

Nierówność Penrose'a dla zaburzonych danych początkowych Schwarzschilda

Jarosław Kopiński



Praca doktorska wykonana pod kierunkiem prof. dr. hab. Jacka Tafla

Katedra Teorii Względności i Grawitacji
Instytut Fizyki Teoretycznej
Wydział Fizyki
Uniwersytet Warszawski

Warszawa, 2020

Spis treści

1	Wstęp	3
2	Formalizm danych początkowych w ogólnej teorii względności	7
2.1	Foliacja czasoprzestrzeni	7
2.2	Relacje Gaussa, Codazziego i Ricciego	8
2.3	Rozkład ADM	10
2.4	Metoda konforemna generowania danych początkowych	12
2.5	Dane początkowe z zewnętrzną powierzchnią marginalnie zła-paną	14
2.6	Energia, masa i pęd ADM	15
3	Nierówność Penrose’a dla maksymalnych zaburzeń danych początkowych Schwarzschilda	18
3.1	Bezdywergencyjne bezśladowe tensory na płaskiej przestrzeni .	19
3.2	Nierówność wiążąca masę i pole powierzchni czarnej dziury . .	21
3.3	Nierówność Penrose’a z momentem pędu	27
3.4	Weryfikacja nierówności Penrose’a dla zaburzeń typu Bowena–Yorka	28
3.5	Numeryczna weryfikacja nierówności Penrose’a dla danych początkowych Bowena–Yorka	32
3.6	Podsumowanie	35
4	Nierówność Penrose’a dla zaburzeń danych początkowych Schwarzschilda ze zmienną średnią krzywizną	37
4.1	Konforemne sformułowanie równań więzów dla zaburzeń z dowolną średnią krzywizną	38
4.2	Osiowosymetryczne zaburzenia a nierówność Penrose’a	39
4.3	Podsumowanie	45
5	Zakończenie i wnioski	48

Dodatki

A	Regularności na osi i asymptotyczna płaskość danych początkowych	50
B	Własności wielomianów Legendre’a	52
C	Poprawki ψ_2 i ψ_3 do czynnika konforemnego dla uogólnionej krzywizny zewnętrznej Bowena–Yorka	54
D	Metoda elementu skończonego w zastosowaniu do eliptycznych równań różniczkowych	60
E	Test poprawności algorytmu numerycznego	64
F	Istnienie rozwiązania równania Lichnerowicza dla maksymalnych zaburzeń danych początkowych Schwarzschilda	66
	Bibliografia	68

Rozdział 1

Wstęp

Nierówność Penrose’a stanowi dolne ograniczenie masy M czarnej dziury przez pole powierzchni jej horyzontu zdarzeń $|S_h|$,

$$M \geq \sqrt{\frac{|S_h|}{16\pi}}, \quad (1.1)$$

i została zaproponowana w oparciu o szereg założeń dotyczących procesu tworzenia się i ewolucji tych obiektów [1]. Pośród nich znajduje się słaba hipoteza kosmicznej cenzury, według której każda osobliwość jest zamknięta w rejonie ograniczonym przez horyzont zdarzeń czarnej dziury, niezwiązanym przyczynowo z resztą czasoprzestrzeni. Pomimo wielu prób sformułowania kontrprzykładów [2], wciąż pozostaje ona jednym z otwartych i aktywnie badanych problemów matematycznej ogólnej teorii względności [3]. Jedną z pośrednich metod udowodnienia lub obalenia słabej hipotezy kosmicznej cenzury jest weryfikacja nierówności (1.1), ponieważ, według przewidywań, czasoprzestrzeń w której zależność ta nie będzie spełniona. Wykorzystując twierdzenia o osobliwościach, prawa termodynamiki czarnych dziur oraz założenie o końcowym stanie ewolucji każdego dynamicznego układu zawierającego czarną dziurę będącym rozwiązaniem Kerra można wywnioskować, że nierówność Penrose’a powinna być spełniona na hiperpowierzchni początkowej z horyzontem zdarzeń zastąpionym przez odpowiednią powierzchnię złąpaną [1].

Dolne ograniczenie masy w nierówności Penrose’a może być postrzegane jako naturalne wzmocnienie twierdzenia o jej dodatniości. Obserwacja ta stanowiła podstawę pierwszych prób weryfikacji (1.1). Wykorzystywały one techniki użyte z sukcesem w dowodzie wyżej wspomnianego twierdzenia. Wprowadzona przez Gerocha definicja kwazi-lokalnej masy i pokazanie jej monotonicznego charakteru względem potoku odwrotnej średniej krzywizny [4] zostały zidentyfikowane przez Janga i Walda jako właściwa droga do we-

ryfikacji nierówności Penrose’a [5]. Jednakże w ogólnym przypadku potok ten wykazuje osobiwy charakter, więc pełny dowód (1.1) wymagał formalnego potraktowania tej przeszkody. Zostało to dokonane w pracy Huiskena i Ilmanena [6], gdzie zostało przyjęte założenie o dodatniości krzywizny skalarnej rozmaitości. Udowodniona przez nich zależność obecnie nosi nazwę riemannowskiej nierówności Penrose’a. Alternatywny dowód (1.1) został przedstawiony przez Braya i opierał się na możliwości ciągłej deformacji zadanej metryki w metrykę schwarzschildowską [7]. Uogólniał on wynik przedstawiony przez Huiskena i Ilmanena na przypadek wielu czarnych dziur. Punktem wspólnym obu podejść było przyjęcie powierzchni minimalnych jako wewnętrzznego brzegu rozmaitości, co znacząco ogranicza zakres stosowalności riemannowskiej nierówności Penrose’a. Dowód (1.1) w ogólnym przypadku powinien rozszerzyć klasę dozwolonego charakteru wewnętrznego brzegu i dopuszczać powierzchnie złapane jako obiekty reprezentujące czarne dziury, co dotychczas udało się otrzymać jedynie w przypadku sferycznie symetrycznych danych początkowych [8, 9].

Obecnie istnieje kilka metod które mogą doprowadzić do dowodu nierówności Penrose’a. Wśród nich można wymienić między innymi wykorzystanie uogólnionego równania Janga [10] lub rachunek spinorowy w ogólnej teorii względności. Pierwsza z nich stanowi próbę zaadaptowania dowodu twierdzenia o dodatniości masy Schoena i Yau [11] i opiera się na próbie identyfikacji dowolnej hiperpowierzchni początkowej z cięciem statycznej czasoprzestrzeni. Nierówność Penrose’a jest wtedy spełniona poprzez porównanie masy i pola powierzchni reprezentującej horyzont zdarzeń badanych danych początkowymi z tymi samymi wielkościami związanymi z hiperpowierzchnią ze znikającą krzywizną zewnętrzną [12]. Jest to jednak możliwe tylko wtedy, gdy istnieje rozwiązanie układu równań różniczkowych określającego funkcję skalarną definiującą zanurzenie oraz część metryki otaczającej czasoprzestrzeni, czego dowód nie został jeszcze przedstawiony.

Historia sukcesu podejścia wykorzystującego rachunek spinorowy rozpoczęła się od dowodu dodatniości masy Wittena [13]. Bazował on na istnieniu rozwiązania równania Diraca na hiperpowierzchni początkowej. Przy założeniu odpowiedniego warunku energetycznego możliwe było do pokazania, że dla dowolnej asymptotycznej wartości rozwiązania tego równania masa hiperpowierzchni jest zawsze dodatnia. Kolejne prace rozszerzyły to podejście na przypadek czarnych dziur (wewnętrznego brzegu będącego powierzchnią marginalnie złapaną), zarówno dla masy ADM jak i Bondiego [14, 15]. Wymagało to uzupełnienia przestrzennego równania Diraca o odpowiedni warunek brzegowy, co okazało się złożonym zagadnieniem. W jednym z podejść do tego problemu w przypadku riemannowskiej wersji zależności (1.1) Herzlich otrzymał nierówność wiążącą ze sobą masę ADM oraz pole powierzchni

minimalnej [16]. Jednakże ze względu na to, że współczynnik występujący w tym związku zawierał trudną do oszacowania w ogólnym przypadku stałą typu Sobolewa, wynik ten może być traktowany jedynie jako uogólnienie nierówności Penrose’a.

Przestrzenne równanie Diraca jest równaniem pierwszego rzędu, więc dopuszcza ograniczoną klasę dozwolonych warunków brzegowych. Aby uzyskać większą swobodę w wyborze zachowania się badanego spinora na wewnętrznym brzegu należy więc rozważać równania wyższych rzędów. Jednym z podejść do tego zagadnienia jest otrzymywanie ich przy pomocy złożenia operatorów pierwszego rzędu z ich sprzężeniem. Tego typu próby zostały przeprowadzone z sukcesem przez Bäckdahl’a i Valiente Kroona w przypadku przybliżonych równań twistorowych w kontekście dowodu dodatniości masy [17].

Nierówność Penrose’a może być wzmocniona w przypadku osiowosymetrycznych danych początkowych. Wtedy moment pędu J jest dobrze zdefiniowany i

$$M^2 \geq \frac{|S_h|}{16\pi} + \frac{4\pi J^2}{|S_h|}, \quad (1.2)$$

gdzie równość zachodzi dla hiperpowierzchni czasoprzestrzeni Kerra. Spośród podejść do dowodu tej zależności można wymienić prace Anglady [18, 19], gdzie podobnie jak w przypadku riemannowskiej wersji (1.1) został wykorzystany potok odwrotnej średniej krzywizny. Pozwoliło to na weryfikację alternatywnej wersji (1.2), z polem powierzchni $|S_h|$ występującym w członie zawierającym moment pędu zastąpionym przez odpowiednią miarę wielkości wewnętrznego brzegu.

Opisane powyżej metody dowodzenia nierówności Penrose’a wraz z jej wzmocnioną wersją stanowią jedynie część istniejących strategii potwierdzenia lub obalenia tego związku. Spośród innych podejść warto wspomnieć o pracach Malca, Marsa i Simona [20] oraz Malca i Roszkowskiego [21], które wykorzystują monotoniczność kwazi-lokalnej masy Gerocha dla ogólnych horyzontów, kosztem wprowadzenia dodatkowych ograniczeń na dane początkowe. Szersza dyskusja zagadnień podjętych w tym rozdziale znajduje się w artykule przeglądowym Marsa [22].

Niniejsza praca doktorska jest poświęcona weryfikacji nierówności Penrose’a oraz jej wzmocnionej wersji w kontekście podejścia konforemnego do generowania danych początkowych w ogólnej teorii względności [23, 24]. Zarówno (1.1), jak i (1.2) są wysycane w czasoprzestrzeni Schwarzschilda, dlatego jej zaburzenia są naturalną konfiguracją która pozwala zweryfikować te związki. Zostanie to dokonane przy wykorzystaniu rozwiązania równania Lichnerowicza oraz więzu pędowego w postaci poprawek do czynnika kon-

foremnego oraz konforemnej krzywizny zewnętrznej związanych z hiperpowierzchnią początkową tej rozmaitości. Odpowiedni warunek brzegowy zagwarantuje istnienie powierzchni marginalnie złapanej (reprezentującej horyzont zdarzeń czarnej dziury) po transformacji konforemnej.

Struktura pracy przedstawia się w następujący sposób. Rozdział 2 zawiera wstęp teoretyczny do zagadnień związanych z danymi początkowymi ogólnej teorii względności oraz konforemnej metody ich generowania. Szczególny nacisk zostanie położony na dane zawierające wewnętrzny brzeg będący powierzchnią marginalnie złapaną. W rozdziale 3 i 4 przedstawione zostaną wyniki dotyczące weryfikacji nierówności Penrose’a z momentem pędu dla osiowosymetrycznych zaburzeń danych początkowych Schwarzschilda ze sferycznych horyzontem. Zarówno w przypadku maksymalnym, jak i dopuszczającym dowolną średnią krzywiznę jest ona spełniona w wiodącym rzędzie dla szerokiej klasy zaburzeń. Ponadto, jeśli ślad krzywizny zewnętrznej znika, to możliwa jest pełna analiza i weryfikacja nierówności również w wyższych rzędach rozwinięcia. Dla uogólnionej krzywizny Bowena–Yorka podejście analityczne zostało zweryfikowane przez obliczenia numeryczne, pozwalające na oszacowanie różnicy pomiędzy masą, polem powierzchni i momentem pędu dla rzeczywistych rozwiązań równań więzów. Rozdział 5 stanowi podsumowanie pracy.

W pracy przyjęta jest konwencja sumacyjna Einsteina a jednostki wybrane są w taki sposób aby $c = G = 1$. Sygnatura czasoprzestrzeni to $(-, +, +, +)$. Greckie litery będą oznaczać wskaźniki czasoprzestrzenne, natomiast łacińskie przestrzenne.

Rozdział 2

Formalizm danych początkowych w ogólnej teorii względności

Metryka $\tilde{g}^{(4)}$ czterowymiarowej rozmaitości pseudoriemannowskiej $\mathcal{M}^{(4)}$ spełnia próżniowe równania Einsteina ze znikającą stałą kosmologiczną jeśli

$$\tilde{R}_{\mu\nu}^{(4)} = \frac{1}{2}\tilde{R}^{(4)}\tilde{g}_{\mu\nu}^{(4)}, \quad (2.1)$$

gdzie $\tilde{R}_{\mu\nu}^{(4)}$ jest tensorem Ricciego $\tilde{g}_{\mu\nu}^{(4)}$ a $\tilde{R}^{(4)}$ jego śladem. Koneksja Levi-Civita związana z metryką $\tilde{g}_{\mu\nu}^{(4)}$ to $\tilde{\nabla}_\mu$. Celem tego rozdziału jest przeformułowanie (2.1) do postaci w której jawnie widoczne będą więzy narzucone na geometrię określonej przestrzennej trójwymiarowej hiperpowierzchni zanurzonej w $\mathcal{M}^{(4)}$ oraz równania określające jej ewolucję w otaczającej rozmaitości.

2.1 Foliacja czasoprzestrzeni

Niech $\mathcal{M}^{(4)}$ dopuszcza foliację jednoparametrową rodziną hiperpowierzchni Cauchy'ego Σ_t , generowaną przez pole skalarne t . Norma gradientu $\tilde{\nabla}^\mu t$ określa funkcję lapsu α ,

$$\tilde{g}^{(4)}(\tilde{\nabla}t, \tilde{\nabla}t) = -\frac{1}{\alpha^2}. \quad (2.2)$$

Jednostkowy wektor normalny do Σ_t to N^μ . Metryka indukowana na liściach foliacji (pierwsza forma fundamentalna) jest określona w następujący sposób,

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu}^{(4)} + N_\mu N_\nu \quad (2.3)$$

i jest z nią związany operator rzutu prostopadłego na Σ_t ,

$$\tilde{g}_\mu{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu + N_\mu N^\nu. \quad (2.4)$$

Aby w pełni scharakteryzować geometrię hiperpowierzchni Σ_t zanurzonych w $\mathcal{M}^{(4)}$ należy także określić w jaki sposób zmienia się $\tilde{g}_{\mu\nu}$ wraz z przejściem $\Sigma_t \rightarrow \Sigma_{t+\delta t}$. Krzywizna zewnętrzna (druga forma fundamentalna) Σ_t jest zdefiniowana jako pochodna Liego metryki indukowanej względem potoku pola wektorowego N^μ ,

$$\tilde{K}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_N \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

co jest równoważne z

$$\tilde{K}_{\mu\nu} = \tilde{g}_\mu{}^\alpha \tilde{\nabla}_\alpha N_\nu. \quad (2.6)$$

Korzystając z własności $\tilde{\nabla}_\mu$ można pokazać, że $N^\mu N^\nu \tilde{K}_{\mu\nu} = 0$, więc druga forma fundamentalna jest przestrzennym tensorem. Z definicji (2.5) w bezpośredni sposób wynika również jej symetria ze względu na zamianę wskaźników $\tilde{K}_{\mu\nu} = \tilde{K}_{\nu\mu}$.

Operator rzutu prostopadłego na Σ_t pozwala również na zdefiniowanie pochodnej Levi-Civity $\tilde{D}_\mu$ indukowanej na tych hiperpowierzchniach. Niech ω_μ będzie polem jednoform spełniających $\omega_\mu N^\mu = 0$. Wtedy

$$\tilde{D}_\mu \omega_\nu = \tilde{g}_\mu{}^\alpha \tilde{g}_\nu{}^\beta \tilde{\nabla}_\alpha \omega_\beta. \quad (2.7)$$

jest przestrzennym tensorem. Tak zdefiniowana pochodna $\tilde{D}_\mu$ jest zgodna z $\tilde{g}_{\mu\nu}$, $\tilde{D}_\mu \tilde{g}_{\alpha\beta} = 0$. Wprowadzone powyżej wielkości zostaną wykorzystane w rozkładzie równania (2.1), indukowanym przez operator rzutu prostopadłego na Σ_t .

2.2 Relacje Gaussa, Codazziego i Ricciego

Rozkład równań Einsteina jest oparty na zależnościach pomiędzy odpowiednimi rzutami czterowymiarowego tensora Riemanna $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(4)}$ i jego trójwymiarowego odpowiednika $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, związanego z koneksją $\tilde{D}_\mu$.

Dla dowolnego przestrzennego pola jednoform ω_μ jest spełniona następująca relacja,

$$\tilde{D}_\mu \tilde{D}_\nu \omega_\alpha - \tilde{D}_\nu \tilde{D}_\mu \omega_\alpha = \tilde{R}_{\mu\nu\alpha}{}^\beta \omega_\beta, \quad (2.8)$$

która jest definicją krzywizny związanej z koneksją za pomocą komutatora pochodnych kowariantnych. Równanie (2.8) można przedstawić w inny sposób, korzystając z następującego związku pomiędzy $\tilde{D}_\mu$ a $\tilde{\nabla}_\mu$,

$$\tilde{D}_\mu \tilde{D}_\nu \omega_\alpha = \tilde{g}_\mu{}^\beta \tilde{g}_\nu{}^\gamma \tilde{g}_\alpha{}^\delta \tilde{\nabla}_\beta \tilde{\nabla}_\gamma \omega_\delta + \tilde{K}_{\mu\nu} \tilde{g}_\alpha{}^\delta N^\beta \tilde{\nabla}_\beta \omega_\alpha + \tilde{K}_{\mu\alpha} \tilde{g}_\nu{}^\gamma N^\beta \tilde{\nabla}_\beta \omega_\gamma. \quad (2.9)$$

Po wstawieniu (2.9) do (2.8), wykorzystaniu symetrii krzywizny zewnętrznej $\tilde{K}_{\mu\nu}$ oraz faktu, że ω_μ jest dowolnym polem przestrzennych jednoform można otrzymać relację Gaussa,

$$\tilde{g}_\mu{}^\gamma \tilde{g}_\nu{}^\delta \tilde{g}_\alpha{}^\epsilon \tilde{g}_\zeta{}^\beta \tilde{R}_{\gamma\delta\epsilon}^{(4)\zeta} - \tilde{K}_{\mu\alpha} \tilde{K}_\nu{}^\beta + \tilde{K}_{\nu\alpha} \tilde{K}_\mu{}^\beta = \tilde{R}_{\mu\nu\alpha}{}^\beta. \quad (2.10)$$

Wyraża ona związek pomiędzy całkowitym rzutem czterowymiarowego tensora krzywizny Riemanna $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(4)}$ i jego przestrzennym odpowiednikiem $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ oraz krzywizną zewnętrzną $\tilde{K}_{\mu\nu}$.

Kolejna zależność wynika z własności przestrzennej pochodnej kowariantnej oraz definicji $\tilde{K}_{\mu\nu}$ (2.6). Dla $A_\mu = N^\alpha \tilde{\nabla}_\alpha N_\mu$ mamy

$$\tilde{D}_\alpha \tilde{K}_{\mu\nu} = \tilde{g}_\alpha{}^\beta \tilde{g}_\mu{}^\gamma \tilde{g}_\nu{}^\delta \tilde{\nabla}_\beta \tilde{\nabla}_\gamma N_\delta + A_\nu \tilde{K}_{\alpha\mu}, \quad (2.11)$$

skąd w oczywisty sposób można otrzymać relację Codazziego,

$$\tilde{D}_\alpha \tilde{K}_{\mu\nu} - \tilde{D}_\mu \tilde{K}_{\alpha\nu} = \tilde{g}_\alpha{}^\beta \tilde{g}_\mu{}^\gamma \tilde{g}_\nu{}^\delta \tilde{R}_{\beta\gamma\delta\epsilon}^{(4)} N^\epsilon, \quad (2.12)$$

w której występuje częściowy rzut czasoprzestrzennego tensora krzywizny Riemanna zwężony z wektorem normalnym foliacji N^μ . Relacje (2.10) oraz (2.12) posłużą do określenia więzów narzuconych na geometrię liści foliacji Σ_t . Aby otrzymać równania determinujące ich ewolucję należy wprowadzić dodatkową zależność.

Działanie pochodnej Liego na tensor $\tilde{K}_{\mu\nu}$ wzdłuż pola wektorowego N^μ to

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N \tilde{K}_{\mu\nu} &= N^\alpha N^\beta \tilde{R}_{\alpha\mu\nu\beta}^{(4)} + \tilde{\nabla}_\mu A_\nu + N_\mu N^\beta \tilde{\nabla}_\beta A_\nu + \\ &+ A_\mu A_\nu + \tilde{K}_{\mu\gamma} \tilde{K}_\nu{}^\gamma + \tilde{K}_{\mu\delta} N_\nu A^\delta. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Związek A_μ z funkcją lapsu, $\tilde{D}_\mu A_\nu = -A_\mu A_\nu + \frac{1}{\alpha} \tilde{D}_\mu \tilde{D}_\nu \alpha$, oraz przestrzenny charakter lewej strony (2.13) prowadzi do relacji Ricciego,

$$\mathcal{L}_N \tilde{K}_{\mu\nu} = N^\alpha N^\beta \tilde{g}_\mu{}^\gamma \tilde{g}_\nu{}^\delta \tilde{R}_{\alpha\gamma\delta\beta}^{(4)} + \frac{1}{\alpha} \tilde{D}_\mu \tilde{D}_\nu \alpha + \tilde{K}_{\mu\gamma} \tilde{K}_\nu{}^\gamma, \quad (2.14)$$

która zawiera podwójne zwężenie $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(4)}$ z N^μ . Ze względu na symetrie tensora Riemanna wszystkie inne kombinacje $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(4)}$ związane z rzutami na Σ_t i iloczynami z wektorem normalnym dają się sprowadzić do (2.10), (2.12) oraz (2.14) lub znikają. Relacje te posłużą do przedstawienia ogólnej teorii względności w postaci formalizmu ADM [25].

