

Paweł Horodecki
Katedra Fizyki Teoretycznej i Informatyki Kwantowej
Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej
Politechnika Gdańska

Gdańsk, 04.12.2012

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Michała Oszmańca
pt. „Applications of Differential Geometry and Representation Theory to the
Description of Quantum Correlations”

Rozprawa doktorska mgr. Michała Oszmańca poświęcona jest matematycznemu opisowi korelacji kwantowych na gruncie teorii grup ze szczególnym uwzględnieniem teorii uogólnionych stanów koherentnych. Praca liczy 181 stron, jest opatrzona liczącą 152 pozycje bibliografią, 21 ilustracjami, 6 tabelami (wraz z tabelą wybranych oznaczeń używanych w tekście) oraz listą publikacji autora. Zasadniczą bazę rozprawy stanowią cztery publikacje, w trzy opublikowane wspólnie z promotorem profesorem Markiem Kusiem oraz jedna – wraz promotorem i doktorem Janem Guttem. Wszystkie prace ukazały się na łamach renomowanych czasopism międzynarodowych: trzy w Physical Review A - w tym dwie z nich w prestiżowym dziale Rapid Communications, a jedna - na łamach Journal of Physics A. Warto tu wspomnieć, że doktorant legitymuje się dodatkowo pięcioma innymi publikacjami badawczymi, w tym dwoma w Journal of Mathematical Physics. Oprócz materiału zawartego we wspomnianych czterech publikacjach rozprawa zawiera też pewne wyniki niepublikowane.

Na zasadniczą strukturę pracy składają się: rozdział pierwszy mający status wstępu, rozdział 2 poświęcony wprowadzeniu narzędzi matematycznych, cztery rozdziały (3-6) omawiające wyniki badawcze, rozdział 7 obejmujący podsumowanie, wnioski i – najciekawsze zdaniem autora – problemy otwarte. Pracę opatrzono dodatkiem, w którym zawarto dowody niektórych lematów. Pożyteczną regułą z punktu widzenia czytelnika jest zakończenie każdego z czterech rozdziałów badawczych osobnym podsumowaniem wraz z listą problemów otwartych zainspirowanych uzyskanymi wynikami. Celem rozprawy, może nie dość dobitnie wyartykułowanym na początku pracy, jest - jak wynika bezpośrednio z tytułu oraz treści wstępu – systematyczne zastosowanie metod teorii reprezentacji i geometrii różniczkowej do opisu kwantowych korelacji. Autor we wstępie wyjaśnia, że poprzez korelacje kwantowe rozumie się tutaj kwantowe splątanie w szerokim, tj. także bardziej formalnym sensie, jak to ma miejsce w przypadku cząstek nierozróżnialnych tj. bozonów i fermionów. Rozdział drugi stanowi skrócony przewodnik po najważniejszych pojęciach i faktach z zakresu geometrii różniczkowej i teorii reprezentacji algebr i grup Liego potrzebnych w dalszej części pracy. W rzeczy samej centralnym pojęciem pracy są uogólnione stany koherentne, które bazują na teorii reprezentacji. Mając daną pewną grupę symetrii K będącą grupą Liego oraz jej reprezentację na konkretnej przestrzeni Hilberta wraz z tzw. wektorem najwyższej wagi reprezentacji odpowiadającej grupie algebry Liego generuje się orbitę stanów czystych M poprzez działanie wszystkich elementów grupy na wspomniany wektor. Grupa K jest tak wybrana, aby jej reprezentacja odpowiadała symetrii stanów niesplątanych w sensie fizycznym np. w przypadku cząstek rozróżnialnych taką symetrię definiują iloczyny tensorowe dowolnych transformacji unitarnych. Otoczka wypukła M^c orbity stanów M czystych definiuje wszystkie stany niesplątane tj. separowalne. Zasadniczym problemem rozprawy jest identyfikacja kryteriów definiujących M z pomocą jednorodnych wielomianów oraz podanie kryteriów koniecznych lub, o ile to możliwe, koniecznych i

dostatecznych separowalności stanów mieszanych M^c .

