 razy, na podstawie bazy INSPIRE HEP. Łącznie z tą publikacją, prace mgr Dimitriosą, według bazy INSPIRE HEP, cytowane są 310 razy. Jest to znakomity wynik, jak na ten etap kariery naukowej.

Część z moich uwag do pracy zawarłem w powyższej dyskusji. Do dalszych komentarzy, jakie nasuwają się po zapoznaniu treścią pracy, można zaliczyć:

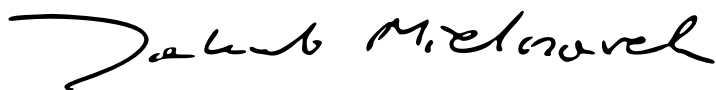
- Brak systematycznego porównania otrzymanych złożoności operatorów i stanów ze znanymi w literaturze wynikami, np. dla stanów koherentnych.

- Brak systematycznej analizy związków geometrycznych. Analiza ta ogranicza się do publikacji [1]. Warto byłoby ją rozszerzyć na przypadki układów analizowanych w artykułach [2,3,4].
- Ciekawe byłoby skomentowanie różnicy we własnościach złożoności Kryłowa dla układów klasycznie całkowalnych i niecałkowalnych.
- Jaki jest związek otrzymanych współczynników Lapunova z własnościami chaotycznymi klasycznych odpowiedników analizowanych układów fizycznych? Czy zachowana jest odpowiedniość co do wartości/znaków klasycznych wykładników Lapunova? Ciekawe jest w szczególności to, że klasyczne układy z symetrią $SL(2, \mathbb{R})$ są całkowalne i nie wykazują zachowań chaotycznych, wbrew zaprezentowanym wynikom kwantowym. Dla przypadków $SU(2)$ oraz algebry Weyla-Heisenberg, którym odpowiadają 2-wymiarowe przestrzenie fazowe, otrzymano już spójny z klasycznym wynik, nie wskazujący na obecność dodatnich wykładników Lapunova. Jakie jest źródło tej różnicy?
- W pracy zabrakło mi również dyskusji skal czasowych, związanych ze wzrostem złożoności. Czy dla dyskutowanych układów z dodatnimi (maksymalnymi $\lambda_L = 2\pi/\beta$) współczynnikami Lapunova, czas tzw. scramblingu ($\sim$ skala czasowa wzrostu złożoności) skaluje się jak $\frac{\beta}{2\pi} \ln S$, gdzie S jest entropią? Takie zachowanie byłoby interesujące m.in. z punktu widzenia scramblingu na horyzoncie czarnej dziury.

Powyższe uwagi nie mają charakteru istotnych zastrzeżeń wobec treści dysertacji, lecz stanowią zachętę do pogłębionej eksploracji zagadnień poruszonych w pracy. Nie wpływają one na ogólną bardzo wysoką ocenę pracy, zarówno pod względem koncepcyjnym, jak i staranności i dojrzałości przeprowadzonej analizy, oraz celowości zastosowanych i rozwiniętych metod.

Podsumowując, z pełnym przekonaniem, stwierdzam, że praca Pana mgr Dimitriosa Patramanisa pt. "Complexity, holography and geometry" spełnia warunki określone w Art. 186 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r - Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz.U. 2018 poz. 1668) i wnioskuję o przejście do kolejnego etapu procedury związanej z przyznaniem Panu mgr Dimitriosowi Patramanisowi stopnia doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie nauki fizyczne.

Z poważaniem,



dr hab. Jakub Mielczarek, prof. UJ
Instytut Fizyki Teoretycznej
Uniwersytet Jagielloński