

Dr hab. Marcin Radosław Piątek, prof. US
Instytut Fizyki,
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych,
Uniwersytet Szczeciński,
Wielkopolska 15, 71-451, Szczecin
marcin.piatek@usz.edu.pl

Szczecin, dnia 28 czerwca 2026 r.

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

1. Uwagi wstępne

Przedłożona do oceny rozprawa doktorska mgr. **Pedrama Karimiego**, zatytułowana *Analytical and Algebraic Structures of Special Functions in Exactly Solvable Systems: A Tale of Two Functions*, została napisana w języku angielskim i liczy 133 strony. Praca ma charakter monografii opartej na dwóch opublikowanych artykułach współautorskich (z prof. Janem Derezińskim oraz dr. Adityą Bawane i prof. Piotrem Sułkowskim), uzupełnionych o nowe, niepublikowane wyniki.

Rozprawa składa się z dwóch rozdziałów merytorycznych, zakończenia (Conclusions) oraz dwóch dodatków matematycznych (Appendices A i B). Mimo oparcia na odrębnych publikacjach Autor nadał jej spójną formę monografii, integrując materiał wspólnym formalizmem i jednolitą perspektywą badawczą.

2. Charakterystyka problematyki badawczej

Rozprawa dotyczy struktur analitycznych i algebraicznych funkcji specjalnych w teorii układów całkowalnych. Punktem wyjścia jest rola funkcji specjalnych jako nośnika głębszych struktur w fizyce matematycznej. Praca obejmuje dwa główne obszary:

1. teorię spektralną jednowymiarowych operatorów Schrödingera z zespolonymi potencjałami, które są redukowalne do równania hipergeometrycznego;
2. β -deformowane modele macierzy losowych oraz problem supercałkowalności.

Oba nurty wykorzystują narzędzia analizy funkcjonalnej, teorii funkcji specjalnych oraz współczesnej algebry, w szczególności teorię wielomianów Jacka i operatorów Dunkla.

3. Oryginalność i cele pracy

Głównym celem rozprawy jest badanie struktur spektralnych operatorów Schrödingera i modeli macierzy losowych przy użyciu teorii funkcji specjalnych.

Oryginalność rozprawy polega na ujęciu różnych problemów fizyki matematycznej w ramach wspólnego formalizmu opartego na funkcjach specjalnych.

W przypadku operatorów Schrödingera istotne jest spójne ujęcie ich struktury spektralnej w języku funkcji hipergeometrycznych oraz analiza relacji transmutacyjnych (transmutation identities) pomiędzy różnymi reprezentacjami tych operatorów. W pracy wskazano, że formalizm ten umożliwia opis zależności pomiędzy parametryzacją operatorów a ich własnościami spektralnymi.

W części dotyczącej macierzy losowych nowość polega na reinterpretacji zjawiska supercałkowalności w języku operatorów Dunkla i wielomianów Jacka. Podejście to stanowi alternatywny opis klasycznych konstrukcji algebraicznych oraz umożliwia ich ujęcie w ramach jednolitego formalizmu operatorowego, w szczególności w kontekście uproszczenia standardowych metod opartych na więzach Virasoro.

4. Ocena merytoryczna i analiza wkładu naukowego

Praca zawiera istotny wkład w teorię operatorów Schrödingera oraz modele macierzy losowych, ujmując je w jednolitym formalizmie funkcji specjalnych. W części dotyczącej operatorów Schrödingera Autor przedstawia spójną klasyfikację jednowymiarowych operatorów redukowalnych do równania hipergeometrycznego oraz ich realizację w ramach teorii operatorów domkniętych w przestrzeniach Hilberta. Otrzymane wyniki stanowią znaczące rozszerzenie klasycznego ujęcia, w szczególności poprzez objęcie przypadków poza standardowym kontekstem samosprzężonym. Za istotne osiągnięcie należy uznać konstrukcję jawnych funkcji Greena oraz pełną charakterystykę warunków brzegowych determinujących jednoznaczność definicji operatorów.