W rozdziale trzecim przedstawiono całą serię wielomianowych opisów tego typu niesplątanych stanów czystych stanów. Charakteryzacje kwadratowe oparto tu na Twierdzeniu 3.2 wyprowadzonym w oparciu o rezultat Lichtensteina z 1982 roku i charakteryzującym wektory niesplątane poprzez znikanie wartości średniej różnicy pewnych projektorów w stanie będącym iloczynem dwóch kopii badanego wektora. Istotne jest tutaj, drugi z projektorów definiowany poprzez nieredukowalną komponentę iloczynowej reprezentacji grupy K stowarzyszoną z najwyższą możliwą wagą. Owa wartość średnia może być zwykle naturalnie interpretowana jako funkcja zgodności („concurrency”). Charakteryzacje powyższe podano dla przypadków stałej liczby cząstek (i) rozróżnialnych (ii) bozonów i (iii) fermionów na gruncie skończonych przestrzeni Hilberta oraz (iv) tzw. fermionowych stanów gaussowskich. Trzy pierwsze rezultaty uogólniono na przypadek wielomianów rzędu k oraz – mimo, co warto podkreślić, braku odpowiedniej grupy K – na przypadek nieskończonej przestrzeni Hilberta. Ponadto w rozdziale podano też charakteryzacje w oparciu o wielomiany wyższych rzędów dla stanów nie reprezentujących splątania właściwego oraz dla liczby Schmidta.

Rozdział 3 stanowi w pewnym sensie preludium dla rozdziału czwartego, w którym zaatakowano jeden z najbardziej intrygujących problemów teorii kwantowego splątania: w jakich przypadkach da się w pełni scharakteryzować splątanie stanów mieszanych? Splątanie to jest jednoznacznie charakteryzowane przez nieznikanie specyficznej funkcji zgodności stanowiącej rozszerzenie funkcji zgodności C ze stanów czystych na mieszane z pomocą minimum obliczanego po wypukłych rozkładach stanu mieszanego (tzw. „convex roof extension”). W ogólności analityczne obliczenie wielkości C dla dowolnych stanów mieszanych przy ustalonej przestrzeni Hilberta stanowi niezmiernie trudny problem. Jedynymi znanymi przypadkami gdy takie rozwiązanie analityczne zawsze istnieje – i być może jedynymi możliwymi – jest sytuacja kiedy działa konstrukcja Uhlmann-Woottersa, a skutecznie działa ona wtedy, gdy można zidentyfikować separowalne stany czyste za pomocą operacji antyunitarnej, tj. poprzez znikanie elementów „diagonalnych” (w nadzupelnym układzie stanów niesplątanych) tej operacji. Zachodzi zatem fundamentalne pytanie: kiedy separowalne stany czyste można identyfikować w ten sposób? W rozdziale czwartym rozprawy w ramach odpowiedzi podano dwa piękne twierdzenia (Twierdzenie 4.1 oraz 4.2). Twierdzenie pierwsze jednoznacznie wiąże odpowiedź twierdzącą z istnieniem bardzo specyficznego rozkładu iloczynowej reprezentacji stowarzyszonej ze stanami separowalnymi półprostej, zwartej i spójnej grupy K na sumę reprezentacji najwyższej wagi i reprezentacji trywialnej. Twierdzenie drugie identyfikuje takie, komfortowe z punktu widzenia zastosowań, sytuacje poprzez charakteryzację wszystkich grup K , które gwarantują taki rozkład jako epimorficznych z grupą $SO(N)$ lub – w bardzo odosobnionych przypadkach – z dwoma innymi grupami ($Spin(7)$ oraz E_2). Twierdzenie 4.2 inspirowane obserwacją z pracy profesorów Marka Kusia i Ingemara Bengtssona [Phys. Rev. A **80**, 022319 (2009)] korzysta z klasycznych wyników matematyki. W rozdziale przedstawiono też zastosowanie rezultatu dla najprostszego interesującego przypadku fermionowego tj. 4-modowych stanów gaussowskich. Podano rozwiązanie otwartego problemu otwartego charakteryzacji takich stanów oraz wyjaśniono znaczenie rozwiązania dla teorii zasobów na gruncie tzw. liniowej optyki fermionowej wprowadzonej 12 lat temu przez B. Terhal i D. Di Vincenzo. Wyznaczona wartość progowa szumu poza którą następuje utrata gaussowskiego charakteru stanów pomocniczych („ancilli”) decyduje o tym, w którym momencie (z powodu istnienia wielomianowej symulacji klasycznej) znikają szanse na kwantowo-obliczeniową moc badanego układu. W omówieniu wyniku dla fermionowych stanów gaussowskich brakowało mi

czytelnej ilustracji, szczególnie w kontekście Twierdzenia 4.2, dlaczego nie może on mieć miejsca dla większej liczby modów niż $d=4$. Warto tu podkreślić, że rozwiązany w pracy problem otwarty został postawiony w bardzo silnym ośrodku zagranicznym.

