

Profesor dr hab. Edward Malec

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki

Instytut Fizyki Teoretycznej

Wydział Astronomii, Fizyki i Informatyki Stosowanej

Uniwersytet Jagielloński

Kraków, 27 sierpnia 2020.

Ocena rozprawy

Nierówność Penrose'a dla zaburzonych danych początkowych Schwarzschilda

Pana magistra Jarosława Kopińskiego

w związku z postępowaniem o nadanie stopnia doktora.

Roger Penrose zaproponował niemal pół wieku temu nierówność, której przypisano później jego nazwisko, dla przetestowania hipotezy cenzury kosmicznej. Nierówność wiąże ze sobą masę czasoprzestrzeni i pole powierzchni tak zwanego horyzontu pozornego. Masa czasoprzestrzeni jest całkowitą, dla czasoprzestrzeni asymptotycznie płaskich; można ją wyznaczyć na hiperpowierzchni danych początkowych. Horyzont pozorny jest obiektem, który definiuje się na hiperpowierzchni stałego czasu. Zatem nierówność Penrose'a można badać na ustalonej hiperpowierzchni stałego czasu, w tym na trójwymiarowej przestrzeni danych początkowych (hiperpowierzchni Cauchy'ego). Jej słuszność dowiedziono w pewnych szczególnych sytuacjach – przy założeniu sferycznej symetrii, w tak zwanym przypadku riemannowskim, a także dla specjalnych klas danych początkowych (różne warianty danych początkowych Bowena-Yorka). Pojawiły się też inne propozycje, wzmiankowane zresztą przez Autora ocenianej rozprawy doktorskiej, dowodu nierówności Penrose'a. Są one skądinąd nieudane, moim zdaniem. Schemat oparty na równaniu Janga nie pozwala na potwierdzenie słuszności nierówności Penrose'a nawet w przypadku sferycznej symetrii (patrz analiza przeprowadzona przez niżej podpisanego wraz z N. O'Murchadha w 2004 r. w *Classical and Quantum Gravity*). Propozycja oparta na równaniach spinorowych Wittena również nie doprowadziła do postępu. Mamy zatem problem, ważny – poprzez związek z hipotezą cenzury kosmicznej - dla podstawowego rozumienia ogólnej teorii względności, który opiera się próbom rozstrzygnięcia przez prawie pół wieku. Każda próba jego wyjaśnienia jest ważna i cenna, tym bardziej, że już wiadomo, że warunkiem nawet umiarkowanego postępu jest użycie narzędzi matematycznych na bardzo wysokim poziomie.

Rozprawa Pana magistra Jarosława Kopińskiego analizuje nierówność Penrose'a w czasoprzestrzeniach otrzymanych poprzez zaburzenia czasoprzestrzeni Schwarzschilda. Ściślej: definiuje on pewne klasy zaburzonych danych początkowych geometrii Schwarzschilda i pokazuje słuszność klasycznej wersji nierówności Penrose'a i jej pewnego uogólnienia. Praca doktorska składa się z pięciu rozdziałów i sześciu dodatków. Zasadnicze

rezultaty są zawarte w rozdziałach trzecim i czwartym. Wstęp przynosi krótkie uzasadnienie i historię nierówności Penrose'a, wraz z charakterystyką najważniejszych prób jej dowodu. Zakończenie podsumowuje otrzymane wyniki i zarysowuje dalsze kierunki badań.

Rozdział drugi jest bardzo kompetentnym omówieniem sposobu zadawania danych początkowych dla równań Einsteina. Autor omówił pokrótce metodę konforemną, zapoczątkowaną przez Lichnerowicza a rozwijaną zwłaszcza przez J. Yorka i N. O'Murchadha. Zdefiniował on także wielkości zachowane dla układów izolowanych – energię, masę, pęd i moment pędu. Dodatki A-F dotyczą albo kwestii pobocznych, albo szczegółowych wyników analitycznych. Są one ważne dla zrozumienia kwestii poruszanych w rozprawie, ale Autor słusznie zdecydował, że nie powinny one zaburzać głównej linii rozumowania.

Rozdział trzeci traktuje o zaburzeniach danych początkowych geometrii Schwarzschilda przy założeniu, że ślad krzywizny zewnętrznej znika, czyli w tak zwanym cechowaniu maksymalnym (dla maksymalnych danych początkowych, ze znikającym śladem krzywizny zewnętrznej). Wynik dotyczący małych, osiowo symetrycznych, zaburzeń – dowód nierówności oznaczonej w rozprawie numerem (3.42), przy niezerowym pędzie – nie jest zaskoczeniem. Dowód jest zgrabny, dowodzi sprawności technicznej doktoranta, ale sam wynik jest oczekiwany.

