

**Recenzja rozprawy doktorskiej autorstwa
mgr Małgorzaty Jakimowicz-Bazyluk
zatytułowanej
„Rozwiązania równań Einsteina
w czasoprzestrzeniach o wymiarze większym niż 4”**

Tematem Rozprawy jest poszukiwanie ścisłych rozwiązań równań Einsteina dla czasoprzestrzeni o wymiarze wyższym niż 4. Uogólnienie teorii Einsteina na wyżej wymiarowe czasoprzestrzenie rozważane jest od lat 20ch ubiegłego stulecia. Motywacją dostarcza nadzieja na unifikację wszystkich oddziaływań poprzez czystą geometrię. Teoria miała kilka okresów wzmożonej aktywności: teorii Kaluzy-Kleina w 5ciu wymiarach zawierające 4 wymiarową teorię Einsteina-Maxwella, następnie uogólnienie do teorii Einsteina-Yanga-Millsa, później supergrawitacja, aż wreszcie teoria strun. Od kilkunastu lat inspiracji dla uprawiania teorii grawitacji w $d > 4$ wymiarach oraz wielu nowych pomysłów dostarcza teoria bran. Ponieważ wielowymiarowa czasoprzestrzeń staje się scenarią dla strun i bran, pojawia się potrzeba znajomości podstawowych rozwiązań wielowymiarowych równań Einsteina, które będą pełnić podobną rolę do rozwiązania Schwarzschilda czy Robertsona-Walkera w 4ch wymiarach. Warszawska KTWiG, w której wykonane zostały badania przedstawione w Rozprawie, ma wieloletnią tradycję w rozwijaniu metod znajdowania rozwiązań równań Einsteina w 4ch wymiarach, a promotor profesor Jacek Tafel jest jednym z najwybitniejszych światowych ekspertów w tej dziedzinie. Punktem wyjścia dla badań pani Jakimowicz było 4 wymiarowe twierdzenie Birkhoff'a, mówiące, że jedyne sferycznie symetryczne rozwiązania próżniowych równań Einsteina to parametryzowana masą (ujemną lub dodatnią) rodzina rozwiązań Schwarzschilda. Twierdzenie to można uogólniać do D wymiarowej czasoprzestrzeni na dwa sposoby. Pierwszy, to założenie grupy symetrii $SO(D-1)$. Wówczas konkluzja jest podobna do czterech wymiarów, dostajemy 1-parametrową rodzinę rozwiązań Tangheliniego. W Rozprawie przyjęto drugi sposób uogólnienia twierdzenia Birkhoffa, a mianowicie przez uniezależnienie wymiaru grupy symetrii $SO(n+1)$ od wymiaru czasoprzestrzeni $D=N+n+1$. To uogólnienie jest ciekawsze, prowadzące do znacznie bogatszej rodziny rozwiązań nie zbadanej jeszcze do końca. Jedynym, dobrze znanym mi z literatury przypadkiem jest $D=5$ oraz $n=2$. Wówczas rodzina metryk jest 2-wymiarowa i została ona znaleziona przez Gross'a i Perry'ego.

Pierwszym wynikiem doktorantki było dokonanie redukcji równań Einsteina dla przypadku D wymiarowej czasoprzestrzeni z grupa symetrii $SO(n+1)$. D wymiarowe próżniowe równania Einsteina sprowadzone zostały do równań Einsteina na przestrzeni orbit z polem skalarnym (promień orbity grupy

symetrii) o odpowiednim potencjale jako polem materii. Z pewnością niektórzy inni autorzy dokonali podobnej redukcji, jednak doktorantka uzyskała ten wynik niezależnie, samodzielnie, swoją własną oryginalną metodą i w swoich współrzędnych.

Drugim wynikiem Rozprawy jest podanie konstrukcji dużej klasy rozwiązań wspomnianych powyżej zredukowanych równań Einsteina. Każde z $N+n+1$ wymiarowych rozwiązań utworzone jest z pewnej N wymiarowej metryki, zdefiniowanego na niej bezśladowego, symetrycznego tensora oraz z dwóch funkcje zdefiniowanej na pewnej 1- wymiarowej przestrzeni także wyposażonej w tensor metryczny. Metryka N -wymiarowa i tensor muszą spełniać pewne sprzęgające je równania, podobnie dwie funkcje i metryka 1-wymiarowa. Sprzęgające równania nie zostały rozwiązane w ogólności, wynik ma więc charakter warunkowy. Otworzył jednak drzwi do dalszych badań zarówno doktorantki jak i potencjalnie innych kontynuatorów.