Rozdział 5 stanowi kontynuację badań z rozdziału 3, ale na gruncie stanów mieszanych. Podano tu szereg wartościowych wieloliniowych kryteriów splątania dla stanów mieszanych, które gwarantują splątanie wszystkich stanów w iloczynie tensorowym generującym daną funkcję wieloliniową. Z każdą taką funkcją wieloliniową stowarzyszona jest mierzalna obserwacja. Jako bardzo praktyczną i pożyteczną z eksperymentalnego punktu widzenia należy potraktować charakteryzację optymalnych obserwacji stowarzyszonych z biliniowymi testami splątania dla czterech paradygmatycznych przypadków badanych wcześniej w rozdziale 3. Wykazano tu, że obserwacje takie tworzą stożki i podano ich zbiory generujące. Można odnieść wrażenie, że wynik ma szansę nadać nowy impuls problematyce wieloliniowych świadków splątania stanów mieszanych, która osiągnęła już stopień pewnego wysycenia. W przyszłości warto byłoby dokonać analizy szansy na eksperymentalną ilustrację wspomnianych rezultatów.

W rozdziale 6 zbadano konkretny problem dotyczący częstości występowania stanów mieszanych. Mając dany zbiór (orbitę) rodzin stanów mieszanych o ustalonym spektrum, postawiono pytanie o miarę podzbioru stanów splątanych tej orbity. Korzystając ze współczesnego twierdzenia o koncentracji miary na rozmaitościach Riemanna, podano dolne ograniczenie na „ilość” stanów splątanych na danej orbicie w szeregu przypadków jako funkcji wartości znormalizowanego biliniowego świadka splątania. Rezultaty stanowią nowy, ciekawy element w nurcie badań nad ilością stanów splątanych, który do tej pory koncentrował się często na zagadnieniach związanych z objętością zbioru stanów separowanych lub na własnościach stanów czystych.

Rozprawa kończy się podsumowaniem, w którym autor dokonuje przeglądu wyników oraz podaje najciekawsze jego zdaniem problemy otwarte pośród których na szczególną uwagę wydają się zasługiwać (i) problem wielomianowej charakteryzacji stanów kwantowo-optycznych (ii) możliwe związki między kwantowym twierdzeniem de Finettiego, a charakteryzacją orbit stanów niesplątanych za pomocą wielomianów jednorodnych (iii) ogólny problem charakteryzacji mieszanych stanów splątanych, być może także – dodajmy tu – w przypadku fiaska konstrukcji Uhlmanna-Woottersa (iv) rozwinięcie ogólnej teorii zasobów na gruncie fermionowej optyki liniowej lub teorii topologicznego kwantowego komputera.

Pod względem merytorycznym rozprawę mgr. Michała Oszmańca oceniam wysoko. Praca zawiera szereg bardzo wartościowych rezultatów. Jestem przekonany, że wyniki dotyczące istnienia odpowiedniej operacji antyunitarnej wraz z analitycznym rozwiązaniem problemu separowalności stanów mieszanych, rezultat klasyfikujący 4-modowe fermionowe stany gaussowskie, charakteryzacja świadków wieloliniowych za pomocą tworzących stożka oraz szacowanie ilości stanów splątanych z pomocą metod koncentracji miary na trwałe zagoszczą na łamach literatury przedmiotu. W szczególności rezultaty dotyczące konstrukcji Uhlmanna-Woottersa mogą mieć długofalowe znaczenie dla całej dziedziny kwantowych korelacji stanów mieszanych.

Niezależnie od powyższych wyników rozprawa oferuje odbiorcy pewien systematyczny obraz problematyki – teorię splątania widzianą poprzez perspektywę uogólnionych stanów koherentnych na gruncie teorii reprezentacji, co samo w sobie może stanowić źródło inspiracji dla innych badaczy w przyszłości, a już teraz można powiedzieć, że perspektywa ta świetnie zdała egzamin także na grząskim gruncie korelacji cząstek nierozróżnialnych, gdzie tradycyjne podejścia mogą prowadzić do rozmaitych kontrowersji.