2.3 Rozkład ADM

Pole skalarne t , generujące foliację czasoprzestrzeni $\mathcal{M}^{(4)}$, może być traktowane jako globalna funkcja czasu (jedna ze współrzędnych). W tym przypadku bazy przestrzeni stycznej i kostycznej $\mathcal{M}^{(4)}$ to $\{\partial_t, \partial_i\}$ i $\{dt, dx^i\}$, gdzie x^i są związane z Σ_t . Wektor ∂_t może być rozłożony na składową równoległą oraz prostopadłą do liści foliacji,

$$\partial_t = \alpha N + \beta^i \partial_i, \quad (2.15)$$

gdzie $\beta^i \partial_i$ to wektor shiftu. Korzystając z (2.15) można zapisać $\tilde{g}_{\mu\nu}^{(4)}$ we wprowadzonej bazie w następujący sposób,

$$\tilde{g}^{(4)} = -\alpha^2 dt^2 + \tilde{g}_{ij} (dx^i + \beta^i dt) (dx^j + \beta^j dt), \quad (2.16)$$

ze względu na to, że w wybranej bazie wszystkie przestrzenne tensory są w pełni określone przez swoje przestrzenne składowe.

Próżniowe równania Einsteina (2.1) nakładają dodatkowe ograniczenia na wielkości występujące w relacjach Gaussa, Codazziego i Ricciego przez uwzględnienie fizycznej zawartości teorii w czysto geometrycznych związkach.

Podwójne zwięźlenie wskaźników w (2.10) prowadzi do

$$\tilde{R}^{(4)} + 2N^\mu N^\mu \tilde{R}_{\mu\nu}^{(4)} = \tilde{R} + \tilde{H}^2 - \tilde{K}_{ij} \tilde{K}^{ij}, \quad (2.17)$$

gdzie $\tilde{H} = \tilde{K}_i^i$. Lewa strona (2.17) znika po wykorzystaniu (2.1),

$$0 = 2N^\mu N^\nu \left(\tilde{R}_{\mu\nu}^{(4)} - \frac{1}{2} \tilde{R}^{(4)} \tilde{g}_{\mu\nu} \right) = \tilde{R}^{(4)} + 2N^\mu N^\mu \tilde{R}_{\mu\nu}^{(4)}. \quad (2.18)$$

Relacja Gaussa wraz z próżniowymi równaniami Einsteina implikuje więc

$$\tilde{R} + \tilde{H}^2 - \tilde{K}_{ij} \tilde{K}^{ij} = 0. \quad (2.19)$$

Zależność ta jest nazywana więzem skalarnym (hamiltonowskim).

Po wykonaniu operacji częściowego śladu w (2.12) można otrzymać

$$\tilde{D}_i \tilde{K}_\mu^i - \tilde{D}_\mu \tilde{H} = \tilde{g}_\mu^\gamma \tilde{R}_{\gamma\epsilon}^{(4)} N^\epsilon. \quad (2.20)$$

Analogicznie jak w przypadku (2.17), próżniowe równanie Einsteina jest równoważne znikaniu wyrazu po prawej stronie powyższej równości,

$$0 = \tilde{g}_\mu^\gamma N^\epsilon \left(\tilde{R}_{\gamma\epsilon}^{(4)} - \frac{1}{2} \tilde{R}^{(4)} \tilde{g}_{\gamma\epsilon} \right) = \tilde{g}_\mu^\gamma N^\epsilon \tilde{R}_{\gamma\epsilon}^{(4)}. \quad (2.21)$$

Relacja Codazziego prowadzi więc do więzu wektorowego (pędowego),

$$\tilde{D}_i \tilde{K}_j{}^i - \tilde{D}_j \tilde{H} = 0. \quad (2.22)$$

Wraz z (2.19) ogranicza on dozwoloną geometrię pewnej hiperpowierzchni Σ w taki sposób, aby można było ją zanurzyć w czasoprzestrzeni spełniającej próżniowe równania Einsteina.

Aby dopełnić obrazu formalizmu danych początkowych należy jeszcze określić w jaki sposób formy fundamentalne Σ_t ewoluują wraz z potokiem generowanym przez pole skalarne t . W przypadku metryki indukowanej $\tilde{g}_{ij}$ można tego dokonać po zastosowaniu definicji (2.5) tensora krzywizny zewnętrznej, rozkładu (2.15) oraz własności pochodnej Liego. Wtedy

$$\mathcal{L}_{\partial_t} \tilde{g}_{ij} = 2\alpha \tilde{K}_{ij} + \mathcal{L}_{\beta^i \partial_i} \tilde{g}_{ij}. \quad (2.23)$$

Otrzymanie równania ewolucji $\tilde{K}_{ij}$ wymaga wykorzystania relacji Ricciego (2.14). Występujące w niej podwójne zwężenie tensora Riemanna $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(4)}$ z wektorem N^μ może być zapisane w następujący sposób,

$$\begin{aligned} N^\alpha N^\beta \tilde{g}_\mu{}^\gamma \tilde{g}_\nu{}^\delta \tilde{R}_{\alpha\gamma\delta\beta}^{(4)} &= \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{g}_\mu{}^\gamma \tilde{g}_\nu{}^\delta \tilde{R}_{\alpha\gamma\delta\beta}^{(4)} + \tilde{g}_\mu{}^\gamma \tilde{g}_\nu{}^\delta \tilde{R}_{\gamma\delta}^{(4)} = \\ &= -\tilde{R}_{\mu\nu} + \tilde{K}_{\nu i} \tilde{K}_\mu{}^i - \tilde{H} \tilde{K}_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

gdzie użyta została relacja Gaussa (2.10) oraz próżniowe równania Einsteina (2.1). Mamy więc

$$\mathcal{L}_{\partial_t} \tilde{K}_{ij} = \tilde{D}_i \tilde{D}_j \alpha + 2\alpha \tilde{K}_{ik} \tilde{K}_j{}^k - \alpha \tilde{R}_{ij} - \alpha \tilde{H} \tilde{K}_{ij} + \mathcal{L}_{\beta^k \partial_k} \tilde{K}_{ij}. \quad (2.25)$$

Równania (2.19), (2.22), (2.23) i (2.25) są równoważne (2.1). Dzięki nim w jawny sposób widać, że ogólna teoria względności należy do grupy teorii fizycznych dopuszczających sformułowanie w postaci zagadnienia Cauchy'ego. Rozwiązanie pełnych (próżniowych) równań Einsteina może być zastąpione przez zadanie odpowiednich form fundamentalnych na hiperpowierzchni Σ_t , a następnie zastosowanie równań ewolucji (2.23) i (2.25). Jednakże, skalar Ricciego związany z $\tilde{g}_{ij}$ występujący w (2.19) powoduje, że jest to nieliniowe cząstkowe równanie różniczkowe, sprzężone w nietrywialny sposób z (2.22). Kwestia zadania odpowiednich form fundamentalnych hiperpowierzchni jest więc złożonym zagadnieniem. Jedną ze strategii jest rozkład więzu hamiltonowskiego i pędowego przy założeniu, że pewne części metryki i krzywizny zewnętrznej są wolnymi parametrami. Uproszczone po tej operacji równania więzów określają wtedy pozostałe części tych tensorów. Procedura ta może być dokonana na wiele sposobów, niemniej ze względu na eliptyczny charakter wyjściowych równań preferowana jest metoda konforemna (Lichnerowicza). Otrzymany w ten sposób układ jest zbliżony do zagadnienia początkowego w elektrodynamice, gdzie więzy narzucone na równania Maxwella mają ten sam charakter.

2.4 Metoda konforemna generowania danych początkowych

Niech g_{ij} i K_{ij} będą pewnymi symetrycznymi tensorami określonymi na hiperpowierzchni początkowej Σ . Ideą stojącą za metodą konforemna jest wykorzystanie ich do otrzymania nowych form fundamentalnych spełniających (2.19) i (2.22), $\tilde{g}_{ij}$ i $\tilde{K}_{ij}$, przy wykorzystaniu transformacji konforemnej. Niech $\tilde{g}_{ij}$ będzie określone jako

$$\tilde{g}_{ij} = \psi^4 g_{ij}, \quad (2.26)$$

gdzie ψ jest funkcją skalarną (wartość potęgi w wykładniku ψ jest wybrana ze względu na prostotę kolejnych zależności). Skalar krzywizny $\tilde{R}$ związany z $\tilde{g}_{ij}$ może być wyrażony przez $R(g)$ w następujący sposób,

$$\tilde{R} = \frac{R}{\psi^4} - \frac{8}{\psi^5} \Delta \psi, \quad (2.27)$$

gdzie Δ jest operatorem Laplace'a metryki g_{ij} , $\tilde{R} = \tilde{g}^{ij} \tilde{R}_{ij}$ a $R = g^{ij} R_{ij}$. Wstawienie (2.27) do (2.19) prowadzi do eliptycznego równania różniczkowego określającego funkcję ψ ,

$$\Delta \psi = \frac{\psi}{8} R + \psi^5 \tilde{H}^2 - \psi^5 \tilde{K}_{ij} \tilde{K}^{ij}. \quad (2.28)$$

Podobnie jak $\tilde{g}_{ij}$, krzywizna zewnętrzna $\tilde{K}_{ij}$ również może być wyrażona przez swoją konforemną część $\tilde{K}_{ij}$ (spełniającą równania więzów). Zostanie to dokonane po rozkładzie tego tensora na ślad $\tilde{H}$ i część bezśladową $\tilde{A}_{ij}$,

$$\tilde{K}_{ij} = \tilde{A}_{ij} + \frac{1}{3} \tilde{H} \tilde{g}_{ij}. \quad (2.29)$$

$\tilde{A}_{ij}$ i $\tilde{H}$ mogą być wyrażone przez swoje odpowiedniki związane z K_{ij} przy użyciu czynnika konforemnego ψ ,

$$\tilde{A}^{ij} = \psi^x A^{ij}, \quad (2.30)$$

$$\tilde{H} = \psi^y H. \quad (2.31)$$

Wykładniki x i y będą określone jako następstwo wymogu o maksymalnym uproszczeniu więzu pędowego. Po wstawieniu rozkładu (2.29) oraz transformacji (2.30) i (2.31) do (2.22) otrzymujemy,

$$\frac{1}{\psi^{10}} D_i (\psi^{10+x} A^{ij}) - \frac{2}{3} \psi^{y-4} g^{ij} D_i H - \frac{2}{3} y \psi^{y-5} H g^{ij} D_i \psi = 0, \quad (2.32)$$

gdzie D_i jest koneksją Levi-Civity związaną z metryką g_{ij} . Naturalnym wyborem jest więc $x = -10$ oraz $y = 0$. Wtedy ślad $\tilde{H}$ staje się niezmiennikiem transformacji a $\tilde{A}_{ij} = \psi^{-2} A_{ij}$.

Równania więzów w podejściu konforemnym przyjmują więc następującą postać,

$$\Delta\psi = \frac{\psi}{8}R + \frac{1}{12}\psi^5 H^2 - \frac{1}{8\psi^7} A_{ij} A^{ij}, \quad (2.33)$$

$$D_i A_j{}^i = \frac{2}{3}\psi^6 D_j H. \quad (2.34)$$

gdzie pierwsze z nich nazywane jest równaniem Lichnerowicza [23]. Wolnymi parametrami stają się zatem g_{ij} oraz ślad $\tilde{K}_{ij}$, natomiast szukanymi funkcjami ψ i bezśladowa część konforemnej krzywizny zewnętrznej, A_{ij} . Formy fundamentalne $\tilde{g}_{ij}$ i $\tilde{K}_{ij}$ można otrzymać z rozwiązania układu (2.33) oraz (2.34) przy pomocy związków

$$\tilde{g}_{ij} = \psi^4 g_{ij}, \quad \tilde{K}_{ij} = \frac{1}{\psi^2} A_{ij} + \frac{\tilde{H}}{3} \tilde{g}_{ij}. \quad (2.35)$$

Dla maksymalnych danych ($H = \tilde{H} = 0$) równania więzów otrzymane przy wykorzystaniu metody konforemnej separują się. W tym przypadku po określeniu bezdywergencyjnego (względem g_{ij}) tensora A_{ij} należy rozwiązać następujące semiliniowe równanie Poissona,

$$\Delta\psi = \frac{\psi}{8}R - \frac{1}{8\psi^7} A_{ij} A^{ij}. \quad (2.36)$$

W przestrzeni euklidesowej rozwiązanie więzu pędowego (2.34) ze znikającą średnią krzywizną jest określone przez potencjały skalarne ([26, 27] dla dodatkowych założeń o symetrii tensora i [28] w ogólnym przypadku). Przy takim założeniu ($\Sigma \sim \mathbb{R}^3$) równanie (2.36) sprowadza się do

$$\Delta\psi = -\frac{1}{8\psi^7} A_{ij} A^{ij}, \quad (2.37)$$

gdzie Δ jest operatorem Laplace'a w płaskiej przestrzeni. Najprostsze nietrywialne rozwiązanie tego równania dla $A_{ij} = 0$ to

$$\psi_0 = \left(1 + \frac{h}{r}\right). \quad (2.38)$$

Ten czynnik konforemny odpowiada transformacji do danych początkowych czasoprzestrzeni Schwarzschilda. Po przejściu do współrzędnych izotropowych (r, θ, φ) jej metryka przyjmuje następującą postać,

$$\tilde{g}_{sch}^{(4)} = -\frac{\left(1 - \frac{h}{r}\right)^2}{\left(1 + \frac{h}{r}\right)^2} dt^2 + \left(1 + \frac{h}{r}\right)^4 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.39)$$

z horyzontem zdarzeń znajdującym się w $r = m/2$. Konforemnie płaskie dane początkowe z $\psi = \psi_0$ są więc związane z cięciem $t = \text{const}$ (2.39). W ogólności, występowanie powierzchni reprezentującej granicę czarnej dziury po transformacji (2.35) wymaga narzucenia odpowiedniego warunku brzegowego na funkcję ψ .

2.5 Dane początkowe z zewnętrzną powierzchnią marginalnie złapaną

Aby rozpatrywać dane początkowe ewoluujące w czasoprzestrzeń zawierającą czarne dziury potrzebny jest sposób identyfikacji tych obiektów na hiperpowierzchni Σ . Pojęcie horyzontu zdarzeń jest związane z globalną strukturą $\mathcal{M}^{(4)}$, więc nie może być wykorzystane w tym kontekście. Odpowiednią alternatywą są powierzchnie zewnętrznie złapane. Dane początkowe scharakteryzowane przez ich obecność ewoluują w czasoprzestrzeń zawierającą czarną dziurę [29]. Szczególną podklasą tych powierzchni są zewnętrzne powierzchnie marginalnie złapane, scharakteryzowane przez znikanie ekspansji wychodzących geodezyjnych zerowych θ_+ . Metoda konforemna generowania rozwiązań równań więzów pozwala na uwzględnienie tego warunku w naturalny sposób, dlatego poszukiwane będą dane początkowe z brzegiem S_h będącym taką powierzchnią. Niech

$$\theta_+ = \left(\tilde{H} - \tilde{K}_{ij} \tilde{n}^i \tilde{n}^j + 2\tilde{h} \right) \Big|_{S_h} = 0, \quad (2.40)$$

gdzie wektor $\tilde{n}^i$ jest ortogonalny do S_h i skierowany na zewnątrz, a $\tilde{h}$ to średnia krzywizna zewnętrzną S_h ,

$$\tilde{h} = \frac{1}{2} \tilde{D}^i \tilde{n}_i. \quad (2.41)$$

Definicja (2.40) wykorzystuje wyłącznie obiekty określone na Σ . Interpretacja θ_+ z punktu widzenia S_h jako powierzchni zanurzonej w czasoprzestrzeni $\mathcal{M}^{(4)}$ może być przedstawiona w oparciu o związane z nią w naturalny sposób dwa pola wektorowe l^μ i k^μ ,

$$\begin{aligned} l^\mu &= N^\mu + \tilde{n}^\mu, \\ k^\mu &= N^\mu - \tilde{n}^\mu. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Ich krzywe całkowe są geodezyjnymi zerowymi (kongruencjami normalnymi do S_h). Ekspansja θ_+ w tym sformułowaniu jest śladem pochodnej kowariantnej l^μ względem metryki $\tilde{s}_{\mu\nu}$ indukowanej na S_h ,

$$\theta_+ = \tilde{s}_{\mu\nu} \tilde{\nabla}^\mu l^\nu. \quad (2.43)$$

Dla form fundamentalnych $\tilde{g}_{ij}$ i $\tilde{K}_{ij}$ otrzymanych przy wykorzystaniu metody konforemnej znikanie ekspansji θ_+ przyjmuje postać nieliniowego warunku brzegowego typu Robina na czynnik ψ [30, 31],

$$n^i \partial_i \psi + \frac{1}{2} h \psi - \frac{1}{4\psi^3} A_{ij} n^i n^j + \frac{1}{6} \psi^3 H = 0 \text{ na } S_h. \quad (2.44)$$

Z punktu widzenia badania nierówności Penrose'a na hiperpowierzchni początkowej naturalnym kandydatem na wielkość odpowiadającą polu powierzchni czarnej dziury wydaje się więc pole największej powierzchni złapanej. Takie utożsamienie jest jednak błędne, co zostało pokazane w kontrprzykładzie przedstawionym przez Ben-Dova [32]. Należy więc przyjąć słabsze założenie i rozważać nierówność z polem najmniejszej ze wszystkich powierzchni otaczających największą powierzchnię złapaną.

Definicje energii, pędu i momentu pędu występujące w nierówności Penrose'a i jej wzmocnionej wersji również dają się wyrazić wyłącznie przy pomocy wielkości określonych na hiperpowierzchni początkowej.

2.6 Energia, masa i pęd ADM

Masa, pęd i moment pędu związane z hiperpowierzchnią Σ są dobrze zdefiniowane w przypadku asymptotycznie płaskich danych początkowych. Z tego względu zostanie przyjęte następujące założenie o formach fundamentalnych $\tilde{g}_{ij}$ i $\tilde{K}_{ij}$,

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= (d\tilde{x}^1)^2 + (d\tilde{x}^2)^2 + (d\tilde{x}^3)^2 + \mathcal{O}(r^{-1}) \\ \tilde{K} &= \mathcal{O}(r^{-2}), \end{aligned} \quad (2.45)$$

gdzie $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$ są asymptotycznie kartezjańskimi współrzędnymi. W przypadku danych konforemnie płaskich warunek (2.45) narzuca odpowiednią asymptotykę czynnika ψ ,

$$\psi = 1 + \mathcal{O}(r^{-1}). \quad (2.46)$$

Energia związana z polem grawitacyjnym może być w tym przypadku określona jako

$$E = \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S_r} \tilde{g}^{jk} (\tilde{g}_{ij,k} - \tilde{g}_{jk,i}) n^i d\sigma, \quad (2.47)$$

gdzie S_r jest sferą $(\tilde{x}^1)^2 + (\tilde{x}^2)^2 + (\tilde{x}^3)^2 = r^2$ ze standardowym elementem powierzchni $d\sigma$ i wektorem normalnym n^i skierowanym na zewnątrz. Postać funkcji podcałkowej w (2.47) nie jest jawnie kowariantna, jednak nie zależy

od wyboru asymptotycznie kartezjańskich współrzędnych [33]. Powyższa definicja została wprowadzona w [25], dlatego wielkość którą określa nosi nazwę energii ADM.

Masę charakteryzującą asymptotycznie płaską hiperpowierzchnię początkową można otrzymać korzystając z relatywistycznego związku

$$M = \sqrt{E^2 - P_i P^i}, \quad (2.48)$$

słusznego również w kontekście danych początkowych ogólnej teorii względności. Jednym ze składników występujących w równaniu (2.48) jest energia ADM, więc do dopełnienia definicji należy jeszcze określić pęd ADM, P^i . Jest on związany z asymptotycznym zachowaniem się krzywizny zewnętrznej hiperpowierzchni,

$$P^i = \frac{1}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S_r} \left(\tilde{K}_j{}^i - \tilde{H} \delta_j{}^i \right) n^j d\sigma. \quad (2.49)$$

Moment pędu ADM jest zdefiniowany jako

$$J^i = \frac{1}{16\pi} \epsilon^i{}_{jk} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S_r} \left(\tilde{x}^j \tilde{K}_l{}^k - \tilde{x}^k \tilde{K}_l{}^j \right) n^l d\sigma, \quad (2.50)$$

gdzie ϵ jest antysymetrycznym symbolem Levi-Civity. Zarówno w (2.49), jak i (2.50) zostały wykorzystane oznaczenia z (2.47).

