



Poznań, 20 kwietnia 2026 r.

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Bartosza M. Zawory**  
**„Marsden–Meyer–Weinstein Reduction Theories and their Applications to Energy-  
Momentum Methods”**

Przedstawiona do recenzji rozprawa doktorska mgr. Bartosza M. Zawory została przygotowana w Katedrze Metod Matematycznych na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego pod kierunkiem promotora dr. hab. Javiera de Lucas Araujo, prof. UW, oraz kopromotora dr. hab. Xaviera Rivas z Uniwersytetu Rovira i Virgili. Rozprawa ma formę monografii naukowej napisanej w języku angielskim i liczy 199 stron. Jej układ jest typowy dla rozprawy doktorskiej przygotowanej w formie monograficznej. Praca opiera się na cyklu czterech obszernych artykułów opublikowanych w prestiżowych międzynarodowych czasopiśmiech oraz jednym preprintie:

- J. de Lucas, B.M. Zawora, “A time-dependent energy-momentum method”, *Journal of Geometry and Physics* **170**, 104364 (2021) 21 p.
- J. de Lucas, X. Rivas, S. Vilarinho, B.M. Zawora, “On  $k$ -polysymplectic Marsden–Weinstein reductions”, *Journal of Geometry and Physics* **191**, 104899 (2023) 36 p.
- J. de Lucas, A. Maskalaniec, B.M. Zawora, “Cosymplectic geometry, reductions, and energy-momentum methods with applications”, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics* **31**, 64 (2024) 58 p.
- L. Colombo, J. de Lucas, X. Rivas and B.M. Zawora, “An energy-momentum method for ordinary differential equations with an underlying  $k$ -polysymplectic manifold”, *Journal of Nonlinear Science* **35**, 42 (2025) 54 p.
- J. de Lucas, X. Rivas, S. Vilarinho, B.M. Zawora, “Marsden–Meyer–Weinstein reduction for  $k$ -contact field theories”, preprint: arXiv:2503.03463 (2025) 50 p.

Przedłożona rozprawa doktorska stanowi opracowanie z zakresu mechaniki geometrycznej i geometrii różniczkowej, poświęcone uogólnieniu teorii redukcji Marsdena–Meyera–Weinsteina oraz jej zastosowaniom w metodach energii-pędu i analizie stabilności nieautonomicznych układów Hamiltonowskich z symetriami Liego. Rozprawa ma klarowną i logiczną strukturę. Składa się z trzech głównych rozdziałów, uzupełnionych o wstęp oraz podsumowanie.

We wstępie doktorant szczegółowo przedstawia motywację podjętych badań, wprowadza czytelnika w ogólną tematykę rozprawy oraz osadza własne wyniki w kontekście dotychczasowej literatury przedmiotu i szerszej perspektywy badań naukowych. Przedstawione zostały również cele naukowe rozprawy oraz ich związek z publikacjami stanowiącymi podstawę pracy. Całość zamykają „Conclusions”, syntetyzujące osiągnięcia rozprawy oraz omawiające dalsze perspektywy badawcze, a także bogata literatura obejmująca 152 pozycje.

Rozdział pierwszy, zatytułowany „Fundamentals”, ma charakter wprowadzający. Przedstawiono w nim niezbędny aparat matematyczny i pojęciowy wykorzystywany w dalszych częściach rozprawy. Obejmuje on m.in. ogólną teorię stabilności Lapunowa dla nieautonomicznych układów na gładkich rozmaitościach, podstawy geometrii symplektycznej i kosymplektycznej oraz rozszerzenie tych formalizmów na struktury geometryczne  $k$ -polisymplektyczne,  $k$ -polikosymplektyczne i  $k$ -kontaktowe. Obok definicji i twierdzeń wraz z dowodami rozdział pierwszy, podobnie jak pozostałe dwa rozdziały, zawiera również liczne przykłady dobrze ilustrujące sens wprowadzanych konstrukcji. Całość cechuje bardzo wysoki rygor matematyczny, konsekwentnie utrzymany w całej rozprawie.

Kompozycja pracy prowadzi konsekwentnie od podstaw matematycznych, przez rozwinięcie teorii redukcji, do zastosowań i analizy stabilności. Nowe i oryginalne wyniki naukowe doktoranta, powiązane z wyżej wymienionymi publikacjami, są zawarte w drugim i trzecim rozdziale.

Rozdział drugi, „Marsden–Meyer–Weinstein reduction theorems”, stanowi najważniejszą część rozprawy i poświęcony jest systematycznemu rozszerzeniu klasycznej redukcji Marsdena–Meyera–Weinsteina na szereg wymienionych wyżej struktur geometrycznych. Autor nie tylko formułuje i dowodzi nowe twierdzenia redukcyjne, lecz także krytycznie analizuje istniejącą literaturę, wskazując i korygując błędy oraz eliminując zbędne założenia techniczne, w szczególności te związane z niezmienniczością odwzorowań momentu. Jest to możliwe dzięki wprowadzeniu afinicznych działań grup Liego oraz uogólnieniu pojęcia odwzorowania momentu. Na szczególne podkreślenie zasługuje umiejętne powiązanie teorii z przykładami i zastosowaniami, takimi jak redukcja modeli dwóch sprzężonych drgających strun, drgającej membrany czy wybranych układów kwantowych. Przykłady te jasno pokazują, że uzyskane wyniki mają realną wartość poznawczą i aplikacyjną. Szczególnie cenne jest to, że nie pełnią one jedynie funkcji ilustracyjnej, lecz uzasadniają potrzebę wprowadzanych uogólnień i pokazują, że zaproponowane przez doktoranta narzędzia pozwalają analizować klasy układów, których nie dało się w satysfakcjonujący sposób opisać przy użyciu wcześniej dostępnych wersji teorii redukcji. Wyniki przedstawione w tym rozdziale mają bardzo obszerny i techniczny charakter, co świadczy o wyjątkowo dużej biegłości autora w posługiwaniu się zaawansowanym aparatem matematycznym.