Zanim przejdę do oceny ogólnej rozprawy, padnie jeszcze kilka uwag. Jakkolwiek mamy do czynienia z pracą o sporej objętości, nie należy czynić z tego zarzutu ze względu na wielość przedstawionych wyników. Praca ma wręcz szansę do pewnego stopnia pełnić rolę swoistego kompendium w odniesieniu do proponowanej na jej kartach perspektywy badawczej. Natomiast w moim odczuciu w tekście brakuje kilku prostych - przypuszczalnie można by je pomieścić na dwóch, trzech stronach - przykładów rachunkowych, choćby dotyczących tego jak działają optymalne formy wieloliniowe z rozdziału 6 na iloczynnie dwóch różnych stanów mieszanych, albo – jak procentowo sytuuje się ograniczenie dolne miary mieszanych stanów splątanych na wybranej orbicie. Można było rozważyć uwzględnienie jakiegoś odniesienia do rezultatów pracy [P. Badziąg, C. Brukner, W. Laskowski, T. Paterek, and M. Żukowski, Phys. Rev. Lett. **100**, 140403 (2008)] odwołującej się do intuicji geometrycznych.

W paru - nielicznych - miejscach można było używane pojęcia przedstawić nieco jaśniej. Dla przykładu - zapis formuły (2.88) można uznać za zbyt skrótowy. Dla czytelnika niezaznajomionego z tematyką reprezentacji algebr bezpośrednie i jawne powiązanie z formułą (2.77) byłoby pomocne. Podobnie w rozdziale 2.4.2 podano definicję półprostej algebry Liego, ale (obecne w późniejszych twierdzeniach) pojęcie półprostej grupy Liego się nie tu pojawia. Wydaje się też, że czasem zdarzają się w tekście fragmenty nacechowane w warstwie narracyjnej pewną pośpiesznością, choć może to być subiektywne wrażenie recenzenta. W pracy występuje spora liczba drobnych błędów typograficznych, których zasadniczo nie będziemy tu przywoływać. W tekście o rozmiarach omawianej dysertacji obecność usterek jest czymś naturalnym, choć byłoby lepiej, gdyby przynajmniej części z nich udało się uniknąć (*vide* usterki w zapisie Faktu 2.23 lub systematycznie powtarzający się w tekście błąd w nazwisku autora pracy [110]).

Powyższe uwagi krytyczne, szczególnie w zestawieniu z otrzymanymi wynikami nie mają większego znaczenia dla całościowej oceny rozprawy. Warto podkreślić, że, ogólnie rzecz biorąc, dysertacja została napisana w sposób przemyślany i logiczny. Rysunki, w tym świetny schemat poglądowy 1.3, odznaczają się zwięzłością i czytelnością. Wysoko należy ocenić poziom naukowego rzemiosła, jakim mimo młodego wieku dysponuje mgr Michał Oszmaniec. Swobodnie posługuje się on niełatwymi narzędziami matematycznymi, potrafiąc, kiedy to potrzebne, przystępnie przybliżyć istotę zagadnienia w sposób nieformalny. Liczne proponowane w rozprawie problemy otwarte bazujące na uzyskanych wynikach świadczą o dużej ciekawości badawczej autora (co zresztą bardzo dobrze wróży jego dalszej karierze naukowej). Wszystko to sprawia, że czytelnik może lekturę rozprawy, mimo niełatwego charakteru podejmowanych zagadnień, zaliczyć do doświadczeń poznawczo twórczych i inspirujących.

W podsumowaniu pragnę stwierdzić, że przedstawiona przez magistra Michała Oszmańca rozprawa dysertacja w stopniu ponadprzeciętnym spełnia wymogi stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie jej autora do dalszych etapów przewodu doktorskiego, a w przypadku jego pozytywnego zakończenia – o wyróżnienie pracy.

Ryszard Jędrzejewski

Prof. dr hab. Paweł Horodecki
Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej
Politechnika Gdańska

Gdańsk, 04.12.2014

Prof. dr hab. Teresa Rząca-Urban
Dziekan Wydziału Fizyki
Uniwersytetu Warszawskiego
ul. Pasteura 5
02-093 Warszawa

Szanowna Pani Dziekan,

W załączeniu przesyłam oryginał recenzji rozprawy doktorskiej mgr. Michała Oszmańca.

Z wyrazami szacunku,