Wielkości występujące we wzmacnionej wersji nierówności Penrose'a mogą być również wyrażone przez czynnik konforemny ψ , metrykę g_{ij} i krzywiznę zewnętrzną A_{ij} , związane z $\tilde{g}_{ij}$ i $\tilde{K}_{ij}$ przy pomocy (2.35). Wtedy

$$\Delta E = -\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S_r} \left(n^i \partial_i \psi \right) d\sigma, \quad (2.51)$$

$$P^i = \frac{1}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S_r} \left(A_j{}^i - \frac{2}{3} H \delta_j{}^i \right) n^j d\sigma, \quad (2.52)$$

$$J^i = \frac{1}{16\pi} \epsilon^i{}_{jk} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S_r} \left(\tilde{x}^j n^l A_l{}^k - \tilde{x}^k n^l A_l{}^j + \frac{H}{3} n^k \tilde{x}^j - \frac{H}{3} n^j \tilde{x}^k \right) d\sigma, \quad (2.53)$$

gdzie ΔE oznacza różnicę pomiędzy energią ADM $\tilde{g}_{ij}$ i g_{ij} .

Najprostsze rozwiązanie więzu pędowego otrzymane przy użyciu metody konforemnej i dopuszczające niezerowy pęd i moment pędu ADM zostało

przedstawione w pracy Bowena i Yorka w przypadku konforemnie płaskich danych początkowych [34],

$$A_{ij}^{BY} = \frac{3}{2r^2} (P_i n_j + P_j n_i - (\delta_{ij} - n_i n_j) P^k n_k) + \frac{3}{r^3} (\epsilon_{kil} J^l n^k n_j + \epsilon_{kjl} J^l n^k n_i), \quad (2.54)$$

dla n^i będącego wektorem radialnym w $\mathbb{R}^3$. Reprezentuje ono pojedynczą, obracającą się i pchniętą lorentzowsko czarną dziurę.

Rozdział 3

Nierówność Penrose’a dla maksymalnych zaburzeń danych początkowych Schwarzschilda

Konforemna metoda generowania danych początkowych umożliwia wyznaczenie metryki $\tilde{g}_{ij}$ oraz tensora krzywizny zewnętrznej $\tilde{K}_{ij}$ hiperpowierzchni początkowej Σ korzystając ze znanych rozwiązań równań więzów (2.19) oraz (2.22). Po zadaniu konforemnych form fundamentalnych przyjmują one postać sprzężonego układu eliptycznych równań różniczkowych, który separuje się przy założeniu o stałej średniej krzywiznie. W tym przypadku należy najpierw zadać bezdywergencyjny tensor A_{ij} , a następnie rozwiązać semiliniowe równanie Poissona (2.37). O ile pierwszy krok tej procedury jest możliwy do wykonania dla konforemnie płaskiej metryki, to dla nietrywialnego A_{ij} czynnik ψ musi być wyznaczony przy wykorzystaniu metod numerycznych. Alternatywą jest rozważanie przybliżonego równania Lichnerowicza, dzięki któremu można otrzymać dane będące zaburzeniem pewnego znanego rozwiązania. Dotychczas zostało to wykonane w kontekście badań kolizji dwóch czarnych dziur oraz ewolucji jednej czarnej dziury z niezerowy pędem [36, 37]. Konforemna krzywizna zewnętrzna A_{ij} miała w tych przypadkach postać Bowena–Yorka (2.54) z $P^i = 0$ lub $J^i = 0$ a skala zaburzenia była związana z niezerowym fizycznym parametrem charakteryzującym układ.

Rozdział ten jest poświęcony weryfikacji nierówności Penrose’a dla maksymalnych ($H = 0$) osiowosymetrycznych zaburzeń danych początkowych Schwarzschilda. Można je otrzymać korzystając z przybliżonego, asymptotycznie stałego rozwiązania równania Lichnerowicza (2.37) z warunkiem brzegowym (2.44), gwarantującym istnieniem zewnętrznej powierzchni marginal-

nie złapanej po dokonaniu transformacji konforemnej. Zaburzenia będą scharakteryzowane przez skalę tensora A_{ij} , wyznaczonego w sposób analityczny przez potencjały skalarne. Przedstawione wyniki pochodzą z [38].

3.1 Bezdywergencyjne bezśladowe tensory na płaskiej przestrzeni

Konforemny więc wektorowy (2.34) dla $H = 0$ oraz założeniu o osiowej symetrii może być zapisany w sferycznym układzie współrzędnych (r, θ, φ) w następujący sposób [39],

$$(r^3 A_{rr} \sin \theta)_{,r} + (r A_{r\theta} \sin \theta)_{,\theta} = 0, \quad (3.1)$$

$$(A_{\theta\theta} \sin^2 \theta)_{,\theta} + (r^2 A_{r\theta})_{,r} \sin^2 \theta + r^2 A_{rr} \sin \theta \cos \theta = 0, \quad (3.2)$$

$$A_{\varphi\theta} = \frac{\omega_{,r}}{\sin \theta}, \quad (3.3)$$

$$A_{\varphi r} = -\frac{\omega_{,\theta}}{r^2 \sin \theta}, \quad (3.4)$$

gdzie ω jest pewną funkcją. Warunki regularności tensora A_{ij} (dodatek A) ograniczają jej zachowanie na osi symetrii,

$$\omega_{,\theta} \doteq \sin^3 \theta, \quad \omega_{,r} \doteq \sin^4 \theta. \quad (3.5)$$

Mamy więc

$$\omega = \omega_1 \sin^4 \theta + j(\cos^3 \theta - 3 \cos \theta) + \omega_2, \quad (3.6)$$

dla regularnej funkcji ω_1 i stałych j i ω_2 . Ostatni człon w (3.6) zostanie pominięty w dalszych rozważaniach. Jest to konsekwencją niezmienniczości konforemnej krzywizny zewnętrznej ze względu na dodanie stałej do ω .

Równanie (3.1) może być rozwiązane przy użyciu potencjału skalarного Q ,

$$A_{rr} = -\frac{Q_{,\theta}}{r^3 \sin \theta}, \quad A_{r\theta} = \frac{Q_{,r}}{r \sin \theta}. \quad (3.7)$$

Regularność składowych A_{rr} i $A_{r\theta}$ prowadzi do

$$Q_{,\theta} \doteq \sin \theta, \quad Q_{,r} \doteq \sin^2 \theta, \quad (3.8)$$

więc Q ma następującą strukturę,

$$Q = q_{,\theta} \sin \theta + a \cos \theta, \quad (3.9)$$

gdzie $q \doteq \cos \theta$ a a jest stałą.

Dla funkcji F , takiej że

$$A_{\theta\theta} + \frac{1}{2}r^2 A_{rr} = F_{,z}, \quad (3.10)$$

równanie (3.2) jest równoważne z

$$\Delta_s F = (z^2 - 1) \left((rq_{,r})_{,r} + \frac{1}{2r} \Delta_s q \right)_{,z}, \quad (3.11)$$

gdzie $z = \cos \theta$ oraz $\Delta_s F = ((1 - z^2)F_{,z})_{,z}$ jest operatorem Laplace'a na sferze jednostkowej. Warunek całkowalności (3.11) to

$$\int_{-1}^1 (zq) dz = pr + \frac{p'}{r}, \quad p, p' = \text{const}. \quad (3.12)$$

Funkcja q może być rozłożona w bazie wielomianów Legendre'a P_n ,

$$q(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(r) P_n(z), \quad (3.13)$$

gdzie ze względu na różniczkową zależność Q od q w (3.9) przyjęte zostało założenie o znikaniu q_0 . Równanie (3.12) określa teraz jeden z wyrazów powyższej sumy,

$$q_1 = \frac{3}{2} \left(pr + \frac{p'}{r} \right). \quad (3.14)$$

Korzystając z własności (B.3) wielomianów Legendre'a oraz (3.7) mamy,

$$A_{rr} = \frac{a}{r^3} + \frac{1}{r^3} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) q_n P_n, \quad (3.15)$$

$$A_{r\theta} = -\frac{\sqrt{1-z^2}}{r} \sum_{n=1}^{\infty} q_{n,r} P_{n,z}. \quad (3.16)$$

Równanie (3.11) daje się uprościć przy pomocy (B.4),

$$A_{\theta\theta} + \frac{1}{2}r^2 A_{rr} = \sum_{n=2}^{\infty} \left((rq_{n,r})_{,r} - \frac{1}{2}n(n+1) \frac{q_n}{r} \right) \tilde{P}_n, \quad (3.17)$$

gdzie funkcja F została wyrażona przez odpowiednie składowe A_{ij} przy pomocy (3.10) oraz

$$\begin{aligned}\tilde{P}_n &= \left(\Delta_s^{-1} \left((z^2 - 1) P_{n,z} \right) \right)_{,z} = \\ &= \frac{1}{n+2} \left(n P_n - \frac{2}{n-1} P_{n-1,z} \right) \quad \text{dla } n \geq 2.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Wielomiany $\tilde{P}_n$ są ortogonalne (dodatek B),

$$\int_{-1}^1 \left(\tilde{P}_k \tilde{P}_n \right) dz = \underbrace{\frac{2n(n+1)}{(n-1)(n+2)(2n+1)}}_{c_n} \delta_{kn}.\tag{3.19}$$

Składowe A_{rr} i $A_{r\theta}$ definiują pęd, natomiast $A_{r\varphi}$ moment pędu ADM. W omawianym przypadku (2.52) i (2.53) sprowadzają się bowiem do

$$P_z = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \left(z r^2 A_{rr} - \sqrt{1 - z^2} r A_{r\theta} \right) dz = p,\tag{3.20}$$

$$J_z = - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \left(r^2 A_{r\varphi} \right) dz = j,\tag{3.21}$$

gdzie wykorzystana została postać (3.14) funkcji q_1 oraz (B.5). Pozostałe składowe P^i i J^i znikają. Moment pędu nie występuje w standardowej wersji nierówności Penrose'a, więc na potrzeby jej weryfikacji zostanie wyłączony z rozważań poprzez przyjęcie $\omega = 0$. Założenie to zostanie zniesione przy analizie wzmocnionej wersji tego związku.

3.2 Nierówność wiążąca masę i pole powierzchni czarnej dziury

Nierówność Penrose'a jest wysycana dla danych początkowych czasoprzestrzeni Schwarzschilda. Konforemne wielkości charakteryzujące tę hiperpowierzchnię to

$$\psi_0 = \left(1 + \frac{m}{2r} \right),\tag{3.22}$$

$$g = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,\tag{3.23}$$

oraz znikająca krzywizna zewnętrzna. Sfera $r = m/2$ jest minimalna względem metryki $\mathring{g} = \psi_0^4 g$, co w tym przypadku czyni ją również zewnętrzną powierzchnią marginalnie złapaną. Aby posiadała drugą z powyższych własności również po transformacji konforemnej, czynnik ψ musi być rozwiązaniem następującego zagadnienia brzegowego Robina dla równania Lichnerowicza,

$$\begin{cases} \Delta \psi = -\frac{1}{8} \mathring{A}^2 \psi^{-7}, \\ \psi_{,r} = \frac{1}{16} \mathring{A}_{rr} \psi^{-3} \text{ dla } r = \frac{m}{2}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \psi = 1, \end{cases} \quad (3.24)$$

gdzie $\psi = \frac{\psi}{\psi_0}$ jest związany z transformacją danych początkowych Schwarzschilda, $\tilde{g}_{ij} = \psi^4 \mathring{g}_{ij}$, Δ operatorem Laplace'a metryki $\mathring{g}_{ij}$, $\mathring{A}_{ij} = \psi_0^{-2} A_{ij}$ zaburzeniem w postaci nieznikającej krzywizny zewnętrznej a $\mathring{A}^2 = \mathring{A}_{ij} \mathring{A}^{ij}$. Zagadnienie (3.24) jest równoważne z

$$\begin{cases} \Delta \psi = -\frac{1}{8} A^2 \psi^{-7}, \\ \psi_{,r} + \frac{1}{m} \psi = \frac{1}{4} A_{rr} \psi^{-3} \text{ dla } r = \frac{m}{2}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \psi = 1, \end{cases} \quad (3.25)$$

gdzie wszystkie wielkości są związane z płaską metryką g_{ij} .

Energia ADM wyjściowych danych początkowych może być wyrażona przez ψ i $\mathring{A}_{ij}$ przy pomocy (3.24). Scałkowanie równania Laplace'a określającego czynnik konforemny oraz wykorzystanie warunku brzegowego na tę funkcję prowadzi do

$$E = m + \frac{1}{16\pi} \int_V \left(\mathring{A}^2 \psi^{-7} \right) d\mathring{V} - \frac{1}{128\pi} \oint_{S_h} \left(\mathring{A}_{rr} \psi^{-3} \right) d\mathring{\sigma}, \quad (3.26)$$

dla odpowiednich elementów dwu- i trójwymiarowej objętości $d\mathring{\sigma}$ oraz $d\mathring{V}$ związanych z $\mathring{g}_{ij}$. Pole zewnętrznej powierzchni marginalnie złapanej po transformacji to

$$|S_h| = \oint_{S_h} \psi^4 d\mathring{\sigma}. \quad (3.27)$$

Niech skala konforemnej krzywizny zewnętrznej A_{ij} będzie proporcjonalna do pewnego parametru ϵ . Jeśli istnieje następujące rozwinięcie czynnika ψ ,

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (3.28)$$

gdzie $\psi_n \sim \epsilon^n$, to $\dot{\psi}$, energia ADM i pole powierzchni $|S_h|$ wynoszą odpowiednio

$$\dot{\psi} = 1 + \dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (3.29)$$

$$E = m - \frac{1}{128\pi} \oint_{S_h} \dot{A}_{rr} d\dot{\sigma} + \frac{3}{128\pi} \oint_{S_h} (\dot{A}_{rr} \dot{\psi}_1) d\dot{\sigma} + \quad (3.30)$$

$$+ \frac{1}{16\pi} \int_V \dot{A}^2 d\dot{V} + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

$$|S_h| = 16\pi m^2 + \oint_{S_h} (4\dot{\psi}_1) d\dot{\sigma} + \oint_{S_h} (6\dot{\psi}_1^2 + 4\dot{\psi}_2) d\dot{\sigma} + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (3.31)$$

Wyrazy proporcjonalne do ϵ i ϵ^2 w (3.30) i (3.31) zależą jedynie od $\dot{\psi}_1 = \psi_1/\psi_0$. Korzystając z (3.25), można otrzymać zagadnienie brzegowe określające tę funkcję,

$$\begin{cases} \Delta\psi_1 = 0, \\ \psi_{1,r} + \frac{1}{m}\psi_1 = \frac{1}{32}A_{rr} \text{ dla } r = \frac{m}{2}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_1 = 0, \end{cases} \quad (3.32)$$

Pole powierzchni (3.31) zawiera całki brzegowe z $\dot{\psi}_1$ i $\dot{\psi}_2$, które dają się wyrazić przez wielkości z niższych rzędów rozwinięcia przy użyciu (3.24). Mamy

$$\begin{cases} \Delta\dot{\psi}_1 + \Delta\dot{\psi}_2 = -\frac{1}{8}\dot{A}^2 \\ \dot{\psi}_{1,r} + \dot{\psi}_{2,r} = \frac{1}{16}\dot{A}_{rr} - \frac{3}{16}\dot{A}_{rr}\dot{\psi}_1 \text{ dla } r = \frac{m}{2}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \dot{\psi}_1 = \lim_{r \rightarrow \infty} \dot{\psi}_2 = 0, \end{cases} \quad (3.33)$$

skąd wynika

$$\frac{1}{r^2\psi_0^6} \left(r^2\psi_0^2 \langle \dot{\psi}_1 \rangle_{,r} + r^2\psi_0^2 \langle \dot{\psi}_2 \rangle_{,r} \right) = -\frac{1}{8} \langle \dot{A}^2 \rangle, \quad (3.34)$$

gdzie

$$\langle f \rangle = 2\pi \int_{-1}^1 f dz. \quad (3.35)$$

Równanie (3.34) można rozwiązać rząd po rzędzie ze względu na $\langle \dot{\psi}_1 \rangle$ i $\langle \dot{\psi}_2 \rangle$ wykorzystując odpowiednie warunki brzegowe narzucone na te funk-

cje. Wtedy

$$\langle \dot{\psi}_1 \rangle = -\frac{m^2}{64r\psi_0} \langle A_{rr} \rangle_h, \quad (3.36)$$

$$\langle \dot{\psi}_2 \rangle = \frac{3m^2}{128r\psi_0} \langle A_{rr}\psi_1 \rangle_h + \frac{1}{8} \int_r^\infty \left(\frac{1}{r'^2\psi_0^2} \int_{m/2}^{r'} \tilde{r}^2 \psi_0^{-6} \langle A^2 \rangle d\tilde{r} \right) dr', \quad (3.37)$$

gdzie $\langle \cdot \rangle_h$ oznacza całkę po sferze jednostkowej funkcji ewaluowanej w $r = m/2$ oraz $A^2 = \psi_0^{12} \dot{A}^2$. Wstawienie (3.36) oraz (3.37) do wyrażenia (3.31) prowadzi do

$$\begin{aligned} |S_h| &= 16\pi m^2 - \frac{m^3}{4} \langle A_{rr} \rangle_h + 6m^2 \langle \psi_1^2 \rangle_h + \frac{3m^3}{8} \langle A_{rr}\psi_1 \rangle_h + \\ &+ 2m^2 \int_{m/2}^\infty (r\psi_0^{-7} \langle A^2 \rangle) dr + \mathcal{O}(\epsilon^3), \end{aligned} \quad (3.38)$$

gdzie wykorzystana została następująca zależność,

$$\oint_{S_h} f d\sigma = 4m^2 \langle f \rangle_h. \quad (3.39)$$

Jedna z całek występująca w (3.38) została uproszczona przy użyciu funkcji schodkowej Heaviside'a Θ ,

$$\int_{m/2}^\infty \left(\frac{1}{r'^2\psi_0^2} \int_{m/2}^\infty \Theta(r' - \tilde{r}) \tilde{r}^2 \psi_0^{-6} \langle A^2 \rangle d\tilde{r} \right) dr' = \int_{m/2}^\infty \tilde{r} \psi_0^{-7} \langle A^2 \rangle d\tilde{r}. \quad (3.40)$$

Weryfikacja nierówności Penrose'a będzie przeprowadzona w oparciu o wielkość P_I , równą

$$P_I = E^2 - \frac{|S_h|}{16\pi}. \quad (3.41)$$

Dla osiowosymetrycznych danych początkowych pęd ADM ma tylko jedną niezerową składową, która w diskutowanym przypadku wynosi p (3.20). Nierówność Penrose'a będzie więc spełniona jeśli

$$P_I - p^2 \geq 0. \quad (3.42)$$

Po uwzględnieniu wyrazów kwadratowych rozwinięcia E i $|S_h|$ względem ϵ lewa strona (3.42) przyjmuje następującą postać,

$$P_I^{(2)} - p^2 = \left(\frac{m^2}{128\pi} \right)^2 \langle A_{rr} \rangle_h^2 - \frac{3m^2}{8\pi} \langle \psi_1^2 \rangle_h - p^2 + \\ + \frac{m}{8\pi} \int_{\frac{m}{2}}^{\infty} \frac{r^2 (2 - \psi_0) \langle A^2 \rangle}{\psi_0^7} dr, \quad (3.43)$$

będącą pierwszym nietrywialnym wkładem do pełnej nierówności Penrose'a. Jest więc ona spełniona w tym rzędzie, jeśli $P_I^{(2)} - p^2 \geq 0$. W przypadku gdy $P_I^{(2)} = p^2$ należy uwzględnić wyrazy proporcjonalne do wyższych potęg parametru ϵ .

Korzystając z postaci konforemnej krzywizny zewnętrznej A_{ij} we współrzędnych sferycznych mamy

$$\langle A^2 \rangle = 2 \left\langle \frac{1}{r^4} \left(A_{\theta\theta} + \frac{1}{2} r^2 A_{rr} \right)^2 + \frac{3}{4} A_{rr}^2 + \frac{1}{r^2} A_{r\theta}^2 \right\rangle. \quad (3.44)$$

Dla osiowosymetrycznych składowych A_{ij} , określonych za pomocą potencjału q , (3.15), (3.16) oraz (3.17) otrzymujemy

$$\langle A^2 \rangle = 4\pi \left[\frac{3a^2}{2r^6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 (n+1)^2}{2(2n+1)r^6} q_n^2 + \frac{2n(n+1)}{(2n+1)r^4} q_{n,r}^2 \right) + \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left((rq_{n,r})_{,r} - \frac{1}{2} n(n+1) \frac{q_n}{r} \right)^2 \right], \quad (3.45)$$

gdzie wykorzystana została ortogonalność wielomianów $\tilde{P}_k$ (dodatek B) z normą c_n daną przez (3.19). Wyrażenie (3.45) separuje się ze względu na poszczególne funkcje q_n . Można je zapisać jako

$$\langle A^2 \rangle = 6\pi \left(\frac{a^2}{r^6} + \frac{5p^2}{r^4} + \frac{2pp'}{r^6} + \frac{5p'^2}{r^8} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n, \quad (3.46)$$

dla postaci (3.14) q_1 oraz A_n zależących od q_n i ich pochodnych.

Aby oszacować (3.43) należy też rozwiązać zagadnienie brzegowe (3.32) określające ψ_1 . Mamy

$$\psi_1 = - \left(\frac{a}{8mr} + \frac{m^2 p + 4p'}{8m^3} P_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1) q_{nh} P_n}{16(2n+1)r^2} \left(\frac{m}{2r} \right)^{n-1} \right), \quad (3.47)$$

gdzie $q_{nh} = q_n(m/2)$.

Ostatecznie, wielkość (3.43) wynosi

$$P_I^{(2)} - p^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{3n^2 (n+1)^2 q_{nh}^2}{32 (2n+1)^3 m^2} + \frac{m}{8\pi} \int_{\frac{m}{2}}^{\infty} \frac{r^2 (2 - \psi_0) A_n}{\psi_0^7} dr \right). \quad (3.48)$$

W wyrażeniu tym nie występują człony związane z q_1 , więc dla zaburzenia w postaci tensora A_{ij} generowanego wyłącznie przez tę funkcję nierówność Penrose'a może być zweryfikowana jedynie, gdy uwzględnione zostaną kolejne wyrazy rozwinięcia względem parametru ϵ . Badanie dodatniości (3.48) w ogólnym przypadku wymaga wykorzystania sformułowania wariacyjnego.