Zaskakujący jest natomiast rezultat dotyczący nierówności Penrose'a w przypadku z niezerowym momentem pędu; Autor używa nazwy *uogólniona nierówność Penrose'a*. Nie jest oczywiste, że moment pędu czasoprzestrzeni zawierającej czarną dziurę musi być ograniczony przez kwadrat jej masy. Czasoprzestrzeń może mieć skończoną masę, przy dowolnie dużym momencie pędu. Przypuszczam, że można znaleźć – raczej numerycznie aniżeli analitycznie - przykłady próżniowych geometrii zawierających czarne dziury, które niosą nieskończony moment pędu, przy skończonej masie.

Istotną nowością w pracy Pana Magistra Kopińskiego jest użyta definicja podklasy zaburzeń geometrii Schwarzschilda, która najwyraźniej gwarantuje małość momentu pędu. Używam tutaj trybu warunkowego, bowiem rzecz wymaga zbadania. Drugie z założeń Twierdzenia 1 stanowi, że „czynniki konforemny (rozwiązanie równania Lichnerowicza z konforemnie płaską metryką hiperpowierzchni danych początkowych – EM) może być rozwinięty w szereg potęgowy względem parametru $\mathcal{E}$, proporcjonalnego do skali tensora A_{ij} .” Sądzę, że właśnie ten warunek, żądanie analityczności względem „siły” zaburzenia, wybiera sektor zaburzonych rozwiązań Schwarzschilda z małymi wartościami momentu pędu.

Nierówność oznaczona numerem (3.58), uogólniająca nierówność Penrose'a na przypadek czasoprzestrzeni z krętem - zaburzonych geometrii Schwarzschilda - jest dowiedziona w omawianej rozprawie doktorskiej w klasie krzywizn zewnętrznych Bowena-Yorka, przy założeniu metody konforemnej Yorka-O'Murchadha. Hiperpowierzchnia danych początkowych jest konforemnie płaska. Dodatkowo zakłada się stosowalność rachunku zaburzeń. Są to restrykcyjne warunki, które wcale nie muszą być konieczne dla konstrukcji danych początkowych spełniających więzy początkowe równań Einsteina. Pragnę tutaj podkreślić, że dowód przeprowadzony przez Pana Magistra Kopińskiego jest zgrabny i wygląda przekonująco, przy założonych ograniczeniach na dane początkowe.

Rozdział czwarty powtarza tok rozumowania z rozdziału trzeciego, ale tym razem dla zaburzeń danych początkowych geometrii Schwarzschilda, które nie są maksymalne, ale mają niezerowy

ślad średniej krzywizny. Najważniejsze wyniki podsumowane są w podrozdziale 4.3. Wprowadza się w Definicji 1 pojęcie „ogólnych danych początkowych”; ta nazwa jest akurat myląca, bowiem nie jest to wcale *ogólny zbiór danych początkowych*, lecz taki *podzbiór danych początkowych*, w którym można dowieść nierówność Penrose’a z członem zawierającym moment pędu. Samo sformułowanie stosownej wersji nierówności Penrose’a znajduje się w Twierdzeniu 2.

Rozprawa Pana Magistra Kopińskiego dotyczy pewnej podklasy małych zaburzeń geometrii Schwarzschilda i pewnej (konforemnej) metody rozwiązywania danych początkowych; nie mam żadnych wątpliwości co do poprawności otrzymanych wyników przy tych założeniach. Jest też prawdopodobne, że *uogólnione nierówności Penrose’a* są słuszne dla zwartych układów stacjonarnych zawierających czarne dziury. Łucja Dzidek zbadała w pracy magisterskiej (UJ, 2019) zwarte stacjonarne konfiguracje zawierające politropowy dysk rotujący wokół czarnej dziury. Sprawdziłem, że postulowane przez Pana Magistra Kopińskiego uogólnione nierówności, wykorzystujące wielkości globalne masy i krętu, są spełnione dla numerycznych rozwiązań uzyskanych przez Dzidek. Z drugiej jednak strony, te uogólnione nierówności są łamane w wersjach nierówności wykorzystujących masę kwazilokalną czarnej dziury. Oznacza to, że nie da się wykorzystać metod opartych na monotoniczności masy kwazilokalnej do dowodu *uogólnionych nierówności Penrose’a*, nawet dla podklasy zwartych układów stacjonarnych. Nie wierzę w prawdziwość „*uogólnionej nierówności Penrose’a*”, zawierającej moment pędu, dla generycznych czasoprzestrzeni.

Praca doktorska jest napisana w przejrzysty i czytelny sposób. Widać w sposobie prezentacji kulturę matematyczną i odczytanie jej Autora. Temat rozprawy doktorskiej jest trudny i ambitny, ale Autorowi udało się uzyskać wartościowe i niebanalne wyniki. Uważam, że przedstawiona rozprawa doktorska „*Nierówność Penrose’a dla zaburzonych danych początkowych Schwarzschilda*” spełnia wymogi konieczne do nadania Panu Magistrowi Jarosławowi Kopińskiemu stopnia naukowego doktora nauk fizycznych.