Na szczególną uwagę zasługują wspomniane powyżej tożsamości transmutacyjne, które ujawniają nieoczywiste relacje pomiędzy parametrami spektralnymi a stałymi sprzężenia. Wyniki te mają charakter strukturalny i wykraczają poza standardowe własności znane z literatury. Uzupełniając Autor wprowadza interpretację spektralną opartą na zerach funkcji własnych (tzw. nodal quantization), co stanowi interesujące powiązanie analizy spektralnej z geometrią rozwiązań.

Druga część rozprawy dotycząca β -deformowanych modeli macierzy losowych również zawiera istotne rezultaty. Autor wykorzystuje formalizm wielomianów Jacka oraz operatorów Dunkla do opisu struktury korelatorów i supercałkowalności. Najważniejsze wyniki dotyczą β -deformacji całki Itzyksona-Zubera, obejmując jako przypadki szczególne wcześniej znane rezultaty, przy czym przedstawione podejście ma bardziej ogólny charakter i wynika z wewnętrznych symetrii modelu. W szczególności wykazanie struktury sfaktoryzowanej korelatorów znacząco upraszcza opis modeli i ich analizę.

Całość wyników ma charakter wyraźnie integrujący i prowadzi do spójnego powiązania teorii operatorów różniczkowych, funkcji specjalnych oraz modeli macierzy losowych. Najważniejszym osiągnięciem rozprawy jest wskazanie funkcji specjalnych jako wspólnej struktury organizującej różne obszary fizyki matematycznej, co nadaje uzyskanym wynikom wymiar koncepcyjny wykraczający poza pojedyncze klasy modeli.

5. Uwagi i pytania

Rozprawa opiera się na dwóch głównych częściach wywodzących się z odrębnych publikacji, co prowadzi do pewnej niejednorodności notacyjnej, sygnalizowanej przez Autora we wprowadzeniu. Uwaga ta ma charakter redakcyjny i nie wpływa na ocenę merytoryczną pracy.

W związku z przedstawionymi wynikami kieruję do Autora następujące pytania:

Pytanie 1. W jaki sposób uzyskane tożsamości transmutacyjne wpływają na interpretację dualizmu pomiędzy parametrami spektralnymi a stałymi sprzężenia? Czy dualizm ten ma charakter fizyczny, czy pozostaje strukturą matematyczną?

Pytanie 2. Czy formalizm operatorów Dunkla zastosowany do supercałkowalności może zostać uogólniony na inne układy korzeniowe (B, C, D)? Jeśli nie, to jakie zasadnicze trudności pojawiają się przy próbie takiego uogólnienia?

Pytanie 3. Czy uzyskane wyniki dotyczące operatorów Schrödingera można rozszerzyć na przypadek równań typu Heuna? Czy taki kierunek badań jest naturalnym rozwinięciem przedstawionej teorii?

6. Konkluzja

Podsumowując, stwierdzam, że przedłożona do recenzji rozprawa doktorska mgr. Pedrama Karimiego stanowi oryginalne rozwiązanie istotnego problemu naukowego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie nauki fizyczne. Przedstawione w niej wyniki świadczą o bardzo dobrym przygotowaniu teoretycznym Autora oraz potwierdzają jego umiejętność samodzielnego prowadzenia badań naukowych na wysokim poziomie w obszarze fizyki matematycznej.

Rozprawę oceniam bardzo wysoko zarówno pod względem merytorycznym, jak i formalnym, obejmującym spójność struktury, przejrzystość prezentacji oraz poprawność formalnego aparatu matematycznego. Uzyskane wyniki mają znaczną wartość naukową i stanowią istotny wkład w rozwój fizyki matematycznej, w szczególności teorii układów całkowalnych, funkcji specjalnych oraz teorii macierzy losowych.

W mojej ocenie rozprawa w pełni spełnia wymagania określone w art. 187 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz.U. z 2024 r. poz. 1571 ze zm.). W związku z powyższym wnoszę o dopuszczenie mgr. Pedrama Karimiego do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora w dyscyplinie nauki fizyczne.

Marcin Piątek