Niech $\mathcal{F}$ będzie następującym funkcjonałem,

$$\mathcal{F}(q_n, \partial_r q_n, \partial_r^2 q_n) = \frac{m}{8\pi} \int_{\frac{m}{2}}^{\infty} \frac{r^2 (2 - \psi_0) A_n}{\psi_0^7} dr. \quad (3.49)$$

Dla A_n danego przy pomocy (3.45) i (3.46) może być on zapisany jako

$$\mathcal{F}(q_n, \dot{q}_n, \ddot{q}_n) = 2c_n \int_{\ln \frac{m}{2}}^{\infty} \varrho [(\ddot{q}_n - N q_n)^2 + (N - 1)(2\dot{q}_n^2 + 3N q_n^2)] du, \quad (3.50)$$

gdzie

$$\varrho = \frac{m(1 - \frac{m}{2r})}{4r^3 \psi_0^7}, \quad N = \frac{1}{2}n(n+1), \quad u = \ln r \quad (3.51)$$

oraz $\dot{q}_n = \partial_u q_n$. Znikanie pierwszej wariacji $\mathcal{F}$ względem q_n prowadzi do równania różniczkowego na nieznaną funkcję ekstremalizującą y_n ,

$$(\partial_u^2 - N)[\varrho(\partial_u^2 - N)y_n] - 2(N-1)\partial_u(\varrho\partial_u y_n) + 3N(N-1)\varrho y_n = 0. \quad (3.52)$$

Rozwiązaniem (3.52) uwzględniającym odpowiednie asymptotyczne zachowanie jest

$$y_n = \frac{N y_{nh}}{2N+1} \left(\frac{n-1}{n+1} \left(\frac{m}{2r} \right)^{n+1} + \frac{n+2}{n} \left(\frac{m}{2r} \right)^n \right). \quad (3.53)$$

Charakter ekstremum funkcjonału może być określony w bezpośredni sposób, bez odwoływania się do wariacji wyższych rzędów. Dla pewnego y'_n , takiego

że $y'_{nh} = 0$ mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(y_n + y'_n) - \mathcal{F}(y_n) &= \mathcal{F}(y'_n) + \\ &+ 4c_n \int_{\ln \frac{m}{2}}^{\infty} \varrho(\ddot{y}'_n - N y'_n)(\ddot{y}_n - N y_n) du + \\ &+ 4c_n \int_{\ln \frac{m}{2}}^{\infty} \varrho(N - 1)(2\dot{y}'_n \dot{y}_n + 3N y'_n y_n) du. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Postać wyrażenia (3.50) implikuje $\mathcal{F}(y'_n) \geq 0$, więc po wykonaniu całkowania przez części, uwzględnienia wartości y'_{nh} i $\varrho(m/2)$ oraz wykorzystaniu równania (3.52) otrzymujemy

$$\mathcal{F}(y_n + y'_n) - \mathcal{F}(y_n) \geq 0, \quad (3.55)$$

co dowodzi, że y_n dane przez (3.53) jest globalnym minimum funkcjonału $\mathcal{F}$.

Wielkość (3.48) może być zapisana w alternatywny sposób,

$$P_I^{(2)} - p^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{3n^2(n+1)^2 q_{nh}^2}{32(2n+1)^3 m^2} + \frac{c_n}{32m^2} q_{nh}(\ddot{q}_{nh} - N q_{nh}) \right). \quad (3.56)$$

co dla $q_n = y_n$ (ekstremum $\mathcal{F}$) prowadzi do

$$P_I^{(2)} - p^2 = \frac{1}{32m^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2(n+1)^2(n-1)(n+2)}{(n^2+n+1)(2n+1)^3} y_{nh}^2 \geq 0. \quad (3.57)$$

Nierówność Penrose'a w drugim rzędzie rozwinięcia względem ϵ jest więc spełniona dla dowolnego zaburzenia generowanego przez q_n , $n \geq 2$.

3.3 Nierówność Penrose'a z momentem pędu

Wzmocniona nierówność Penrose'a dla zaburzeń danych początkowych Schwarzschilda w drugim rzędzie rozwinięcia względem parametru ϵ przyjmuje następującą postać,

$$P_I^{(2)} - p^2 \geq \frac{j^2}{4m^2}, \quad (3.58)$$

gdzie wykorzystana została definicja (3.21) momentu pędu oraz wzór (3.31), określający pole powierzchni $|S_h|$. Dla niezerowego potencjału ω (3.6), wyrażenie $P_I^{(2)}$ zawiera człony zależne wyłącznie od składowych $A_{\varphi r}$ oraz $A_{\varphi \theta}$,

więc ze względu na (3.57), nierówność (3.58) jest równoważna z

$$\frac{m^3}{\pi} \int_{\frac{m}{2}}^{\infty} \left(\frac{(2 - \psi_0)}{\psi_0^7} \left\langle \frac{1}{1 - z^2} A_{\varphi r}^2 + \frac{1}{r^2 (1 - z^2)} A_{\varphi \theta}^2 \right\rangle \right) dr \geq j^2, \quad (3.59)$$

gdzie wykorzystana została postać (3.43) $P_I^{(2)}$. Niech

$$\omega = \tilde{\omega} + j(z^3 - 3z), \quad \tilde{\omega} \doteq (1 - z^2)^2. \quad (3.60)$$

Definicje (3.3) oraz (3.4) składowych $A_{\varphi r}$ i $A_{\varphi \theta}$ przy pomocy potencjału ω prowadzą do

$$\begin{aligned} & \frac{m^3}{\pi} \int_{\frac{m}{2}}^{\infty} \left(\frac{(2 - \psi_0)}{\psi_0^7} \left\langle \frac{1}{1 - z^2} A_{\varphi r}^2 + \frac{1}{r^2 (1 - z^2)} A_{\varphi \theta}^2 \right\rangle \right) dr \geq \\ & \geq \frac{m^3}{\pi} \int_{\frac{m}{2}}^{\infty} \left(\frac{(2 - \psi_0)}{\psi_0^7} \left\langle \frac{A_{\varphi r}^2}{(1 - z^2)} \right\rangle \right) dr = \\ & = j^2 + \frac{m^3}{\pi} \int_{\frac{m}{2}}^{\infty} \left(\frac{(2 - \psi_0)}{r^4 \psi_0^7} \left\langle \frac{\tilde{\omega}_{,z}^2}{(1 - z^2)} \right\rangle \right) dr, \end{aligned} \quad (3.61)$$

więc nierówność (3.59) jest spełniona dla dowolnego $\tilde{\omega} \neq 0$. Jeśli ta część ω znika, to w celu weryfikacji wzmocnionej nierówności Penrose'a należy uwzględnić wyrazy wyższego rzędu w rozwinięciu względem parametru ϵ .

3.4 Weryfikacja nierówności Penrose'a dla zaburzeń typu Bowena–Yorka

Nierówność Penrose'a wraz ze swoją wzmocnioną wersją z momentem pędu jest spełniona w drugim rzędzie rozwinięcia względem ϵ dla szerokiej klasy osiowosymetrycznych zaburzeń danych początkowych Schwarzschilda. Jednakże, ze względu na (3.48) oraz (3.61), pewien szczególny wybór konforemnej krzywizny zewnętrznej A_{ij} ,

$$\begin{aligned} A_{rr} &= \frac{a}{r^3} + 3z \left(\frac{p'}{r^4} + \frac{p}{r^2} \right), \quad A_{r\theta} = \frac{3}{2} \sqrt{1 - z^2} \left(\frac{p'}{r^3} - \frac{p}{r} \right), \\ A_{\theta}^{\theta} &= A_{\varphi}^{\varphi} = -\frac{1}{2} A_{rr}, \\ A_{\varphi r} &= \frac{3j}{r^2} (z^2 - 1), \quad A_{\varphi \theta} = 0, \end{aligned} \quad (3.62)$$

nie wnosi do niej żadnego wkładu proporcjonalnego do ϵ^2 . W tym przypadku należy uwzględnić wyrazy związane z wyższymi rzędami rozwinięcia.

Tensor A_{ij} dany przez (3.62) wraz z płaską metryką g_{ij} są uogólnionymi danymi początkowymi Bowena–Yorka [40]. Oprócz fizycznych parametrów występujących w (2.54) zależą one również od stałych p' i a . Pierwsza z nich jest pędem ADM związanym z punktem $r = 0$ przeniesionym do nieskończoności poprzez inwersję względem sfery, natomiast druga nie posiada żadnej interpretacji.

Wyrazy trzeciego rzędu w ϵ w rozwinięciach (3.30) oraz (3.31) to

$$E^{(3)} = -\frac{7}{16\pi} \int_{\frac{m}{2}}^{\infty} \left(\frac{r^2}{\psi_0^7} \langle A^2 \psi_1 \rangle \right) dr + \frac{3m^2}{256\pi} \langle A_{rr} (\psi_2 - \psi_1^2) \rangle_h, \quad (3.63)$$

$$|S_h|^{(3)} = 16m^2 \left\langle \frac{\psi_1^3}{8} + \frac{3}{4} \psi_1 \psi_2 + \dot{\psi}_3 \right\rangle_h. \quad (3.64)$$

Funkcja $\dot{\psi}_3$ spełnia następujące zagadnienie brzegowe, określone na hiperpowierzchni schwarzschildowskiej,

$$\begin{cases} \dot{\Delta} \dot{\psi}_3 = \frac{7}{8} \dot{A}^2 \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_{3,r} = \frac{3}{16} \dot{A}_{rr} (2\dot{\psi}_1^2 - \dot{\psi}_2) \quad \text{dla } r = \frac{m}{2}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \dot{\psi}_3 = 0. \end{cases} \quad (3.65)$$

Podobnie jak w przypadku (3.36) i (3.37), można pokazać, że

$$\langle \dot{\psi}_3 \rangle_h = -\frac{3m}{128} \langle A_{rr} (\psi_1^2 - \psi_2) \rangle_h - \frac{7}{8} \int_{m/2}^{\infty} \left(\frac{r}{\psi_0^8} \langle A^2 \psi_1 \rangle \right) dr, \quad (3.66)$$

gdzie ostatnia całka została uproszczona przy pomocy (3.40). Ostatecznie

$$\begin{aligned} P_I^{(3)} = & - \left[\frac{7m}{8\pi} \int_{m/2}^{\infty} \frac{r^2 (2 - \psi_0) \langle A^2 \psi_1 \rangle}{\psi_0^8} dr + \right. \\ & + \frac{m^2 \langle A_{rr} \rangle_h}{1024\pi^2} \int_{m/2}^{\infty} \frac{r^2 \langle A^2 \rangle}{\psi_0^6} dr + \frac{m^2}{4\pi} \left\langle \frac{1}{2} \psi_1^3 + 3\psi_1 \psi_2 \right\rangle_h + \\ & \left. + \frac{3m^4}{16384\pi^2} \langle A_{rr} \psi_1 \rangle_h \langle A_{rr} \rangle_h \right]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Aby obliczyć (3.67) potrzebna jest analityczna postać ψ_2 . Funkcja ta spełnia następujące równanie Poissona z warunkami brzegowymi,

$$\begin{cases} \Delta\psi_2 = -\frac{1}{8\psi_0^7}A^2 \\ \partial_r\psi_2 + \frac{1}{m}\psi_2 = -\frac{3}{64}A_{rr}\psi_1 \text{ dla } r = \frac{m}{2}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_2 = 0, \end{cases} \quad (3.68)$$

które jest możliwe do rozwiązania dla uogólnionego tensora konforemnej krzywizny zewnętrznej Bowena–Yorka (3.62) poprzez rozkład niejednorodności w szereg względem wielomianów Legendre’a (dodatek C).

Wzmocniona nierówność Penrose’a w tym rzędzie rozwinięcia to

$$P_I^{(3)} + \frac{j^2}{8\pi m^2} \langle \psi_1 \rangle_h \geq 0, \quad (3.69)$$

Wyrażenie po lewej stronie (3.69) znika dla rozważanej postaci A_{ij} , więc weryfikacja dyskutowanej zależności tym przypadku musi opierać się o wyrazy proporcjonalne do ϵ^4 . Mamy

$$E^{(4)} = \frac{7}{16\pi} \int_{\frac{m}{2}}^{\infty} \left(\frac{r^2}{\psi_0^8} \langle A^2 (4\psi_1^2 - \psi_2\psi_0) \rangle \right) dr - \quad (3.70)$$

$$- \frac{m^2}{512\pi} \langle A_{rr} (12\psi_1\psi_2 - 6\psi_3 - 5\psi_1^3) \rangle_h, \quad (3.71)$$

$$|S_h|^{(4)} = 4m^2 \left\langle \frac{\psi_1^4}{16} + \frac{3\psi_1^2\psi_2}{2} + \frac{3\psi_2^2}{2} + 3\psi_1\psi_3 + 4\psi_4 \right\rangle_h. \quad (3.72)$$

Człon $\langle \psi_4 \rangle_h$, podobnie jak (3.37) i (3.66), może być wyrażony przez poprawki niższego rzędu do czynnika konforemnego dzięki wykorzystaniu zagadnienia Robina dla równania Poissona określającego ψ_4 ,

$$\begin{cases} \Delta\psi_4 = \frac{7}{8}A^2 (\psi_2 - 4\psi_1^2), \\ \psi_{4,r} = \frac{1}{16}A_{rr} (-10\psi_1^3 + 12\psi_1\psi_2 - 3\psi_3) \text{ dla } r = \frac{m}{2}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_4 = 0. \end{cases} \quad (3.73)$$

Jest on równy

$$\begin{aligned} \langle \dot{\psi}_4 \rangle_h &= -\frac{m}{256} \langle A_{rr} (12\psi_1\psi_2 - 6\psi_3 - 5\psi_1^3) \rangle_h + \\ &+ \frac{7}{8} \int_{m/2}^{\infty} \left(\frac{r}{\psi_0^9} \langle A^2 (4\psi_1^2 - \psi_2\psi_0) \rangle \right) dr. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Wielkość $P_I^{(4)}$ wynosi

$$\begin{aligned} P_I^{(4)} &= \frac{1}{256\pi^2} \left(\int_{m/2}^{\infty} \frac{r^2 \langle A^2 \rangle}{\psi_0^6} dr \right)^2 + \frac{7m^2 \langle A_{rr} \rangle_h}{1024\pi^2} \int_{m/2}^{\infty} \frac{r^2 \langle A^2 \psi_1 \rangle}{\psi_0^7} dr + \\ &+ \frac{9m^4}{65536\pi^2} \langle A_{rr} \psi_1 \rangle_h^2 - \frac{m^2}{16\pi} \left\langle \frac{\psi_1^4}{4} + 6\psi_1^2\psi_2 + 6\psi_2^2 + 12\psi_1\psi_3 \right\rangle_h - \\ &- \frac{3m^4}{16384\pi^2} \langle A_{rr} (\psi_2 - \psi_1^2) \rangle_h \langle A_{rr} \rangle_h + \\ &+ \frac{7m}{8\pi} \int_{m/2}^{\infty} \left(\frac{r^2(2 - \psi_0)}{\psi_0^9} \langle A^2 (4\psi_1^2 - \psi_2\psi_0) \rangle \right) dr + \\ &+ \frac{3m^2 \langle A_{rr} \psi_1 \rangle_h}{2048\pi^2} \int_{m/2}^{\infty} \frac{r^2 \langle A^2 \rangle}{\psi_0^6} dr. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Ze względu na wyraz zawierający $\psi_1\psi_3$ jej oszacowanie musi być poprzedzone rozwiązaniem następującego zagadnienia brzegowego,

$$\begin{cases} \Delta\psi_3 = \frac{7}{8\psi_0^8} A^2\psi_1 \\ \partial_r\psi_3 + \frac{1}{m}\psi_3 = \frac{3}{64} A_{rr} (\psi_1^2 - \psi_2) \quad \text{dla } r = \frac{m}{2}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_3 = 0. \end{cases} \quad (3.76)$$

Jest to możliwe do wykonania w sposób analogiczny do (3.68) (dodatek C).

Ostatecznie, w czwartym rzędzie rozwinięcia względem ϵ wzmocniona nierówność Penrose'a to

$$P_I^{(4)} + \frac{j^2}{16\pi^2 m^2} \left(2\pi \left\langle \psi_2 + \frac{3}{4}\psi_1^2 \right\rangle_h - \langle \psi_1 \rangle_h^2 \right) \geq 0. \quad (3.77)$$

Wyrażenie zawarte w (3.77) dla uogólnionej konforemnej krzywizny Bowena–Yorka (3.62) przyjmuje postać jednorodnego wielomianu czwartego stopnia

zmiennych p/m , p'/m^3 oraz j/m^2 ,

$$\left(P_I - 4\pi \frac{j^2}{|S_h|}\right)^{(4)} = m^2 W\left(\frac{p}{m}, \frac{p'}{m^3}, \frac{j}{m^2}\right), \quad (3.78)$$

gdzie (po zaokrągleniu do 10^{-7})

$$\begin{aligned} W(x, y, z) = & 0.0888638x^4 + 0.0100359x^3y + \\ & + x^2(0.0110756y^2 + 0.0543782z^2) + \\ & + x(0.004645y^3 + 0.04275yz^2) + \\ & + 0.00448712y^4 + 0.0445892y^2z^2 + 0.01325z^4. \end{aligned} \quad (3.79)$$

W ogólnym przypadku dominuje w nim człon proporcjonalny do x^4 ,

$$W > 0.086 \left(\frac{p}{m}\right)^4, \quad (3.80)$$

natomiast dla $p = 0$ daje się oszacować w następujący sposób,

$$W \geq 0,004y^4 + 0,044y^2z^2 + 0,013z^4. \quad (3.81)$$

Widać więc, że dla dowolnego zaburzenia z $a = 0$ wzmocniona nierówność Penrose'a w tym rzędzie rozwinięcia względem ϵ jest spełniona. Jeśli $p = p' = j = 0$ oraz $a \neq 0$ dane początkowe są sferycznie symetryczne i odpowiadają cięciu $t = f(r)$ metryki Schwarzschilda (2.39) [41], wysycającym tą zależność.

Ze względu na szczególny charakter uogólnionej konforemnej krzywizny zewnętrznej Bowena–Yorka (3.62) wzmocniona nierówność Penrose'a zostanie zweryfikowana również w ścisłym przypadku metodą numeryczną dla niezerowych fizycznych parametrów określających pęd oraz moment pędu ADM. Pozwoli to na oszacowanie zakresu zgodności stosowanego przybliżenia.

3.5 Numeryczna weryfikacja nierówności Penrose'a dla danych początkowych Bowena–Yorka

Konforemne dane początkowe Bowena–Yorka są określone przez płaską metrykę g oraz krzywiznę zewnętrzną A_{ij} (3.62) z $a = p' = 0$. Aby po transformacji opisywały hiperpowierzchnię z wewnętrznym brzegiem w $r = m/2$,

reprezentującym czarną dziurę, należy rozwiązać (3.25) z

$$\begin{aligned} (A_{rr})_h &= \frac{12p}{m^2}z, \\ A^2 &= \frac{1}{2r^6} [9(p^2r^2(2z^2+1) - 4j^2(z^2-1))] . \end{aligned} \quad (3.82)$$

W tym celu został wykorzystany język FreeFEM++ [42], dzięki któremu możliwa była również analiza analogicznego zagadnienia związanego z metryką Kerra [43]. Podstawy teoretyczne formalizmu stojącego za tym algorytmem numerycznym zostały przedstawione w dodatku D.

Metoda elementu skończonego wymaga, aby obszar na którym rozwiązywane jest równanie różniczkowe był skończony. Ze względu na to wprowadzona zostanie następująca zmienna,

$$x = \frac{r}{\frac{m}{2} + r} \quad (3.83)$$

Dziedziną zagadnienia brzegowego (3.25) staje się wówczas $\Omega = [\frac{1}{2}, 1] \times [-1, 1]$. Element objętości takiej przestrzeni to

$$dV = \frac{x^2}{(1-x)^4} dx dz. \quad (3.84)$$

Słabe sformułowanie (3.25) może być zapisane jako

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left((1-x)^4 \psi_{,x} v_{,x} + \frac{(1-x)^2(1-y^2)}{x^2} \psi_{,y} v_{,y} \right) dV + \\ & + \int_{-1}^1 v \left(\frac{1}{4\psi^3} A_{rr} - \frac{1}{m} \psi \right) dz - \frac{1}{8} \int_{\Omega} (v A^2 \psi^{-7}) dV = 0. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Ze względu na semiliniowy charakter zagadnienia (3.25), numeryczna implementacja (3.85) wymaga wykorzystania procedury iteracyjnej opartej na linearyzacji odpowiednich członów. Zastosowana formuła rekurencyjna dla początkowego rozwiązania $\psi_{(0)} = \psi_0$, czynnika konforemnego metryki Schwarzs-

schilda, to

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left((1-x)^4 \psi_{(n),x} v_{,x} + \frac{(1-x)^2 (1-y^2)}{x^2} \psi_{(n),y} v_{,y} \right) dV + \\
& + \int_{-1}^1 v \left(\frac{1}{4\psi_{(n-1)}^3} A_{rr} - \frac{1}{m} \psi_{(n)} \right) dz - \\
& - \frac{1}{8} \int_{\Omega} v A^2 \left(8\psi_{(n-1)}^{-7} - 7\psi_{(n-1)}^{-8} \psi_{(n)} \right) dV = 0,
\end{aligned} \tag{3.86}$$

gdzie n -ty krok pozwala otrzymać $\psi_{(n)}$ dla zadanego $\psi_{(n-1)}$. Została ona otrzymana przez przybliżenie członu $f(\psi_{(n)}) = \psi_{(n)}^{-7}$ przez pierwsze dwa wyrazy szeregu Taylora wokół $\psi_{(n-1)}$,

$$\psi_{(n)}^{-7} \approx \psi_{(n-1)}^{-7} - 7\psi_{(n-1)}^{-8} (\psi_{(n)} - \psi_{(n-1)}). \tag{3.87}$$

Zakończenie iteracji (3.86) następuje, gdy norma L^2 różnicy $\psi_{(n)} - \psi_{(n-1)}$,

$$\|\psi_{(n)} - \psi_{(n-1)}\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} (\psi_{(n)} - \psi_{(n-1)})^2 dV}. \tag{3.88}$$

staje się mniejsza od 10^{-4} . Analityczne rozwiązanie ψ_0 może również posłużyć do weryfikacji poprawności algorytmu numerycznego (dodatek E).

