

Abstract

This PhD thesis presents a comprehensive review and a significant extension of the classical Marsden–Meyer–Weinstein reduction theorem to manifolds endowed with different geometric structures. Moreover, results are also applied to some relevant physical systems. In particular, this dissertation presents the k -polysymplectic Marsden–Meyer–Weinstein reduction theory by removing unnecessary technical assumptions, such as coadjoint equivariance of momentum maps, via a theory of affine Lie group actions, while correcting some misconceptions in the previous literature. The geometry of fibred k -polysymplectic manifolds is studied in depth, leading to a new k -polycosymplectic reduction theory, which is applied to systems with field symmetries, including coupled vibrating strings. A geometric reduction from k -cosymplectic to ℓ -cosymplectic structures is also developed and applied to vibrating membranes, giving one of the few geometric reduction theories of space-time variables in the literature. A Marsden–Meyer–Weinstein reduction for k -contact manifolds is also developed, and existing contact reduction results are revisited and clarified by solving some problems in the previous literature.

This dissertation develops new geometric methods for the analysis of non-autonomous Hamiltonian systems with symmetries, focusing on stability, reduction, and generalisations of classical energy-momentum techniques. A new cosymplectic energy-momentum method is formulated, providing a more general framework for analysing time-dependent Hamilton equations. Cosymplectic geometry enables the treatment of broader classes of Lie symmetries like Hamiltonian, gradient, and evolution vector fields. This also gives rise to the definition of new types of relative equilibria, such as gradient relative equilibria. These methods are applied to study physical systems like the restricted circular three-body problem. A cosymplectic-to-symplectic reduction method is introduced, extending results of C. Albert, and eigenfunctions of time-dependent Schrödinger equations are interpreted as relative equilibria in a cosymplectic setting.

Finally, a k -polysymplectic energy-momentum method is constructed, along with new stability analysis techniques for Hamiltonian systems on k -polysymplectic manifolds. Applications include integrable systems, polynomial dynamical systems, and quantum oscillators with dissipation.

Keywords:

symplectic geometry, Marsden–Meyer–Weinstein reduction, cosymplectic geometry, contact geometry, k -symplectic geometry, k -cosymplectic geometry, momentum maps, energy-momentum methods, Lyapunov stability, relative equilibrium points, Lie systems.

Streszczenie

Niniejsza rozprawa doktorska stanowi całościowy przegląd oraz istotne uogólnienie w zakresie klasycznego twierdzenia redukcji Marsdena–Meyera–Weinsteina. W szczególności, praca przedstawia teorię k -wielosymplektycznej redukcji Marsdena–Meyera–Weinsteina poprzez usunięcie zbędnych założeń technicznych, takich jak niezmienniczość odwzorowania momentu względem działania dołączonego, przy wykorzystaniu afinicznych działań grup Liego. Szczegółowo analizuje geometrię rozwłóknionych rozmaitości k -wielosymplektycznych, co prowadzi do nowej teorii redukcji k -wielokosymplektycznej, stosowanej następnie do układów z symetriami polowymi, w tym sprzężonych drgających strun. Opracowano również geometryczną redukcję struktur k -kosymplektycznych do ℓ -kosymplektycznych i zastosowano ją do analizy drgających membran. Rozwinięto także redukcję Marsdena–Meyera–Weinsteina dla struktur k -kontaktowych oraz poddano rewizji i uściśleniu istniejące wyniki dotyczące kontaktowej redukcji Marsdena–Meyera–Weinsteina.

W rozprawie rozwinięto również nowe metody geometryczne służące analizie nieautonomicznych układów hamiltonowskich z symetriami Liego, koncentrując się na problematyce stabilności, redukcji oraz uogólnieniach klasycznych metod energii-pędu. Sformułowano nową metodę energii-pędu w kontekście geometrii kosymplektycznej, co pozwala na analizę równań Hamiltona z czasowo zależnymi funkcjami Hamiltona w bardziej ogólnych ramach. Geometria kosymplektyczna umożliwia uwzględnienie szerszych klas symetrii Liego — w tym wektorów Hamiltonowskich, gradientowych i ewolucyjnych a także definicję nowych typów punktów równowagi względnej, takich jak równowagi względne gradientowe. Zastosowano te konstrukcje do badania układów takich jak ograniczony kołowy problem trzech ciał. Wprowadzono również metodę redukcji kosymplektycznej-symplektycznej oraz zinterpretowano funkcje własne równań Schrödingera zależnych od czasu jako punkty równowagi względnej w kontekście geometrii kosymplektycznej.

Ostatecznie, skonstruowano metodę energii-pędu dla geometrii k -wielosymplektycznej oraz opracowano nowe techniki analizy stabilności dla układów hamiltonowskich zdefiniowanych na rozmaitościach k -wielosymplektycznych. Pokazano również przykłady zastosowań k -wielosymplektycznej metody energii-pędu, obejmujące układy całkowne, układy dynamiczne opisywane przez wielomiany oraz oscylatory kwantowe z dysypacją.

Słowa kluczowe

geometria symplektyczna, redukcja Marsdena–Meyera–Weinsteina, geometria kosymplektyczna, geometria kontaktowa, geometria k -symplektyczna, geometria k -kosymplektyczna, odwzorowania momentu, metody energii-pędu, stabilność Lyapunova, punkt względnej równowagi, system Liego.