W rozdziale trzecim, „Energy-momentum methods”, autor stosuje opracowane wcześniej narzędzia redukcyjne do analizy stabilności nieautonomicznych układów metodami energii-pędu. Rozdział ten stanowi istotne uzupełnienie wcześniejszej części teoretycznej. Przedstawione wyniki znacząco rozszerzają klasyczne podejście oparte na geometrii symplektycznej: wprowadzają nowe metody energii-pędu, nowe pojęcia punktów równowagi względnej, w tym równowag gradientowych oraz nowe kryteria stabilności. W rozdziale tym doktorant nie tylko rozwija nowe metody teoretyczne, lecz także stosuje je do konkretnych modeli z fizyki matematycznej, takich jak ograniczony kołowy problem trzech ciał, modele kwantowe z dyssypacją oraz układy afiniczne Liego. Zastosowania te potwierdzają skuteczność zaproponowanych metod oraz ich szeroki zakres stosowalności, prowadząc do konkretnych wniosków dotyczących stabilności i struktury rozwiązań. Wysoko należy ocenić fakt, że rozważania aplikacyjne są ściśle powiązane z aparatem geometrycznym rozwiniętym w poprzednich rozdziałach, co nadaje pracy spójny charakter i jednoznacznie potwierdza jej bardzo wysoki poziom naukowy oraz wkład w rozwój metod geometrycznej analizy stabilności.

Przedłożona rozprawa doktorska stanowi wartościowe i niezwykle dojrzałe opracowanie z zakresu mechaniki geometrycznej oraz podstaw matematycznych fizyki teoretycznej, które w istotny sposób poszerza aktualny stan wiedzy w dziedzinie teorii redukcji Marsdena–Meyera–Weinsteina oraz metod energii-pędu. Autor wykazał się nie tylko doskonałą znajomością nowoczesnych narzędzi geometrii różniczkowej i fizyki matematycznej, lecz także rzadko spotykaną umiejętnością twórczego i krytycznego rozwijania istniejących teorii. Na szczególne podkreślenie zasługują oryginalne uogólnienia twierdzeń redukcyjnych na nowe klasy struktur geometrycznych, konsekwentna korekta błędów obecnych w literaturze oraz umiejętne połączenie głębokich wyników teoretycznych z ich zastosowaniami do konkretnych modeli fizycznych.

Całość pracy charakteryzuje się wysokim poziomem merytorycznym, znakomitą spójnością logiczną i wyjątkowo dużą starannością redakcyjną. Ponadto doktorant wykazuje się w rozprawie bardzo dobrą znajomością literatury oraz wyraźną samodzielnością naukową. Rozprawa nie tylko w pełni spełnia, ale w mojej ocenie z dużą nadwyżką przewyższa standardowe wymagania stawiane pracom doktorskim w dyscyplinie nauk fizycznych. Przedstawione w niej wyniki są oryginalne, istotne naukowo i mają trwałą wartość dla dalszego rozwoju mechaniki geometrycznej oraz teorii nieautonomicznych układów dynamicznych. Powyższe jednoznacznie pokazuje, że **rozprawa doktorska prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną Kandydata w dyscyplinie nauki fizyczne**, w szczególności w zakresie fizyki matematycznej i teoretycznej.

Podsumowując, przedstawiona rozprawa doktorska **stanowi oryginalne rozwiązanie problemu badawczego**, jakim jest udowodnienie nowych twierdzeń redukcyjnych Marsdena–Meyera–Weinsteina oraz stworzenie nowych metod energii-pędu i zastosowanie ich do konkretnych modeli fizycznych. **Rozprawa ta potwierdza, że doktorant potrafi samodzielnie prowadzić badania naukowe, a zarazem posiada ogólną wiedzę teoretyczną w dyscyplinie nauki fizyczne.**

Jednoznacznie stwierdzam, że **rozprawa doktorska** pt. „Marsden–Meyer–Weinstein Reduction Theories and their Applications to Energy-Momentum Methods”, przedstawiona przez pana magistra Bartosza M. Zaworę, zawiera wszystkie istotne elementy i **w pełni spełnia wymogi rozpraw doktorskich określone w obowiązujących przepisach** (Ustawa PSWiN, art. 187), jak również zwyczajowe kryteria stawiane rozprawom doktorskim.

W związku z powyższym **wniosuję o dopuszczenie mgr. Bartosza M. Zawory do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie nauki fizyczne.**

Jednocześnie, ze względu na bardzo wysoki poziom merytoryczny i naukowy rozprawy doktorskiej, jej znaczący wkład teoretyczny, szerokie i przekonujące zastosowania oraz wysoką rangę uzyskanych wyników naukowych, **wnoszę o wyróżnienie rozprawy.**



dr hab. Błażej M. Szablikowski, prof. UAM

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu  
Wydział Fizyki i Astronomii  
Instytut Spintroniki i Informacji Kwantowej