Czynnik konforemny ψ został wyznaczony dla $m = 2$ oraz $p \in [0, 3.5]$ i $j \in [0, 12]$. Badanie nierówności Penrose'a jedynie dla dodatnich wartości tych parametrów było konsekwencją niezmienniczości zagadnienia wobec zmiany ich znaku. Co więcej, wyniki numeryczne mogły być też uogólnione do przypadku dowolnego m dzięki przeskalowaniu zmiennych. Wielkość $\frac{1}{m^2} \left(P_I - p^2 - \frac{j^2}{4\pi|S_h|} \right)$, otrzymana dla $(p/m, j/m^2) \in [0, 1.7] \times [0, 3]$ poprzez aproksymację pomiędzy 273 punktami siatki, była zawsze większa lub równa zero. Stanowi to numeryczne potwierdzenie nierówności Penrose'a dla rozważanych danych początkowych. Wyniki przedstawione zostały na Rysunku 3.1 w postaci porównania $\frac{1}{m^2} \left(P_I - p^2 - \frac{j^2}{4\pi|S_h|} \right)$, otrzymanej w czwartym rzędzie rozwinięcia względem ϵ (wielomian (3.79) z $p' = 0$) z jej numerycznym odpowiednikiem. W otoczeniu $p = j = 0$ metoda przybliżona zaniża rzeczywistą różnicę pomiędzy masą oraz polem powierzchni i momentem pędu. Wartość dyskutowanej wielkości otrzymana tym sposobem zaczyna dominować dopiero poza tym obszarem.

3.6 Podsumowanie

Wyniki zawarte w tym rozdziale można podsumować w formie następującego twierdzenia,

Twierdzenie 1. *Niech $\Sigma = \mathbb{R}^3 \setminus B(0, \frac{m}{2})$ będzie powierzchnią początkową z płaską metryką g_{ij} i wewnętrznym brzegiem S_h , będącym sferą o promieniu $r = \frac{m}{2}$. Niech A_{ij} będzie osiowosymetrycznym, asymptotycznie płaskim rozwiązaniem więzu pędowego. Jeśli*

- *istnieje rozwiązanie ψ zagadnienia brzegowego dla równania Lichnerowicza,*
- *czynn timer konforemny ψ może być rozwinięty w szereg potęgowy względem parametru ϵ , proporcjonalnego do skali tensora A_{ij} ,*

to dane początkowe $(\psi^4 g_{ij}, \psi^{-2} A_{ij})$ spełniają wzmocnioną nierówność Penrose’a w drugim rzędzie rozwinięcia względem ϵ dla ogólnych zaburzeń oraz w czwartym rzędzie rozwinięcia dla uogólnionej konforemnej krzywizny zewnętrznej Bowena–Yorka.

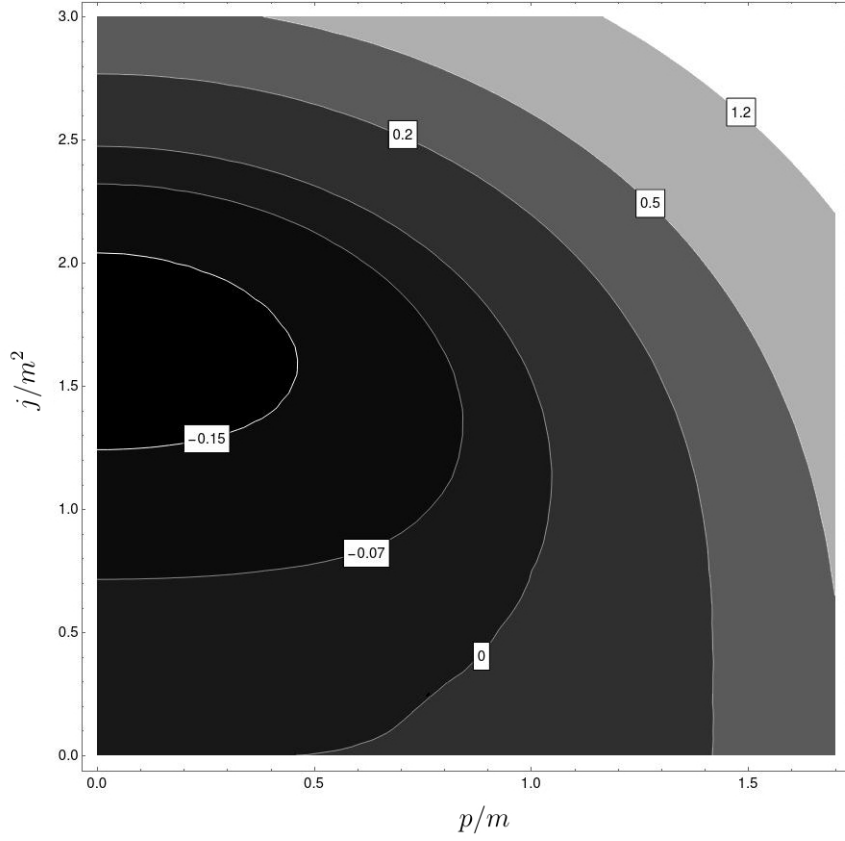
Rozważania dotyczące weryfikacji nierówności Penrose’a w przypadku maksymalnych danych początkowych były oparte o zadanie odpowiedniego warunku brzegowego na funkcję ψ . Gwarantował on, że po transformacji konforemnej sfera $r = m/2$ będzie zewnętrzną powierzchnią marginalnie złapaną. Istnienie rozwiązania otrzymanego w ten sposób zagadnienia brzegowego dla płaskiej metryki g_{ij} i bezśladowego A_{ij} zostało udowodnione w [30] dla następującego ograniczenia dotyczącego wartości składowej A_{rr} krzywizny zewnętrznej,

$$0 \leq (A_{rr})_h \leq \frac{4}{m}. \quad (3.89)$$

W przypadku A_{ij} danego przez (3.62) implikuje on $p = p' = 0$, co dla znikającego momentu pędu sprowadza sytuację do sferycznie symetrycznych danych początkowych, dla których nierówność Penrose’a jest spełniona. Porzucenie ograniczenia (3.89) jest jednak możliwe ze względu na znaczące uproszczenie dowodu istnienia rozwiązania w przypadku zaburzeń form fundamentalnych hiperpowierzchni schwarzschildowskiej. Zostało to przedstawione w dodatku F.

Warunki znikania śladu i dywergencji A_{ij} nie określają tego tensora w jednoznaczny sposób. W ogólności, odpowiedni wybór generujących go potencjałów mógłby przyczynić się do złamania nierówności Penrose’a nawet w przypadku przybliżonych danych początkowych. Jak się jednak okazuje, taka sytuacja nie ma miejsca. Naturalnym kierunkiem dalszych badań jest

rezygnacja z założenia o znikaniu śladu konforemnej krzywizny zewnętrznej aby uzyskać dodatkowy stopień swobody, który może mieć znaczący wpływ na zależność między masą, polem powierzchni oraz momentem pędu czarnej dziury.



Rysunek 3.1: Różnica pomiędzy wartością $\frac{1}{m^2} \left(P_I - p^2 - \frac{J^2}{4\pi|S_h|} \right)$ w czwartym rzędzie rozwinięcia względem parametru ϵ i wyznaczoną w sposób numeryczny.

Rozdział 4

Nierówność Penrose’a dla zaburzeń danych początkowych Schwarzschilda ze zmienną średnią krzywizną

Metoda konforemna generowania danych początkowych jest zazwyczaj wykorzystywana w przypadku maksymalnych hiperpowierzchni. W ogólności, jeśli nieobecna jest materia, prowadzi ona do sprzężonego układu równań (2.33) oraz (2.34),

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= \frac{\psi}{8}R + \frac{1}{12}\psi^5 H^2 - \frac{1}{8\psi^7}A_{ij}A^{ij}, \\ D_i A_j{}^i &= \frac{2}{3}\psi^6 D_j H.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Motywacją do rozpoczęcia badań dotyczących istnienia rozwiązań (4.1) była konstrukcja czasoprzestrzeni nie posiadających hiperpowierzchni ze stałym śladem krzywizny zewnętrznej [44]. Pierwszy dowód został przedstawiony w przypadku zamkniętej rozmaitości z ujemnym skłarem Ricciego i ograniczonym gradientem średniej krzywizny [45]. Wynik ten został następnie rozszerzony na hiperpowierzchnie asymptotycznie płaskie z materią i zewnętrze złapanym brzegiem [46]. Ograniczenie dotyczące śladu drugiej formy fundamentalnej zastąpiono przez warunek dotyczący normy całego tensora.

Niniejszy rozdział zawiera opis wyników zawartych w [47], dotyczących weryfikacji nierówności Penrose’a z momentem pędu dla zaburzonych danych początkowych Schwarzschilda z dowolną średnią krzywizną. Zostały one otrzymane metodą przybliżonego rozwiązywania układu (4.1), przy założeniu o możliwości rozwinięcia szukanych funkcji w szereg względem parametru ϵ .

Rolę pola powierzchni czarnej dziury spełniała miara wielkości zewnętrznie złapanej sfery, której istnienie było konsekwencją nałożenia odpowiedniego warunku brzegowego na czynnik ψ .

4.1 Konforemne sformułowanie równań więzów dla zaburzeń z dowolną średnią krzywizną

Porzucenie założenia o stałości średniej krzywizny zewnętrznej powoduje, że równanie Lichnerowicza i więz pędowy sprzęgają się ze sobą. Układ ten, wraz z warunkiem brzegowym (2.44),

$$n^i \partial_i \psi + \frac{1}{2} h \psi - \frac{1}{4\psi^3} A_{ij} n^i n^j + \frac{1}{6} \psi^3 H = 0 \text{ na } S_h, \quad (4.2)$$

gwarantującym istnienie powierzchni marginalnie złapanej, można rozwiązać w przybliżony sposób. Niech czynnik ψ , składowe bezśladowej części krzywizny zewnętrznej A_{ij} oraz jej ślad H dają się rozwinąć w szereg względem parametru ϵ ,

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), \\ A_{ij} &= A_{ij}^{(1)} + A_{ij}^{(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^3), \\ H &= H_1 + H_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), \end{aligned}$$

gdzie indeksy n oraz (n) oznaczają wkłady proporcjonalne do ϵ^n , a wewnętrzny brzeg S_h będzie sferą $r = m/2$. Wtedy, w najniższym nietrywialnym rzędzie, konforemne sformułowanie równań więzów przyjmuje postać

$$\begin{cases} \Delta \psi_1 = 0, \\ \psi_{1,r} + \frac{1}{m} \psi_1 - \frac{1}{4\psi_0^3} A_{rr}^{(1)} + \frac{1}{6} \psi_0^3 H_1 = 0 \text{ dla } r = \frac{m}{2}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_1 = 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

oraz

$$\nabla^j A_{ij}^{(1)} = \frac{2}{3} \psi_0^6 H_{1,i}. \quad (4.4)$$

Korzystając z argumentu zawartego w rozdziale 3 można pokazać, że wielkość

$$P_I = E^2 - \frac{|S_h|}{16\pi}, \quad (4.5)$$

występująca w nierówności Penrose'a, nie zawiera członów proporcjonalnych do ϵ . Pierwszy wyraz rozwinięcia P_I względem tego parametru dla danych z nieznikającą średnią krzywizną to

$$P_I^{(2)} = \left(\frac{m^2}{128\pi} \right)^2 \left\langle A_{rr}^{(1)} - \frac{2}{3} H_1 \psi_0^6 \right\rangle_h^2 - \frac{3m^2}{8\pi} \langle \psi_1^2 \rangle_h + \\ + \frac{m}{8\pi} \int_{m/2}^{\infty} r^2 (2 - \psi_0) \left\langle (A^{(1)})^2 \psi_0^{-7} - \frac{2}{3} H_1^2 \psi_0^5 \right\rangle dr. \quad (4.6)$$

Wzmocniona nierówność Penrose'a będzie spełniona w tym rzędzie, jeśli

$$P_I^{(2)} > (P^{(1)})^2 + (J^{(1)})^2 / 4m^2, \quad (4.7)$$

gdzie $P^{(1)}$ oraz $J^{(1)}$ są liniowymi wkładami do norm pędu i momentu pędu.

4.2 Osiowosymetryczne zaburzenia a nierówność Penrose'a

Pierwsze wyrazy rozwinięcia A_{ij} i H można otrzymać z (4.4). Dla osiowosymetrycznych zaburzeń $A_{\varphi r}^{(1)}$ oraz $A_{\varphi \theta}^{(1)}$ są generowane przez potencjał skalarny ω ,

$$A_{\varphi \theta}^{(1)} = \frac{\omega_{,r}}{\sin \theta}, \quad A_{\varphi r}^{(1)} = -\frac{\omega_{,\theta}}{r^2 \sin \theta}, \quad (4.8)$$

podobnie jak w przypadku maksymalnej hiperpowierzchni. Pozostałe składowe (4.4) to

$$(r^3 A_{rr}^{(1)} \sin \theta)_{,r} + (r A_{r\theta}^{(1)} \sin \theta)_{,\theta} = \frac{2}{3} r^3 \psi_0^6 H_{1,r} \sin \theta, \quad (4.9)$$

oraz

$$\left(A_{\theta\theta}^{(1)} \sin^2 \theta \right)_{,\theta} + \left(r^2 A_{r\theta}^{(1)} \right)_{,r} \sin^2 \theta + \\ + r^2 A_{rr}^{(1)} \sin \theta \cos \theta = \frac{2}{3} r^2 \psi_0^6 H_{1,\theta} \sin^2 \theta. \quad (4.10)$$

Niech

$$H_1 = \frac{3}{2} S_{,z}. \quad (4.11)$$

Z (4.9) wynika, że istnieje potencjał Q , który wraz z S określa składowe $A_{rr}^{(1)}$ i $A_{r\theta}^{(1)}$,

$$A_{rr}^{(1)} = \frac{1}{r^3} Q_{,z}, \quad A_{r\theta}^{(1)} = \frac{1}{r \sin \theta} (Q_{,r} - \kappa S_{,r}), \quad (4.12)$$

gdzie

$$\kappa = r^3 \psi_0^6. \quad (4.13)$$

Dla

$$F_{,z} = A_{\theta\theta}^{(1)} + \frac{1}{2} r^2 A_{rr}^{(1)}, \quad (4.14)$$

równanie (4.10) przyjmuje postać

$$\Delta_s F = (rQ_{,r} - r\kappa S_{,r})_{,r} - \frac{1}{2r} (z^2 - 1) (Q + 2\kappa S)_{,zz}, \quad (4.15)$$

w której występuje Δ_s , operator Laplace'a na sferze jednostkowej. Jeśli funkcje Q i S dają się zapisać w bazie wielomianów Legendre'a P_n , to warunkiem koniecznym istnienia rozwiązania F równania (4.14) jest znikanie członu proporcjonalnego do P_0 po jego prawej stronie,

$$(rQ_{0,r} - r\kappa S_{0,r})_{,r} + \frac{1}{3r} [(Q_{,z})_1 + 2\kappa (S_{,z})_1] = 0, \quad (4.16)$$

gdzie $(\cdot)_n$ oznacza n -ty współczynnik rozwinięcia w szereg względem P_n . Dodatkowo, ze względu na asymptotyczną płaskość oraz regularność krzywizny zewnętrznej na osi potencjały Q i S spełniają następujące ograniczenia (dodatek A),

$$(Q_{,r} - \kappa S_{,r}) \doteq \sin^2 \theta, \quad S = \mathcal{O}(r^{-2}), \quad Q = \mathcal{O}(r). \quad (4.17)$$

Weryfikacja nierówności Penrose'a jest oparta o odpowiednie szacowanie wyrażenia (4.6). Można je podzielić na części związane z S_h oraz momentem pędu,

$$P_I^{(2)} = \left(\frac{m^2}{128\pi} \right)^2 \left\langle A_{rr}^{(1)} - \frac{2}{3} H_1 \psi_0^6 \right\rangle_h^2 - \frac{3m^2}{8\pi} \langle \psi_1^2 \rangle_h + P_J + \tilde{P}_I. \quad (4.18)$$

gdzie

$$P_J = 2 \int_{m/2}^{\infty} dr \varrho r \int_{-1}^1 \left[\left(A_{\varphi\theta}^{(1)} \right)^2 + r^2 \left(A_{\varphi r}^{(1)} \right)^2 \right] \frac{dz}{1 - z^2}, \quad (4.19)$$

oraz

$$\varrho = \frac{m(1 - \frac{m}{2r})}{4r^3 \psi_0^7}. \quad (4.20)$$

Ostatni wyraz zawiera pozostałe składowe $A_{ij}^{(1)}$ oraz H_1 ,

$$\tilde{P}_I = \int_{m/2}^{\infty} dr \varrho r \int_{-1}^1 I dz, \quad (4.21)$$

dla funkcji I równej

$$I = 2r^2 \left(A_{r\theta}^{(1)} \right)^2 + 2 \left(A_{\theta\theta}^{(1)} + \frac{1}{2} r^2 A_{rr}^{(1)} \right)^2 + \frac{3}{2} r^4 \left(A_{rr}^{(1)} \right)^2 - \frac{2}{3} r^4 \psi_0^{12} H_1^2. \quad (4.22)$$

Ze względu na równanie (4.15), określające F (a tym samym $A_{\theta\theta}^{(1)}$), zależy ona od kwadratów drugich pochodnych Q i S względem r , co utrudnia oszacowanie $\tilde{P}_I$. Aby tego dokonać, zostaną wprowadzone nowe potencjały U i W ,

$$U = Q_{,r} - \kappa S_{,r}, \quad W = Q_{,z} - \kappa S_{,z}. \quad (4.23)$$

Mamy

$$\begin{aligned} A_{rr}^{(1)} &= \frac{1}{r^3} \left[W + \frac{\kappa}{\kappa_{,r}} (U_{,z} - W_{,r}) \right], \quad A_{r\theta}^{(1)} = \frac{U}{r \sin \theta}, \\ \Delta_s F &= (rU)_{,r} - \frac{1}{2r} (z^2 - 1) \left[W + \frac{3\kappa}{\kappa_{,r}} (U_{,z} - W_{,r}) \right]_{,z}, \\ H_1 &= \frac{3}{2\kappa_{,r}} (U_{,z} - W_{,r}). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ponieważ $\kappa_{,r} = 3\alpha r^2 \psi_0^5$, gdzie

$$\alpha = 1 - \frac{m}{2r}, \quad (4.25)$$

składowa $A_{rr}^{(1)}$ oraz H_1 przyjmują skończoną wartość na wewnętrznym brzegu S_h jeśli

$$U_{,z} = W_{,r} \text{ na } r = \frac{m}{2}. \quad (4.26)$$

Warunki całkowalności równania określającego F , (4.16), oraz regularności $A_{ij}^{(1)}$ na osi i asymptotycznej płaskości, (4.17), wyrażone za pomocą U i W to

$$r (rU_0)_{,r} + \frac{1}{3} W_1 + \frac{\kappa}{\kappa_{,r}} [(U_{,z})_1 - W_{1,r}] = 0 \quad (4.27)$$

oraz

$$U \doteq \sin^2 \theta, \quad U = \mathcal{O}(1), \quad W = \mathcal{O}(r). \quad (4.28)$$

Funkcja I (4.22) wynosi

$$I = \frac{2U^2}{1 - z^2} + 2F_{,z}^2 + \frac{3}{2r^2} W \left[W + \frac{2\kappa}{\kappa_{,r}} (U_{,z} - W_{,r}) \right]. \quad (4.29)$$

Wprowadzenie U i W umożliwia redukcję części I proporcjonalnej do $W_{,r}$ w całce (4.21) do wyrazów brzegowych,

$$\begin{aligned}\tilde{P}_I &= \int_{m/2}^{\infty} dr \rho r \int_{-1}^1 \left(\frac{2U^2}{1-z^2} + 2F_{,z}^2 + \frac{\psi_0}{r\alpha} W U_{,z} \right) dz + \\ &+ \frac{\pi}{8m^3} \int_{-1}^1 (W^2)_h dz,\end{aligned}\tag{4.30}$$

Aby zagwarantować regularność U na osi oraz prostotę wyrażenia (4.30) po rozwinięciu potencjałów w bazie wielomianów Legendre'a przyjęte zostanie następujące założenie o postaci U i W ,

$$U = \psi_0^3 (z^2 - 1) Y_{,z}, \quad W = 2r\psi_0^2 (X - \alpha Y), \tag{4.31}$$

gdzie X i Y są pewnymi funkcjami. Warunek (4.26), zapisany przy pomocy X i Y , to

$$Y - \Delta_s Y = \frac{m}{2} X_{,r} \quad \text{na } r = \frac{m}{2}, \tag{4.32}$$

natomiast równanie określające F sprowadza się do

$$\Delta_s \tilde{F} = \frac{1}{\alpha} (z^2 - 1) \left[r X_{,r} + \frac{1}{2} \psi_0 \Delta_s Y + \left(\psi_0 - \frac{3m}{r\psi_0} \right) Y \right]_{,z}, \tag{4.33}$$

z

$$\tilde{F} = \psi_0^{-3} F. \tag{4.34}$$

Mamy również

$$\tilde{P}_I = \frac{m}{2} \int_{m/2}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \psi_0} \int_{-1}^1 \left(\alpha \tilde{F}_{,z}^2 - X \Delta_s Y \right) dz + \frac{1}{4} \int_{-1}^1 X_h^2 dz. \tag{4.35}$$

Niech

$$X = \sum_{n=0} X_n P_n, \quad Y = \sum_{n=1} Y_n P_n. \tag{4.36}$$

Brak członu proporcjonalnego do P_0 w rozkładzie Y nie ogranicza ogólności prowadzonych rozważań, co wynika z definicji (4.31). Składowa $A_{rr}^{(1)}$ oraz H_1 przyjmują skończoną wartość na S_h , jeśli

$$(X_{0,r})_h = 0 \quad \text{oraz} \quad (Y_n)_h = \frac{m}{2(2N+1)} (X_{n,r})_h \quad \text{dla } n > 1, \tag{4.37}$$

gdzie

$$N = \frac{1}{2}n(n+1). \quad (4.38)$$

Warunek całkowalności równania (4.33) prowadzi do

$$Y_1 = \frac{r^2\psi_0}{3m}X_{1,r} \quad (4.39)$$

i jest zgodny z (4.37).