Trzecim dużym wynikiem jest zastosowanie opisanej powyżej konstrukcji i znalezienie przy jej pomocy rodziny rozwiązań będących uogólnieniem metryk Gross'a-Perry'ego. Uogólnienie polega na tym, że otrzymane czasoprzestrzenie mają symetrię $SO(n+1)$ i wymiar $D=n+3$ przy czym podklasa $n=2$ zawiera wszystkie rozwiązania Gross'a-Perry'ego. W Rozprawie szczegółowo zbadane zostały własności rozwiązań. Znalezione dodatkowe symetrie ciągłe. W większości przypadków były to dwa pola Killinga. Zbadano własności globalne czasoprzestrzeni, czyli asymptotykę, osobliwości układu współrzędnych oraz prawdziwe osobliwości czasoprzestrzeni. W ostatnim przypadku znaleziono punkty, w których tensor Riemann staje się osobliwy. Należy je interpretować jako źródła pola grawitacyjnego. Ustalono, w których przypadkach rodzina obserwatorów odpowiadająca czasowemu polu Killinga obraca się, a w których nie. Obracanie lub jego brak należy łączyć z obracaniem się lub nieobracaniem źródeł. Znalezione $n+3$ wymiarowe rozwiązania równań próżniowych można interpretować jako $n+2$ wymiarowe rozwiązania równań Einsteina-Maxwella z polem skalarnym. Zbadano własności otrzymanego w wyniku tej interpretacji pola elektromagnetycznego. We wszystkich przypadkach zbadano także typ algebraiczny tensora Weyla.

W Rozprawie znaleziono również szereg innych przykładów rozwiązań otrzymanych przy zastosowaniu konstrukcji do przypadków $D=n+1+N$ wymiarów przy $N>2$. Szczegółowo zbadano ich własności według opisanego powyżej schematu. Wskazano na ich analogie do znanych z 4ch wymiarów rozwiązań odpowiednio Kasnera oraz Kundta. Liczę je jako czwarty duży wynik Rozprawy.

Piątym rezultatem jest zastosowanie transformacji Ehlers'a-Maison'a do generacji nowych rozwiązań z rozwiązań Gross'a-Perry'ego. Rodzina rozwiązań równań Einsteina posiadających pole Killinga posiada symetrie odkryte przez Ehlersa. Działanie symetrii jest nielocalne i wykorzystuje własności globalne czasoprzestrzeni (wymaga rozwiązania pewnych równań różniczkowych). Symetrie Ehlers'a zostały uogólnione na wyżej wymiarowe równania Einsteina przez Maisona. Doktorantka zastosowała symetrie Ehlers'a-Maison'a do metryk Gross'a-Perry'ego i zbadała otrzymane w ten sposób inne rozwiązania.

Opisane powyżej rezultaty 1-4 zostały uzyskane przez doktorantkę pracującą pod opieką promotora. Są one opublikowane w dwóch pracach autorstwa mgr Jakimowicz i prof. Tafla. Rezultat 5ty był wynikiem współpracy mgr Jakimowicz, prof. Tafla oraz dr hab. Adama Szereszewskiego. Został opublikowany wspólnie przez tę trójkę, przy czym pierwszym autorem jest dr hab. Szereszewski.

Podsumowując, doktorantka

- (a) opracowała nową zaawansowaną metodę konstrukcji rozwiązań równań Einsteina w $n+1+N$ wymiarach posiadających grupę symetrii $SO(n+1)$
- (b) przy jej pomocy znalazła szereg nowych, wcześniej nie znany w literaturze rozwiązań
- (c) zastosowała symetrię Ehlersa-Maisona do wygenerowania nowych rozwiązań z rozwiązań Gross'a-Perry'ego.

Praca jest napisana bardzo dobrze i ciekawie. Układ pracy jest logiczny, obliczenia są zaprezentowane wyczerpująco, a wyniki zostały zanalizowane bardzo szczegółowo. W zasadzie nie mam uwag krytycznych, z wyjątkiem jednego ogólnego komentarza oraz technicznego drobiazgu.

Ponieważ praca dostarcza wielu przykładów nowych rozwiązań równań Einsteina przydałoby się na końcu ich czytelne zestawienie w postaci inteligentnie zaprojektowanej tabelki, albo przynajmniej szczegółowego końcowego podsumowania. Jeśli autorskie podsumowanie wyników pracy zawiera się na połowie strony, to ile z tej pracy miałby wynieść mniej zaangażowany w ten temat czytelnik?

Wzór (2.4) jest ogólnie prawdziwy jeśli do założenia symetrii $SO(n+1)$ dodać warunek $n>1$. Bowiem dla grupy $SO(2)$ w ogólności pojawiłyby się jeszcze dodatkowe składowe metryki odpowiadające potencjałowi pola Maxwella. Nie

mogłem dopatrzyć się w Rozprawie tego założenia, ale oczywiście wystarczy je dopisać, jeśli rzeczywiście go brakuje.

Rozprawa zawiera ogromną ilość wartościowego materiału, z pewnością spełnia wymogi stawiane przed rozprawą doktorską. Wnioskuje o dopuszczenie jej do obrony.

A handwritten signature in black ink, consisting of a stylized, cursive 'J' followed by 'Lewandowski'.

Jerzy Lewandowski