Pochodna funkcji F występująca w (4.35) jest określona przez współczynniki X_n i Y_n . Korzystając z własności wielomianów Legendre'a mamy

$$\tilde{F}_{,z} = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=2} (rX_{n,r} - \beta_n Y_n) \tilde{P}_n, \quad (4.40)$$

gdzie

$$\beta_n = (N-1)\psi_0 + \frac{3m}{r\psi_0}, \quad (4.41)$$

natomiast $\tilde{P}_n$ zostały zdefiniowane w rozdziale 3 za pomocą (3.18) i są ortogonalne (dodatek B).

Po wstawieniu rozkładu X i Y w bazie P_n oraz (4.40) do wzoru (4.35) otrzymujemy

$$\tilde{P}_I = \frac{2m}{3}I_1 + \frac{m}{2} \sum_{n=2} c_n I_n + \frac{1}{2} \sum_{n=0} \frac{(X_n)_h^2}{2n+1} \quad (4.42)$$

gdzie

$$I_1 = \int_{m/2}^{\infty} X_1 Y_1 \frac{dr}{r^2\psi_0}, \quad (4.43)$$

i

$$c_n = \frac{2n(n+1)}{(n-1)(n+2)(2n+1)}, \quad (4.44)$$

oraz, dla $n > 1$,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{m/2}^{\infty} [(rX_{n,r} - \beta_n Y_n)^2 + 2(N-1)\alpha X_n Y_n] \frac{dr}{\alpha r^2\psi_0} = \\ &= \int_{m/2}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\alpha r^2\psi_0} \left[Y_n - \frac{r}{\beta_n} X_{n,r} + \frac{(N-1)\alpha}{\beta_n^2} X_n \right]^2 dr - \\ &\quad - \frac{N-1}{m(2N+1)} (X_n)_h^2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

Funkcjonał I_n zawiera wyrażenie będące kwadratem kombinacji X_n i Y_n . Przyjmuje minimalną wartość, gdy

$$Y_n = \frac{r}{\beta_n} X_{n,r} - \frac{(N-1)\alpha}{\beta_n^2} X_n \text{ dla } n > 1, \quad (4.46)$$

co jest to zgodne z ograniczeniem (4.37). Mamy więc

$$I_n \geq -\frac{N-1}{m(2N+1)} (X_n)_h^2 \text{ dla } n > 1. \quad (4.47)$$

Ze względu na (4.39),

$$I_1 = \frac{1}{6m} \left(\lim_{r \rightarrow \infty} X_1^2 - (X_1)_h^2 \right). \quad (4.48)$$

Nierówność (4.47) i postać (4.48) mogą być wykorzystane do oszacowania funkcji $\tilde{P}_I$ (4.42),

$$\tilde{P}_I \geq \frac{1}{9} \lim_{r \rightarrow \infty} X_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(X_n)_h^2}{(2n+1)(n^2+n+1)}. \quad (4.49)$$

Do weryfikacji nierówności Penrose'a w drugim rzędzie rozwinięcia względem ϵ potrzebna jest jeszcze postać ψ_1 , będącej pierwszą poprawką do czynnika konforemnego. Występuje ona w $P_I^{(2)}$ (4.6) i jest funkcją harmoniczną z warunkiem brzegowym Robina, możliwą do wyznaczenia z układu (4.3). Po wykorzystaniu rozkładu X i Y w bazie P_n mamy

$$\begin{cases} \Delta \psi_1 = 0, \\ \psi_{1,r} + \frac{1}{m} \psi_1 - \frac{1}{m^2} X_h = 0 \text{ dla } r = \frac{m}{2}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_1 = 0. \end{cases} \quad (4.50)$$

Rozwiązanie (4.50) to

$$\psi_1 = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(X_n)_h}{m(2n+1)} \left(\frac{m}{2r} \right)^{n+1} P_n, \quad (4.51)$$

więc

$$\langle \psi_1^2 \rangle_h = \frac{4\pi}{m^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} (X_n)_h^2. \quad (4.52)$$

Ostatecznie, wstawiając oszacowanie $\tilde{P}_I$ (4.49) oraz (4.52) do $P_I^{(2)}$ otrzymujemy

$$P_I^{(2)} \geq P_J + \frac{1}{9} \lim_{r \rightarrow \infty} X_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+2)}{2(n^2+n+1)(2n+1)^3} (X_n)_h^2. \quad (4.53)$$

Liniowa poprawka do nieznikającej składowej pędu ADM może być wyznaczona z (2.52) i wynosi

$$P^{(1)} = \frac{1}{3} \lim_{r \rightarrow \infty} X_1. \quad (4.54)$$

Moment pędu ADM jest związany z $A_{\varphi r}$ i $A_{\varphi \theta}$, więc w pierwszym rzędzie rozwinięcia określa go potencjał ω (4.8). Podobnie jak w przypadku maksymalnej hiperpowierzchni, po uwzględnieniu warunków regularności na osi oraz asymptotycznej płaskości jego ogólna postać to

$$\omega = f(1-z^2)^2 + J^{(1)}(z^3 - 3z) + c, \quad (4.55)$$

gdzie f jest funkcją a c stałą. Umożliwia ona oszacowanie członu P_J występującego w (4.53),

$$P_J \geq \frac{(J^{(1)})^2}{4m^2}. \quad (4.56)$$

Ostatnim krokiem jest zapisanie $P_I^{(2)}$ przy pomocy energii ADM i pola zewnętrznej powierzchni marginalnie złapanej. Zgodnie z (4.5) mamy,

$$\begin{aligned} (E^{(2)})^2 - (P^{(1)})^2 &\geq \frac{|S_h|^{(2)}}{16\pi} + \frac{1}{4m^2} (J^{(1)})^2 + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+2)}{2(n^2+n+1)(2n+1)^3} (X_n)_h^2. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Ze względu na

$$X_h = \frac{m^2}{32} \left(A_{rr}^{(1)} - \frac{2}{3} H_1 \psi_0^6 \right)_h, \quad (4.58)$$

nierówność (4.57) z $H_1 = 0$ sprowadza się do (3.57) oraz (3.59). Dane dla których $f = 0$ i spełniona jest zależność (4.46) pomiędzy współczynnikami rozwinięcia funkcji X i Y w bazie wielomianów Legendre'a wysycają (4.57).

4.3 Podsumowanie

Wzmocniona nierówność Penrose'a jest spełniona dla szerokiej klasy danych początkowych z nieznikającą średnią krzywizną w drugim rzędzie rozwinięcia względem parametru ϵ . Stwierdzenie to może być sformalizowane przy wykorzystaniu następującej definicji,

Definicja 1. Dane początkowe nazywamy ogólnymi, jeśli **nie** jest spełniony co najmniej jeden z następujących warunków:

- Składowe $A_{\varphi r}^{(1)}$ oraz $A_{\varphi \theta}^{(1)}$ pierwszej poprawki do bezśladowej części konforemnego tensora krzywizny zewnętrznej wynoszą odpowiednio

$$A_{\varphi r}^{(1)} = -\frac{3J^{(1)}}{r^2} \sin^2 \theta, \quad A_{\varphi \theta}^{(1)} = 0, \quad (4.59)$$

- Wielkość $(A_{rr}^{(1)} - \frac{2}{3}H_1\psi_0^6)_h$ jest liniową funkcją zmiennej $z = \cos \theta$,
- Dla $n > 1$ współczynniki Y_n rozwinięcia Y w bazie wielomianów Legendre'a dają się wyrazić przez X_n zgodnie z (4.46).

Pierwszy warunek jest związany z wyborem najprostszej nietrywialnej postaci potencjału generującego ω (4.55) z nieznikającym wkładem do momentu pędu. Drugi jest konsekwencją nierówności (4.57) oraz (4.58). Ostatni warunek wynika z (4.45). Warto zauważyć, że (4.46) jest spełnione również dla $n = 1$, więc może być traktowane jako dodatkowy więź nałożony na pierwszą poprawkę do konforemnej krzywizny zewnętrznej. Po pomnożeniu (4.46) przez $4\beta_n^2$ (4.41) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \psi_0^2 \left(\Delta_s + 2 - \frac{6m}{r\psi_0^2} \right)^2 Y = & -2r\psi_0 \left(\Delta_s + 2 - \frac{6m}{r\psi_0^2} \right) X_{,r} + \\ & + 2\alpha (\Delta_s + 2) X + f_X(r), \end{aligned} \quad (4.60)$$

gdzie f_X zostało wprowadzone aby uwzględnić X_0 . Aby przekształcić (4.60) do postaci zawierającej składowe $A_{ij}^{(1)}$ i H_1 należy wykorzystać (4.33),

$$\partial_z (\Delta_s \tilde{F}) = -\frac{1}{2\alpha} \Delta_s \left[\psi_0 \left(\Delta_s + 2 - \frac{6m}{r\psi_0^2} \right) Y + 2rX_{,r} \right]. \quad (4.61)$$

oraz (4.31),

$$\Delta_s X = \frac{\Delta_s W}{2r\psi_0^2} - \frac{\alpha}{\psi_0^3} U_{,z}. \quad (4.62)$$

Ostatecznie, trzeci warunek z Definicji 1 jest równoważny z

$$\begin{aligned} & \left(\Delta_s + 2 - \frac{6m}{r\psi_0^2} \right) \left[\left(A_{\theta\theta}^{(1)} + \frac{1}{2}r^2 A_{rr}^{(1)} \right) \sin^2 \theta \right]_{,zz} = \\ & = (\Delta_s + 2) \left[\frac{\alpha}{\psi_0} \left(r A_{r\theta}^{(1)} \sin \theta \right)_{,z} - \frac{1}{2}r^2 \Delta_s \left(A_{rr}^{(1)} - \frac{2}{3}H_1\psi_0^6 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Równanie (4.63) w połączeniu z drugim warunkiem z Definicji 1 oraz regularnością $A_{ij}^{(1)}$ na osi jest równoważne z

$$A_{\theta\theta}^{(1)} + \frac{r^2}{2} A_{rr}^{(1)} = 0 \text{ na } S_h. \quad (4.64)$$

Główny wynik tego rozdziału może być sformułowany w postaci następującego twierdzenia,

Twierdzenie 2. *Niech $\Sigma = R^3 \setminus B(0, \frac{m}{2})$ będzie powierzchnią początkową z płaską metryką i wewnętrznym brzegiem S_h będącym sferą o promieniu $r = \frac{m}{2}$. Ponadto, niech istnieje osiowosymetryczne i asymptotycznie płaskie rozwiązanie konforemnego sformułowania równań więzów (4.1) z warunkiem brzegowym (4.2), zależne od parametru ϵ i zgodne z rozwinięciem (4.3) i (4.4). Wtedy dla ogólnych danych początkowych (Definicja 1) nierówność Penrose'a z momentem pędu w wiodącym rzędzie rozwinięcia względem ϵ jest spełniona.*

Jeśli dane początkowe spełniają wszystkie warunki zawarte w Definicji 1, to nierówność (4.57) jest wysycana. Podobna sytuacja miała miejsce w przypadku maksymalnej hiperpowierzchni rozważanej w rozdziale 3. Obecnie, analiza wyższych rzędów rozwinięcia nie jest jednak możliwa w pełnej ogólności. Jest to spowodowane istnieniem dodatkowego stopnia swobody w postaci funkcji X oraz niejednoznaczności w wyznaczeniu kolejnych poprawek do bezśladowej części konforemnego tensora krzywizny zewnętrznej oraz jego śladu.

Rozdział 5

Zakończenie i wnioski

Metoda konforemna pozwala na separację stopni swobody występujących w formach fundamentalnych hiperpowierzchni. Część danych można wtedy określić w dowolny sposób, natomiast pozostałe są związane ze sobą przez sprzężony układ równań różniczkowych. Podział ten stanowi naturalny punkt wyjścia do rozważania zaburzeń znanych rozwiązań. W przypadku maksymalnej hiperpowierzchni, płaskiej metryki tła oraz symetrii osiowej, postać konforemnego tensora krzywizny zewnętrznej jest niezależna od rozwiązania równania Lichnerowicza. Przybliżone dane początkowe mogą być wtedy generowane w sposób polegający na rozwinięciu czynnika ψ względem jego skali. Dla dowolnej średniej krzywizny separacja równań więzów nie zachodzi, jednak procedura ta może być uogólniona przy założeniu o analitycznej zależności konforemnych form fundamentalnych od pewnego parametru ϵ , stanowiącego charakterystyczną wielkość związaną z poprawkami do określonego znanego rozwiązania.

Zaburzenia danych początkowych Schwarzschilda są szczególnie interesujące w kontekście weryfikacji nierówności Penrose’a. Wynika to z faktu, że masa ADM związana z tą hiperpowierzchnią jest równa (z dokładnością do stałej) pierwiastkowi z pola jej wewnętrznego brzegu, reprezentującego czarną dziurę. Rozważanie zaburzeń omawianych danych początkowych pozwala więc na weryfikację nierówności Penrose’a w przybliżonym sensie. Jedy-
nym warunkiem jest istnienie powierzchni zewnętrznie złapanej, której pole będzie jedną z wielkości występujących w tej relacji. Metoda konforemna umożliwia spełnienie go przez zadanie odpowiedniego warunku brzegowego na czynnik konforemny. Co więcej, dla danych z płaską metryką tła oraz posiadających osiową symetrię część krzywizny zewnętrznej związana z momentem pędu separuje się. Stanowi to podstawę do uwzględnienia tej wielkości fizycznej w rozważaniach i weryfikacji wzmocnionej nierówności Penrose’a w niezależny sposób.

Powyższe obserwacje były punktem wyjścia badań przeprowadzonych w ramach niniejszej pracy doktorskiej. Nierówność Penrose’a z momentem pędu została potwierdzona dla konforemnie płaskich zaburzeń danych początkowych Schwarzschilda w pierwszym znaczącym rzędzie rozwinięcia. W przypadku maksymalnej hiperpowierzchni była ona wysycana dla uogólnionego tensora krzywizny zewnętrznej Bowena–Yorka. Jednakże, ze względu na zależność jedynie od stałych parametrów, przejście do wyższych rzędów rozwinięcia pozwoliło na weryfikację omawianej zależności dla tych danych. Posłużyły one również do oszacowania stopnia zgodności zastosowanego przybliżenia, przez porównanie z wynikami otrzymanymi drogą numeryczną. W ogólnym przypadku równania więzów są ze sobą sprzężone i kolejne poprawki do tensora krzywizny zewnętrznej wprowadzają dodatkowe stopnie swobody. Uniemożliwiło to weryfikację nierówności Penrose’a w wyższych rzędach rozwinięcia.

Czasoprzestrzeń Kerra nie posiada konforemnie płaskich cięć [48], więc założenia przyjęte w niniejszej pracy nie pozwalają na badanie zaburzeń jej hiperpowierzchni. Badane przypadki dopuszczały jednak niezerowy moment pędu, który będzie również dobrze określony po ewolucji danych początkowych ze względu na osiową symetrię [49]. Co więcej, jeśli jej końcowym etapem jest stacjonarne rozwiązanie równań Einsteina, to zgodnie z hipotezą o unikalności czarnych dziur będzie to czasoprzestrzeń Kerra.

Przeanalizowane przykłady pokazały, że otrzymanie danych początkowych dla których nie istnieje dolne ograniczenie masy przez pole powierzchni marginalnie złapanej i długość wektora momentu pędu nie jest możliwe, jeśli rozważane są próżniowe osiowosymetryczne zaburzenia maksymalnych hiperpowierzchni schwarzschildowskich. Naturalnym kierunkiem dalszych badań dotyczących weryfikacji nierówności Penrose’a w tym kontekście jest porzucenie jednego lub kilku z przyjętych założeń. Jednakże przedstawiona w tej pracy analiza wykorzystywała w dużym stopniu własności wielomianów Legendre’a, więc rozważanie hiperpowierzchni początkowych nie posiadających żadnych symetrii może być znacząco trudniejsze. Alternatywną drogą jest przejście do zaburzeń danych Kerra, wysycających wzmocnioną nierówność Penrose’a.

Dodatek A

Regularności na osi i asymptotyczna płaskość danych początkowych

Założenie o osiowej symetrii danych początkowych nakłada pewne ograniczenia na ich postać. Zostaną one zbadane na przykładzie konforemnego tensora krzywizny zewnętrznej A_{ij} na płaskiej przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Niech χ^i będzie nieznormalizowanym wektorem generującym tę izometrię, zapisanym w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y, z) ,

$$\chi = -y\partial_x + x\partial_y, \quad (\text{A.1})$$

Bezsładowy tensor A_{ij} jest osiowosymetryczny, jeśli

$$\mathcal{L}_\chi A_{ij} = \chi^k \partial_k A_{ij} + A_{nj} \partial_i \chi^n + A_{ni} \partial_j \chi^n = 0. \quad (\text{A.2})$$

Niech $A_{ij} \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Składowa $\mathcal{L}_\chi A_{zz}$ równania (A.2) to

$$-yA_{zz,x} + xA_{zz,y} = 0, \quad (\text{A.3})$$

co nie narzuca żadnego ograniczenia na A_{zz} na osi symetrii. Dla $ij = xz, yz$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} -yA_{xz,x} + xA_{xz,y} + A_{yz} &= 0, \\ -yA_{yz,x} + xA_{yz,y} - A_{xz} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

skąd wynika

$$A_{xz}|_{x=y=0} = A_{yz}|_{x=y=0} = 0, \quad (\text{A.5})$$

Pozostałe składowe równania (A.2) to

$$\begin{aligned} -yA_{xx,x} + xA_{xx,y} + 2A_{xy} &= 0, \\ -yA_{yy,x} + xA_{yy,y} - 2A_{xy} &= 0, \\ -yA_{xy,x} + xA_{xy,y} + A_{yy} - A_{xx} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

więc

$$A_{xy}|_{x=y=0} = 0 \quad (\text{A.7})$$

oraz A_{xx} i A_{yy} przyjmują dowolną wartość dla $x = y = 0$, co jest konsekwencją znikania śladu tensora A_{ij} .

Powyższe rozważania prowadzą do następujących ograniczeń dotyczących postaci składowych A_{ij} w sferycznym układzie współrzędnych,

$$\begin{aligned} A_{rr} &\doteq f_{reg}(\cos \theta), \\ A_{r\theta} &\doteq f_{reg}(\sin \theta), \\ A_{r\varphi} &\doteq f_{reg}(\sin^2 \theta), \\ A_{\theta\theta} &\doteq f_{reg}(\cos \theta), \\ A_{\theta\varphi} &\doteq f_{reg}(\sin \theta), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

gdzie symbol $\doteq$ oznacza zachowanie w pobliżu osi symetrii a f_{reg} funkcję regularną.

Warunki asymptotycznej płaskości danych początkowych implikują,

$$\begin{aligned} A_{rr} &= \mathcal{O}(r^{-2}), \\ A_{r\theta} &= \mathcal{O}(r^{-1}), \\ A_{r\varphi} &= \mathcal{O}(r^{-1}), \\ A_{\theta\theta} &= \mathcal{O}(1), \\ A_{\theta\varphi} &= \mathcal{O}(1). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

dla r dążącego do nieskończoności. Mamy również

$$A^2 = 2 \left(A_{rr}^2 + \frac{1}{r^4} A_{\theta\theta}^2 + \frac{1}{r^2} A_{r\theta}^2 + \frac{1}{r^2} A_{rr} A_{\theta\theta} \right) = \mathcal{O}(r^{-4}). \quad (\text{A.10})$$

Dodatek B

Własności wielomianów Legendre’a

Z definicji wielomianów Legendre’a P_k wynika,

$$\int_{-1}^1 P_k(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2k+1} \delta_{kn}, \quad (\text{B.1})$$

$$P_k(\pm 1) = (\pm 1)^k, \quad (\text{B.2})$$

$$\sum_k ((z^2 - 1) P_{k,z})_{,z} = \sum_k k(k+1) P_k, \quad (\text{B.3})$$

$$P_{k,z} = \frac{k(k+1)}{2k+1} \left(\frac{P_{k-1} - P_{k+1}}{1 - z^2} \right), \quad (\text{B.4})$$

$$\int_{-1}^1 ((1 - z^2) P_{k,z} P_{l,z}) dz = \frac{2k(k+1)}{2k+1} \delta_{kl}, \quad (\text{B.5})$$

$$P_{k+1,z} = \sum_{n=0} (2(k-2n)+1) P_{k-2n}, \quad (\text{B.6})$$

$$P_{k-1,z}(\pm 1) = \frac{1}{2} (\pm 1)^k k(k-1). \quad (\text{B.7})$$

Dowód ortogonalności wielomianów $\tilde{P}_n$

Twierdzenie 3. Niech $n \geq 2$. Wielomiany $\tilde{P}_n$,

$$\tilde{P}_n = \frac{1}{n+2} \left(nP_n - \frac{2}{n-1} P_{n-1,z} \right) \quad (\text{B.8})$$

są ortogonalne,

$$\int_{-1}^1 \left(\tilde{P}_k \tilde{P}_n \right) dz = \frac{2n(n+1)}{(n-1)(n+2)(2n+1)} \delta_{kn}. \quad (\text{B.9})$$

Dowód. Całka w (B.9) składa się z kilku części. Dla $k \leq n$ są one dane przez

$$\int_{-1}^1 (P_k P_n) dz = \frac{2}{(2n+1)} \delta_{kn}, \quad (\text{B.10})$$

$$\int_{-1}^1 (P_k P_{n-1,z}) dz = \left([P_k P_{n-1}]_{-1}^1 - 2\delta_{kn} \right) = 1 - (-1)^{k+n-1} - 2\delta_{kn}, \quad (\text{B.11})$$

$$\int_{-1}^1 (P_{k-1,z} P_n) dz = 0, \quad (\text{B.12})$$

$$\int_{-1}^1 (P_{k-1,z} P_{n-1,z}) dz = [P_{k-1,z} P_{n-1}]_{-1}^1 = \frac{k(k-1)}{2} \left(1 - (-1)^{k+n-1} \right) \quad (\text{B.13})$$

gdzie wykorzystane zostały wzory (B.1), (B.2), (B.6) i (B.7). Wstawienie powyższych zależności do (B.9) prowadzi do

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left(\tilde{P}_k \tilde{P}_n \right) dz &= \frac{1}{(n+2)^2} \left(\frac{2n^2}{(2n+1)} + \frac{4n}{(n-1)} \right) \delta_{nk} - \\ &- \frac{2k \left(1 - (-1)^{k+n-1} \right)}{(n+2)(k+2)(n-1)} + \frac{2k \left(1 - (-1)^{k+n-1} \right)}{(n+2)(n-1)(k+2)} = \\ &= \frac{2n(n+1)}{(n-1)(n+2)(2n+1)} \delta_{kn}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

□

Dodatek C

Poprawki ψ_2 i ψ_3 do czynnika konforemnego dla uogólnionej krzywizny zewnętrznej Bowena–Yorka

Rozwiązanie zagadnień brzegowych (3.68) oraz (3.76) dla konforemnej krzywizny zewnętrznej (3.62) jest możliwe dzięki rozkładowi niejednorodności w bazie wielomianów Legendre’a P_k . Pozwala to na sprowadzenie ich do skończonej liczby zwyczajnych równań różniczkowych drugiego rzędu zmiennej r .

Człony źródłowe w (3.68) mogą być zapisane w następujący sposób,

$$\frac{1}{8}A^2 = \sum_{n=0}^2 \alpha_n P_n, \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{3}{64}A_{rr}\psi_1 = \sum_{n=0}^2 \beta_n P_n, \quad (\text{C.2})$$

gdzie

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{3(2pr^2p' + 5p'^2 + r^2(a^2 + 8J^2 + 5p^2r^2))}{16r^8}, \\ \alpha_1 &= \frac{9a(p' + pr^2)}{8r^7}, \\ \alpha_2 &= \frac{3(4pr^2p' + p'^2 - 2j^2r^2 + p^2r^4)}{4r^8}, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

oraz

$$\begin{aligned}\beta_0 &= -\frac{3(8p'(2p' + m^2p) + 4a^2m^2 + m^4p^2)}{128m^7}, \\ \beta_1 &= -\frac{3a(4p' + m^2p)}{16m^6}, \\ \beta_2 &= -\frac{3(4p' + m^2p)^2}{64m^7}.\end{aligned}\tag{C.4}$$

Dla ψ_2 określonego jako

$$\psi_2 = \psi_{20} + \psi_{21}P_1 + \psi_{22}P_2\tag{C.5}$$

zagadnienie brzegowe (3.68) jest równoważne z

$$\begin{aligned}\begin{cases} (r^2\psi_{20,r})_{,r} + \frac{r^2}{\psi_0^7}\alpha_0 = 0, \\ \left(\psi_{20,r} + \frac{1}{m}\psi_{20} + \beta_0\right)_h = 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_{20} = 0, \end{cases} & \begin{cases} (r^2\psi_{21,r})_{,r} - 2\psi_{21} + \frac{r^2}{\psi_0^7}\alpha_1 = 0, \\ \left(\psi_{21,r} + \frac{1}{m}\psi_{21} + \beta_1\right)_h = 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_{21} = 0, \end{cases} \\ & \begin{cases} (r^2\psi_{22,r})_{,r} - 6\psi_{22} + \frac{r^2}{\psi_0^7}\alpha_2 = 0, \\ \left(\psi_{22,r} + \frac{1}{m}\psi_{22} + \beta_2\right)_h = 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_{22} = 0. \end{cases}\end{aligned}\tag{C.6}$$

Ostatecznie,

$$\begin{aligned}\psi_2 &= \frac{1}{819200m^8r^8\psi_0^5} \left\{ 160m^5r^2 \left(-8r^5(14a^2 - 128j^2 - 225m^2p^2 + 28pp') + \right. \right. \\ &+ 20mr^4(-14a^2 + 128j^2 + 105m^2p^2 - 28pp') + \\ &+ 20m^2r^3(-14a^2 + 128j^2 + 65m^2p^2 - 28pp') + \\ &+ m^4r \left(-67a^2 + 64j^2 + \frac{165m^2p^2}{2} - 134pp' \right) + \\ &+ 10m^3r^2(-22a^2 + 64j^2 + 45m^2p^2 - 44pp') - \\ &\left. - \frac{5}{4}(6a^2m^5 - 5m^7p^2 + 4m^3p'(3m^2p + 32p')) \right) - \\ &- 20am^5rz(4(23m^5 + 230m^4r + 920m^3r^2 + 560m^2r^3 + 560mr^4 + 224r^5)p' + \\ &+ m^2p(17m^5 + 170m^4r + 680m^3r^2 + 1232m^2r^3 + 80mr^4 - 4576r^5)) + \\ &+ (3z^2 - 1)(m^7(32r^5(10691m^2p^2 - 1280j^2) - 4669m^7p^2 - 33250m^6p^2r - \\ &- 65800m^5p^2r^2 + 47600m^4p^2r^3 + 316400m^3p^2r^4 + 76800mp^2r^6) + \\ &+ 6720(m + 2r)^5 \left[m^9p^2 \left(\ln(m) - \ln\left(\frac{m}{2} + r\right) \right) - \right. \\ &\left. - 16p'^2 \left(m^5 \ln(2) + 32r^5 \left(\ln\left(\frac{m}{2} + r\right) - \ln(r) \right) \right) \right] - \end{aligned}\tag{C.7}$$

$$\begin{aligned}
& -40m^7p(3m^5 + 30m^4r + 120m^3r^2 + 240m^2r^3 + \\
& + 240mr^4 - 1952r^5)p' + 16m(4639m^9 + 46390m^8r + \\
& + 185560m^7r^2 + 371120m^6r^3 + 390320m^5r^4 + 639968m^4r^5 + \\
& + 2759680m^3r^6 + 6737920m^2r^7 + 7741440mr^8 + 3440640r^9)p'^2) \Big\}
\end{aligned}$$

Rozwiązanie (3.76) wymaga rozkładu następujących funkcji,

$$\frac{7}{8}A^2\psi_1 = \sum_{n=0}^3 \mu_n P_n, \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{3}{64}A_{rr}(\psi_1^2 - \psi_2) = \sum_{n=0}^3 \nu_n P_n. \quad (\text{C.9})$$

Dla uogólnionej krzywizny zewnętrznej Bowena–Yorka (3.62) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= -\frac{21a}{256mr^9} \left[r^2 (2a^2 + 16j^2 + p^2 (m^2 + 10r^2)) + \right. \\
& \quad \left. + p (m^2 + 8r^2) p' + 14p'^2 \right], \\
\mu_1 &= -\frac{1}{2560mr^{10}} \left[21 \left(p' (2r^2 (70a^2 + 48j^2 + 3p^2 (7m^2 + 22r^2)) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 3p' (11m^2p + 44p' + 56pr^2)) + m^2pr^2 (5a^2 + 24j^2) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 3pr^4 (40a^2 + 11m^2p^2) \right) \right], \\
\mu_2 &= -\frac{21a (r^2 (p^2 (m^2 + 4r^2) - 8j^2) + p (m^2 + 20r^2) p' + 8p'^2)}{128mr^9}, \\
\mu_3 &= -\frac{63 (m^2p + 4p') (-2j^2r^2 + p^2r^4 + 4pr^2p' + p'^2)}{640mr^{10}},
\end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

oraz

$$\begin{aligned}
\nu_0 &= \frac{a (m^2 (468a^2 - 1056j^2 - 571m^2p^2) + 8p' (269m^2p + 490p'))}{10240m^9}, \\
\nu_1 &= \frac{3}{512000m^{10}} \left[4p' \left(m^2 (18700a^2 - 3 (8480j^2 + 4413m^2p^2)) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 12p' (m^2p(107520 \ln(2) - 72377) + 12(35840 \ln(2) - 24669)p') \right) + \right. \\
& \quad \left. + m^4p (17500a^2 - 3 (8480j^2 + 6043m^2p^2)) \right], \\
\nu_2 &= \frac{a}{12800m^9} \left[120j^2m^2 + 497m^4p^2 + 8p' \left(545m^2p + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (80640 \ln(2) - 54674) p' \right) \right], \\
\nu_3 &= \frac{9 (m^2p + 4p')}{64000m^{10}} \left[60j^2m^2 + 31m^4p^2 + 4p' \left(65m^2p + \right. \right.
\end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

$$+ (80640 \ln(2) - 55724) p' \Big] \Big].$$

Analogicznie do (C.6), funkcja ψ_3 może być określona przez współczynniki rozkładu w bazie wielomianów Legendre'a,

$$\psi_3 = \psi_{30} + \psi_{31}P_1 + \psi_{32}P_2 + \psi_{33}P_3, \quad (\text{C.12})$$

spełniające następujące równania różniczkowe,

$$\begin{cases} (r^2\psi_{30,r})_{,r} = \frac{r^2}{\psi_0^8}\mu_0, \\ \left(\psi_{30,r} + \frac{1}{m}\psi_{30} - \nu_0\right)_h = 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_{30} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (r^2\psi_{31,r})_{,r} - 2\psi_{31} = \frac{r^2}{\psi_0^8}\mu_1, \\ \left(\psi_{31,r} + \frac{1}{m}\psi_{31} - \nu_1\right)_h = 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_{31} = 0, \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

$$\begin{cases} (r^2\psi_{32,r})_{,r} - 6\psi_{32} = \frac{r^2}{\psi_0^8}\mu_2, \\ \left(\psi_{32,r} + \frac{1}{m}\psi_{32} - \nu_2\right)_h = 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_{32} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (r^2\psi_{33,r})_{,r} - 12\psi_{33} = \frac{r^2}{\psi_0^8}\mu_3 \\ \left(\psi_{33,r} + \frac{1}{m}\psi_{33} - \nu_3\right)_h = 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_{33} = 0. \end{cases}$$

Ostatecznie,

$$\begin{aligned} \psi_3 = & \frac{1}{112000m^{12}r^{10}\psi_0^6} \left\{ \frac{175}{64}ar^3 \left[(-17a^2 + 14j^2 + 29m^2p^2)m^6 - 148pp'm^6 + \right. \right. \\ & + 4r(-43a^2 + 106j^2 + 101m^2p^2 - 172pp')m^5 - 1120p'^2m^4 + 12r^2(-53a^2 + 326j^2 + \\ & + 201m^2p^2 - 212pp')m^4 - 800r^3(a^2 - 22j^2 - 10m^2p^2 + 4pp')m^3 + 400r^4(-3a^2 + 66j^2 + \\ & + 37m^2p^2 - 12pp')m^2 + 960r^5(-a^2 + 22j^2 + 17m^2p^2 - 4pp')m - 320r^6(a^2 - 22j^2 - \\ & \left. - 17m^2p^2 + 4pp') \right] m^7 + 224r^2z \left[p \left(\frac{33577m^8}{128} + \frac{100731rm^7}{32} + \frac{1024635r^2m^6}{64} + \right. \right. \\ & + \frac{394265r^3m^5}{8} + \frac{908445r^4m^4}{8} + 215238r^5m^3 + \frac{603567r^6m^2}{2} - \frac{3045}{8}(m+2r)^6 \ln(2)m^2 + \\ & + 254100r^7m + 92400r^8) p'^2m^3 + 2 \left(\frac{134533m^8}{256} + \frac{403599rm^7}{64} + \frac{2052645r^2m^6}{64} + \right. \\ & + \frac{788605r^3m^5}{8} + \frac{3634005r^4m^4}{16} + \frac{1721949r^5m^3}{4} + \frac{2414283r^6m^2}{4} - \\ & \left. - \frac{3045}{4}(m+2r)^6 \ln(2)m^2 + 508200r^7m + 184800r^8) p'^3m + \frac{1}{8192} \left(m^7p(-175(3m^6 + \right. \right. \\ & + 36rm^5 + 180r^2m^4 + 352r^3m^3 + 144r^4m^2 - 1728r^5m - 576r^6)a^2 + 30j^2(21m^6 + 252rm^5 + \\ & + 1260r^2m^4 + 5920r^3m^3 + 8880r^4m^2 + 7104r^5m + 2368r^6) + 2m^2p^2(291m^6 + 3492rm^5 + \\ & + 17460r^2m^4 + 47440r^3m^3 + 80400r^4m^2 + 108672r^5m + 36224r^6)) \Big) \Big] + \\ & \left. + \frac{1}{2048} \left(m^5(-25(33m^6 + 396rm^5 + 1980r^2m^4 + 800r^3m^3 + 1200r^4m^2 + 960r^5m + \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 320r^6)a^2 + 30j^2(21m^6 + 252rm^5 + 1260r^2m^4 + 5920r^3m^3 + 8880r^4m^2 + 7104r^5m + \\
& + 2368r^6) + m^2p^2(357m^6 + 4284rm^5 + 21420r^2m^4 + 92480r^3m^3 + 157200r^4m^2 + \\
& + 214464r^5m + 71488r^6)p') + \frac{5775}{2}r^3(m+2r)^6 \left(\ln(r) - \ln\left(\frac{m}{2} + r\right) \right) p'^2 (pm^2 + 4p') \Big] m^2 + \\
& + 56ar(3z^2 - 1) \left[-\frac{1}{256}525 \left(p^2 \left(\ln(m) - \ln\left(\frac{m}{2} + r\right) \right) m^9 - \right. \right. \\
& - 1024pr^5 \left(\ln(r) - \ln\left(\frac{m}{2} + r\right) \right) p'm^2 - 8192r^5 \left(\ln(r) - \ln\left(\frac{m}{2} + r\right) \right) p'^2 (m+2r)^6 + \\
& + \frac{1}{2}m \left(\frac{772227m^{10}}{1024} + \frac{2316681rm^9}{256} + \frac{11583405r^2m^8}{256} + \frac{3861135r^3m^7}{32} + \frac{11751405r^4m^6}{64} + \right. \\
& + \frac{3636681r^5m^5}{16} + \frac{10127427r^6m^4}{16} - \frac{8715}{8}(m+2r)^6 \ln(2)m^4 + 1915200r^7m^3 + \\
& + 3315200r^8m^2 + 2956800r^9m + 1075200r^{10} \Big) p'^2 + \frac{1}{32768} \left(p^2(46143m^6 + 419316rm^5 + \right. \\
& + 1290180r^2m^4 + 752480r^3m^3 - 4247280r^4m^2 - 9521344r^5m - 7235648r^6)m^9 + \\
& + 80j^2(m^6 + 12rm^5 + 60r^2m^4 + 160r^3m^3 + 240r^4m^2 - 30528r^5m - 10176r^6)m^7 \Big) + \\
& + \frac{5}{4}m^3p \left(\frac{37123m^{10}}{1024} + \frac{111369rm^9}{256} + \frac{556845r^2m^8}{256} + \frac{185615r^3m^7}{32} + \frac{565245r^4m^6}{64} + \right. \\
& + \frac{179769r^5m^5}{16} + \frac{505683r^6m^4}{16} - \frac{105}{2}(m+2r)^6 \ln(2)m^4 + 95760r^7m^3 + 165760r^8m^2 + \\
& + 147840r^9m + 53760r^{10} \Big) p' \Big] m^2 - 96z(5z^2 - 3) \left(\frac{pm^2}{4} + p' \right) \left[67200 \left(\frac{p^2 \ln(m)m^{11}}{2048} + \right. \right. \\
& + 4r^7 \ln(r) (j^2m^2 - 2pp'm^2 - 30p'^2) + \\
& + \ln\left(\frac{m}{2} + r\right) \left(-\frac{p^2m^{11}}{2048} - 4r^7(j^2m^2 - 2pp'm^2 - 30p'^2) \right) \Big] \left(\frac{m}{2} + r \right)^6 + \\
& + \frac{1}{2}m \left(-\frac{46409p^2m^{16}}{65536} - \frac{105627p^2rm^{15}}{16384} + \frac{186315j^2m^{14}}{4096} - \frac{326535p^2r^2m^{14}}{16384} + \right. \\
& + \frac{558945j^2rm^{13}}{1024} - \frac{24845p^2r^3m^{13}}{2048} + \frac{261465p^2r^4m^{12}}{4096} + \frac{2794725j^2r^2m^{12}}{1024} + \\
& + \frac{153093p^2r^5m^{11}}{1024} + \frac{931575}{128}j^2r^3m^{11} + \frac{118231p^2r^6m^{10}}{1024} + \frac{2794725}{256}j^2r^4m^{10} + \\
& + \frac{558945}{64}j^2r^5m^9 + \frac{225515}{64}j^2r^6m^8 + 20580j^2r^7m^7 + 146160j^2r^8m^6 + \\
& + 210 \left(\frac{m}{2} + r \right)^6 \ln(2) (-20j^2m^2 + 40pp'm^2 + 609p'^2)m^6 + 478800j^2r^9m^5 + \\
& + 828800j^2r^{10}m^4 + 739200j^2r^{11}m^3 + 268800j^2r^{12}m^2 - \frac{35}{2}p \left(\frac{21285m^{12}}{4096} + \right. \\
& + \frac{63855rm^{11}}{1024} + \frac{319275r^2m^{10}}{1024} + \frac{106425r^3m^9}{128} + \frac{319275r^4m^8}{256} + \frac{63855r^5m^7}{64} + \\
& + \frac{25765r^6m^6}{64} + 2352r^7m^5 + 16704r^8m^4 + 54720r^9m^3 + 94720r^{10}m^2 + 84480r^{11}m +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 30720r^{12})p'm^2 - \left(\frac{5672921m^{12}}{4096} + \frac{17018763rm^{11}}{1024} + \frac{85093815r^2m^{10}}{1024} + \frac{28364605r^3m^9}{128} + \right. \\
& + \frac{85133015r^4m^8}{256} + \frac{16948203r^5m^7}{64} + \frac{6825401r^6m^6}{64} + 617400r^7m^5 + 4384800r^8m^4 + \\
& \left. + 14364000r^9m^3 + 24864000r^{10}m^2 + 22176000r^{11}m + 8064000r^{12})p'^2 \right) \Bigg) \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Dodatek D

Metoda elementu skończonego w zastosowaniu do eliptycznych równań różniczkowych

Równanie Lichnerowicza na płaskiej przestrzeni (2.37) określa czynnik konforemny dzięki któremu jest możliwe dokonanie transformacji od metryki euklidesowej i bezdywergencyjnego tensora A_{ij} do form fundamentalnych hiperpowierzchni początkowej Σ . Ma ono eliptyczny charakter i ze względu na nieliniowy człon analityczne rozwiązanie znane jest jedynie w przypadku, gdy konforemna krzywizna zewnętrzna A_{ij} znika (funkcja ψ jest wtedy harmoniczna). Aby otrzymać nietrywialne dane początkowe należy więc skorzystać z odpowiednich technik numerycznych dedykowanym równaniom różniczkowym tego typu. Rozdział ten jest poświęcony wstępowi teoretycznemu do metody elementu skończonego [35], która będzie zastosowana w dalszej części pracy do rozwiązania (2.37) w ogólnym przypadku.

Silne i słabe sformułowanie eliptycznych równań różniczkowych

Niech dane będzie następujące modelowe zagadnienie brzegowe,

$$\begin{cases} \Delta u = f_1 \text{ w } \Omega, \\ u_{,x} + gu = f_2, \text{ na } \partial\Omega_1 \\ u = 1 \text{ na } \partial\Omega_2, \\ u_{,y} = 0 \text{ na } \partial\Omega_3, \partial\Omega_4 \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

gdzie $\Omega = [0, 1] \times [-1, 1] \in \mathbb{R}^2$, $\partial\Omega_1 = \{(x, y) : x = 0\}$, $\partial\Omega_2 = \{(x, y) : x = 1\}$, $\partial\Omega_3 = \{(x, y) : y = -1\}$, $\partial\Omega_4 = \{(x, y) : y = 1\}$ a f_1 , f_2 i g są pewnymi

funkcjami. Postać (D.1) jest jego silnym sformułowaniem. Aby zdefiniować słabe sformułowanie należy wprowadzić odpowiednią przestrzeń funkcyjną z normą uwzględniającą zachowanie się pochodnych jej elementów.

Niech μ i ν , $\mu \in C^1(\Omega)$ oraz $\nu \in C_c^\infty(\Omega)$. Jeśli istnieje pewna funkcja w , taka że

$$\int_{\Omega} (\mu \nu_{,i}) dV = - \int_{\Omega} (\nu w) dV, \quad (D.2)$$

to w jest słabą pochodną μ , co wyraża się w następującej notacji, $w = \mu_{,i}$. Przestrzeń Sobolewa H^1 może być teraz zdefiniowana jako

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : v_{,i} \in L^2(\Omega)\}. \quad (D.3)$$

Istotnym podzbiorem $H^1(\Omega)$ jest $H_{\partial\Omega}^1(\Omega)$,

$$H_{\partial\Omega}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ na } \partial\Omega_2\}. \quad (D.4)$$

W kontekście metody elementu skończonego elementy $H_{\partial\Omega}^1(\Omega)$ noszą nazwę funkcji testowych.

Aby otrzymać słabe sformułowanie zagadnienia (D.1), należy pomnożyć równanie $\Delta u = f_1$ przez funkcję testową v , a następnie wykorzystać całkowanie przez części,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v \Delta u) dV &= - \int_{\Omega} (v_{,i} u^i) dV - \oint_{\partial\Omega_1} (v f_2) dy + \\ &+ \oint_{\partial\Omega_1} (v g u) dy = \int_{\Omega} (v f_1) dV, \end{aligned} \quad (D.5)$$

gdzie wykorzystane zostało znikanie v na brzegu $\partial\Omega_2$. Dla funkcji u różniczkowalnej w sposób ciągły dwukrotnie (D.1) i (D.5) są sobie równoważne. Jednakże, w postaci całkowej (D.5) występuje jedynie pierwsza pochodna u , więc równanie to jest spełnione dla szerszej klasy funkcji, kosztem wprowadzenia dowolnego v z podzbioru przestrzeni Sobolewa H^1 . Jest to słabe sformułowanie zagadnienia (D.1). Metoda elementu skończonego wykorzystuje je do wyznaczenia u w oparciu o przeprowadzoną w odpowiedni sposób dyskretyzację równania całkowego (D.5) oraz dziedziny Ω .

Dyskretyzacja

Niech p będzie funkcją liniową określoną na Ω ,

$$p(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y, \quad (D.6)$$

gdzie α , β i γ są stałymi. Zbiór wszystkich takich p będzie oznaczony przy pomocy symbolu $\mathcal{P}_1$.

Parametryzacja elementów $\mathcal{P}_1$ może być dokonana przez podanie wartości p na wierzchołkach pewnego trójkąta zawartego w dziedzinie Ω . Ponadto, każda funkcja $p \in \mathcal{P}_1$ ograniczona do jednego z jego boków jest zadana w jednoznaczny sposób przez wartości na definiujących go wierzchołkach. O ile stałe α , β i γ charakteryzują konkretny element $\mathcal{P}_1$ w naturalny sposób, to wybór wartości $p \in \mathcal{P}_1$ na wierzchołkach trójkąta jest bardziej użyteczny z punktu widzenia dyskretyzacji dziedziny i określa lokalne stopnie swobody tej przestrzeni.

Dowolna dziedzina Ω może być pokryta trójkątami w taki sposób, że przyległe do siebie figury mają wspólny wierzchołek lub całą krawędź. Zbiór elementów takiego rozkładu (triangulacji) oznaczany będzie przez $\mathcal{T}_h$. Dolny indeks h jest miarą najdłuższego spośród wszystkich boków tworzących trójkąty należące do $\mathcal{T}_h$. Triangulacja dziedziny Ω jest wykorzystywana do przybliżenia dowolnej określonej na niej funkcji przez te przedziałami liniowe, ograniczone do pojedynczego elementu $\mathcal{T}_h$. Co więcej, ze względu na własność jednoznacznego określenia $p \in \mathcal{P}_1$ na boku trójkąta przez wartości na wierzchołkach tworzących ten bok, przybliżenie to jest ciągłe na całej dziedzinie. Prowadzi to do następującej definicji,

$$V_h = \{u_h \in C(\Omega) : u_h|_T \in \mathcal{P}_1 \ \forall T \in \mathcal{T}_h\}. \quad (\text{D.7})$$

Przestrzeń liniowych elementów skończonych V_h reprezentuje funkcje określone na Ω . Wartości u na wierzchołkach (węzłach) triangulacji determinują wybór odpowiedniego $u_h \in V_h$, będącego jej przybliżeniem. Co więcej, $u_h \in V_h$ implikuje $u_h \in H^1(\Omega)$.

Każdy element V_h może być zapisany w następujący sposób,

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_h(p_j) \varphi_j, \quad (\text{D.8})$$

gdzie p_i , $i = \{1, 2, \dots, N\}$ numeruje kolejne węzły, $\varphi_j \in V_h$ oraz

$$\phi_j(p_k) = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = j, \\ 0 & \text{dla } k \neq j. \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

Wymiar V_h jest więc równy N . Ograniczenie nałożone na $v \in H_{\partial\Omega}^1$ ($v = 0$ na $\partial\Omega_2$) motywuje wprowadzenie oznaczenia przestrzeni liniowych elementów skończonych znikających na tej części brzegu,

$$V_h^{\partial\Omega} = V_h \cap H_{\partial\Omega}^1(\Omega) = \{v_h \in V_h : v_h = 0 \text{ na } \partial\Omega_2\}. \quad (\text{D.10})$$

Wymiar $N' = \dim(V_h^{\partial\Omega})$ jest równy $\dim(V_h)$ pomniejszonemu o liczbę węzłów znajdujących się na $\partial\Omega_2$ (każda funkcja należąca do $V_h^{\partial\Omega}$ przyjmuje na nich wartość zero).

Słabe sformułowanie zagadnienia brzegowego (D.1) może być poddane dyskretyzacji w następujący sposób. Po zadaniu triangulacji dziedziny Ω szukana jest taka funkcja u_h , że dla dowolnego $v_h \in V_h^{\partial\Omega}$,

$$\int_{\Omega} (v_h, u_h^i) dV + \oint_{\partial\Omega_1} (v_h f_2) dy - \oint_{\partial\Omega_1} (v_h g u_h) dy + \int_{\Omega} (v_h f_1) dV = 0, \quad (D.11)$$

oraz $u_h(p_j) = 1$ dla każdego $p_j \in \partial\Omega_2$. Ze względu na liniowy charakter (D.11) i możliwość wyrażenia $v_h \in V_h^{\partial\Omega}$ przez skończoną kombinację liniową funkcji węzłowych φ_i wystarczy ograniczyć się do

$$\int_{\Omega} (D\varphi_i \cdot Du_h) dV + \oint_{\partial\Omega_1} (\varphi_i f_2) dy - \oint_{\partial\Omega_1} (\varphi_i g u_h) dy + \int_{\Omega} (\varphi_i f_1) dV = 0, \quad (D.12)$$

dla $i = \{1, 2, \dots, N'\}$. Ostatnim krokiem jest zastosowanie rozkładu (D.8) z uwzględnieniem wartości u_h na brzegu $\partial\Omega_2$,

$$u_h = \sum_{p_j \in \Omega \setminus \partial\Omega_2} u_j \varphi_j + \sum_{p_{j'} \in \partial\Omega_2} \varphi_{j'}, \quad (D.13)$$

gdzie zastosowana została skrócona notacja $u_j = u_h(p_j)$. Po wstawieniu (D.13) do (D.12) można otrzymać,

$$\begin{aligned} & \sum_{p_j \in \Omega \setminus \partial\Omega_2} u_j \int_{\Omega} (D\varphi_i \cdot D\varphi_j) dV + \sum_{p_{j'} \in \partial\Omega_2} \int_{\Omega} (D\varphi_i \cdot D\varphi_{j'}) dV - \\ & - \sum_{p_k \in \partial\Omega_1} u_k \oint_{\partial\Omega_1} (\varphi_i g \varphi_k) dy + \int_{\Omega} (\varphi_i f_1) dV + \oint_{\partial\Omega_1} (\varphi_i f_2) dy = 0, \end{aligned} \quad (D.14)$$

Układ równań (D.14) określa wartości u_h na każdym węźle $p_j \in \Omega \setminus \partial\Omega_2$, co ze względu na rozkład (D.13) pozwala odtworzyć tę funkcję na całej dziedzinie.

Dodatek E

Test poprawności algorytmu numerycznego

Poprawność algorytmu numerycznego wykorzystanego do wyznaczenia czynnika konforemnego danych początkowych Bowena–Yorka może być zweryfikowana w przypadku znikającego pędu i momentu pędu ADM. Porównanie różnicy rozwiązania numerycznego ψ_0^N i analitycznego ψ_0 pozwoli na oszacowanie stopnia jego wiarygodności.

Słabe sformułowanie zagadnienia brzegowego dla równania Lichnerowicza (3.25), przeniesione do ograniczonej dziedziny $(x, z) \in [\frac{1}{2}, 1] \times [-1, 1]$ poprzez transformację zmiennych

$$x = \frac{r}{\frac{m}{2} + r}, \quad z = \cos \theta,$$

dla znikającej konforemnej krzywizny zewnętrznej A_{ij} to

$$\int_{\Omega} \left((1-x)^4 \psi_{,x} v_{,x} + \frac{(1-x)^2 (1-y^2)}{x^2} \psi_{,y} v_{,y} \right) dV = \frac{1}{m} \int_{-1}^1 (v\psi) dz. \quad (\text{E.1})$$

Parametrem porównawczym ψ_0^N i $\psi_0 = 1/x$ będzie 'euklidesowa' norma L^2 różnicy tych funkcji,

$$\delta\psi = \sqrt{\int_{\Omega} \left(\psi_0^N - \frac{1}{x} \right)^2 dx dy}. \quad (\text{E.2})$$

Poniżej została ona przedstawiona dla kilku wybranych wartości m .

m	$\delta\psi \cdot 10^7$
10^0	1.17309
10^1	1.17304
10^2	1.17335
10^3	1.171
10^4	1.17232
10^5	1.1727

Algorytm numeryczny oparty na metodzie elementu skończonego daje więc w tym przypadku znakomitą zbieżność z analitycznym rozwiązaniem ψ_0 .

Dodatek F

Istnienie rozwiązania równania Lichnerowicza dla maksymalnych zaburzeń danych początkowych Schwarzschilda

W dowodzie istnienia będzie wykorzystana następująca wersja twierdzenia o funkcji uwikłanej,

Twierdzenie 4. *Niech X, Y, Z będą przestrzeniami Banacha oraz odwzorowanie $f : X \times Y \rightarrow Z$ posiada ciąglą pochodną Frécheta. Jeśli $f(x_0, y_0) = 0$ i $Df|_{(x_0, y_0)}$ (linearyzacja f ze względu na y , obliczona w punkcie (x_0, y_0)) jest izomorfizmem przestrzeni Banacha Y w Z , to istnieją otoczenia U punktu x_0 oraz V punktu y_0 oraz funkcja $g : U \rightarrow V$ z dobrze określoną pochodną Frécheta, taka że $f(x, g(x)) = 0$ i $f(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y = g(x)$, dla każdego $(x, y) \in U \times V$.*

Kontrola asymptotycznego zachowania się rozwiązania równania Lichnerowicza wymaga wykorzystania ważonych przestrzeni funkcyjnych Sobolewa $W_\delta^{k,p}$, z normą zdefiniowaną jako

$$\|u\|_{W_\delta^{k,p}} = \sum_{|\beta| \leq k} \|w^{-\delta - \frac{n}{p} + |\beta|} \partial^{|\beta|} u\|_{L^p(\Omega)}, \quad (\text{F.1})$$

gdzie $w = \sqrt{1 + |x|^2}$, β jest wielowskaźnikiem a $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus B(0, \frac{m}{2})$.

Mamy

Twierdzenie 5. Niech składowe tensora A_{ij} będą proporcjonalne do małego parametru ϵ . Wtedy następujące zagadnienie brzegowe

$$0 = f(\epsilon, \psi) = \begin{cases} \Delta\psi + \frac{1}{8}A_{ij}A^{ij}\psi^{-7}, \\ \psi_r + \frac{1}{m}\psi - \frac{1}{4}A_{rr}\psi^{-3} \text{ dla } r = m/2, \end{cases} \quad (\text{F.2})$$

ma dodatnie osiowosymetryczne rozwiązanie w postaci zaburzenia czynnika konforemnej metryki Schwarzschilda $\psi_0 = 1 + \frac{m}{2r}$.

Dowód. Niech $X = \mathbb{R}$, $Y = W_{-1/2}^{2,2}$ oraz $Z = W_{-3/2}^{0,2} = L_{-3/2}^2$. Ponadto, niech $\epsilon \in X$, $\psi = 1 + u$ oraz $u \in Y$. Wtedy

$$0 = f(\epsilon, u) = \begin{cases} \Delta u + \frac{1}{8}A_{ij}A^{ij}(1+u)^{-7}, \\ u_r + \frac{1}{m}(1+u) - \frac{1}{4}A_{rr}(1+u)^{-3} \text{ dla } r = m/2, \end{cases} \quad (\text{F.3})$$

Mamy $f(\epsilon_0, u_0) = 0$ dla $\epsilon_0 = 0$ i $u_0 = \frac{m}{2r}$. Linearyzacja f ze względu na u , obliczona w punkcie (ϵ_0, u_0) to

$$Df|_{(\epsilon_0, u_0)}(v) = \begin{cases} \Delta v, \\ v_r + \frac{1}{m}v \text{ dla } r = m/2, \end{cases} \quad (\text{F.4})$$

Operator sprzężony do Df może być wyznaczony po wykorzystaniu całkowania przez części,

$$\int_{\Omega} w \Delta v = - \oint_{\partial\Omega} w v_{,r} - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v = \oint_{\partial\Omega} \left(w \frac{v}{m} + w_{,r} v \right) + \int_{\Omega} \Delta w v. \quad (\text{F.5})$$

Mamy

$$Df^*|_{(\epsilon_0, u_0)}(w) = \begin{cases} \Delta w, \\ w_r + \frac{1}{m}w \text{ dla } r = m/2, \end{cases} \quad (\text{F.6})$$

więc zlinearyzowany operator Df jest samosprężony. Z [30, Proposition 3.1 i Proposition 5.3] wynika, że jest on izomorfizmem jeśli posiada trywialne jądro. Jest to prawda, ponieważ z $\Delta v = 0$ oraz $v = v(r, \theta)$ otrzymujemy

$$v = \sum_{n=1} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta), \quad (\text{F.7})$$

natomiast warunki brzegowe implikują $A_n = B_n = 0$ dla każdego n . Z Twierdzenia 4 wynika więc, że istnieje rozwiązanie (F.3) w otoczeniu U punktu $(\epsilon_0, u_0) \in X \times Y$ w postaci zaburzenia funkcji u_0 . Ponadto, ze względu na naturę v , istnieje również podzbiór U dla którego

$$\psi = 1 + u_0 + v = \psi_0 + v \geq 0. \quad (\text{F.8})$$

□

Bibliografia

- [1] R. Penrose, Naked singularities, 1973, Ann. New York Acad. Sci. 224, 125
- [2] S. Hod, Weak Cosmic Censorship: As Strong As Ever, 2008, Phys. Rev. Lett. 100, 121101
- [3] F. Eperon, B. Ganchev i J. Santos, Plausible scenario for a generic violation of the weak cosmic censorship conjecture in asymptotically flat four dimensions, 2020, Phys. Rev. D 101, 041502(R)
- [4] R. Geroch, Energy Extraction, 1973, Ann. N. Y. Acad. Sci. 224 108-117
- [5] P. Jang i R. Wald, The positive energy conjecture and the cosmic censor hypothesis, 1977, J. Math. Phys. 18, 41
- [6] G. Huisken i T. Ilmanen, The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality, 2001, J. Diff. Geom. 59 353-437
- [7] H. Bray, Proof of the Riemannian Penrose Inequality Using the Positive Mass Theorem, 2001, J. Differential Geom. 59, no. 2, 177
- [8] E. Malec i N. Murchadha, Trapped surfaces and the Penrose inequality in spherically symmetric geometries, 1994, Phys. Rev. D 49, 6931
- [9] H. Bray i M. Khuri, A Jang Equation Approach to the Penrose Inequality, 2010, Discrete Contin. Dyn. Syst. 27, 741
- [10] P. Jang, On the positivity of energy in General Relativity, 1978, J. Math. Phys., 19, 1152
- [11] R. Schoen i S. Yau, On the proof of the positive mass conjecture in General Relativity, 1979, Commun. Math. Phys. 65, 45
- [12] H. Bray i M. Khuri, P. D. E.'s Which Imply the Penrose Conjecture, 2011, Asian J. Math. 15 4, 557

- [13] E. Witten, A new proof of the positive energy theorem, 1981, *Comm. Math. Phys.* 80 3, 381
- [14] G. Gibbons, S. Hawking, G. Horowitz i M. Perry, Positive mass theorems for black holes, 1983, *Comm. Math. Phys.* 88 3, 295
- [15] O. Reula i K. Tod, Positivity of the Bondi energy, 1984, *Journal of Mathematical Physics* 25, 1004
- [16] M. Herzlich, A Penrose-like inequality for the mass of Riemannian asymptotically flat manifolds, 1997 , *Commun. Math. Phys.* 188, 121
- [17] T. Bäckdahl i J. Valiente Kroon, Approximate twistors and positive mass, 2011, *Class. Quant. Grav.* 28, 075010
- [18] P. Anglada, Penrose-like inequality with angular momentum for minimal surfaces, 2018, *Class. Quant. Grav.* 35, 045018
- [19] P. Anglada, Comments on Penrose inequality with angular momentum for outermost apparent horizons, 2020, *Class. Quant. Grav.* 37, 065023
- [20] E. Malec, M. Mars i W. Simon, On the Penrose Inequality for General Horizons, 2002, *Phys. Rev. Lett.* 88, 121102
- [21] E. Malec i K. Roszkowski, The Penrose Inequality in Perturbed Schwarzschild Geometries, 2005, *Acta Phys. Pol.* B36, 2931
- [22] M. Mars, Present status of the Penrose inequality, 2009, *Class. Quant. Grav.* 26, 193001
- [23] A. Lichnerowicz, L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des n corps, 1944, *J. Math. Pures Appl.* 23, 37
- [24] J. York, Gravitational Degrees of Freedom and the Initial-Value Problem, 1971, *Phys. Rev. Lett.* 26, 1656
- [25] R. Arnowitt, S. Deser i C. Misner, The dynamics of general relativity, W L. Witten (ed.), *Gravitation: an Introduction to Current Research*, 1962, Wiley, New York, 227
- [26] R. Conboye i N. Murchadha, Potentials for transverse trace-free tensors, 2014, *Class. Quant. Grav.* 31, 085019
- [27] R. Conboye, Coordinate independent expression for transverse trace-free tensors, 2016, *Class. Quant. Grav.* 33, 015008

- [28] J. Tafel, All transverse and TT tensors in flat spaces of any dimension, 2018, *Gen. Rel. Grav.* 50, 31
- [29] S. Hawking i G. Ellis, *The large scale structure of space-time*, 1973, Cambridge University Press, Cambridge
- [30] D. Maxwell, Solutions of the Einstein constraint equations with apparent horizon boundaries, 2005, *Commun. Math. Phys.* 253, 561
- [31] M. Holst i G. Tsogtgerel, The Lichnerowicz equation on compact manifolds with boundary, 2013, *Class. Quant. Grav.* 30(20), 1
- [32] I. Ben-Dov, The Penrose inequality and apparent horizons, 2004, *Phys. Rev. D* 70, 124031
- [33] R. Bartnik, The mass of an asymptotically flat manifold, 1986, *Commun. Pure Appl. Math.* 39, 661
- [34] J. Bowen i J. York, Time-asymmetric initial data for black holes and black-hole collisions, 1980, *Phys. Rev. D* 21, 2047
- [35] J. Bonet i D. Henwood, *Finite Elements: A Gentle Introduction*, 1996, Red Globe Press, 1998 edition
- [36] R. Gleiser, C. Nicasio, R. Price i J. Pullin, Evolving the Bowen–York initial data for spinning black holes, 1998, *Phys. Rev. D* 57 3401
- [37] R. Gleiser, G. Khanna i J. Pullin, Perturbative evolution of conformally flat initial data for a single boosted black hole, 2002, *Phys. Rev. D* 66, 024035
- [38] J. Kopiński i J. Tafel, The Penrose inequality for perturbations of the Schwarzschild initial data, *Class. Quant. Grav.* 37, 015012
- [39] J. Tafel i M. Jóźwikowski, New solutions of initial conditions in general relativity, 2017, *Class. Quant. Grav.* 31, 115001
- [40] R. Beig, Generalized Bowen–York Initial Data, 2000, S. Cotsakis i G.W. Gibbons (ed.) *Mathematical and Quantum Aspects of Relativity and Cosmology Lecture Notes in Physics* 537, 55
- [41] E. Malec i N. Murchadha, Constant mean curvature slices in the extended Schwarzschild solution and collapse of the lapse, Part I, 2003, *Phys. Rev. D* 68, 124019

- [42] F. Hecht, New development in FreeFem++, 2012, Journal of numerical mathematics 20(3-4), 251
- [43] J. Karkowski, Boosted Kerr black hole, 2006, Acta Phys. Polon. B37, 2571
- [44] D. Brill, On spacetimes without maximal surfaces, 1982, Proc. Third Marcel Grossman Meeting, ed. H. Ning, North-Holland, Amsterdam
- [45] J. Isenberg i V. Moncrief, A set of nonconstant mean curvature solutions of the Einstein constraint equations on closed manifolds, 1996, Class. Quant. Grav. 13, 1819
- [46] M. Holst i C. Meier, Non-CMC solutions to the Einstein constraint equations on asymptotically Euclidean manifolds with apparent horizon boundaries, 2014, Class Quant. Grav. 32 025006
- [47] J. Kopiński i J. Tafel, The Penrose inequality for nonmaximal perturbations of the Schwarzschild initial data, 2020, Class. Quant. Grav. 37 105006
- [48] A. Garat i R. Price, Nonexistence of conformally flat slices of the Kerr spacetime, 2000, Phys. Rev. D 61, 124011
- [49] J. Friedman i S. Mayer, Vacuum handles carrying angular momentum; electrovacuum handles carrying net charge, 1982, J. Math. Phys. 23, 109