

Olsztyn, dn. 27.07.2021

Recenzja

rozprawy doktorskiej mgr. Marcina Zajęca

*Struktury geometryczne w klasycznej teorii pola z cechowaniem – redukcje,
algebroidy Atiyaha, trójki Tulczyjewa*

Rozumienie struktury geometrycznej teorii fizycznych towarzyszyło wielkim odkryciom fizyki i stymulowało rozwój matematyki. Jednym z najważniejszych przykładów istotności struktur geometrycznych w fizyce są lagrange'owski i hamiltonowski formalizmy oraz relacje pomiędzy nimi, u podstaw których leży transformacja Legendre'a. W latach 70 XX wieku W. Tulczyjew w serii prac opartych na wariacyjnym sformułowaniu statyki wypracował nowe podejście do transformacji Legendre'a, w którym główną rolę odgrywały struktury geometryczne związane z iterowanymi wiązkami stycznymi i kostycznymi do rozmaitości konfiguracyjnej. Podejście to jest wolne od ograniczeń „klasycznego” podejścia, powiązanych z nieregularnością lagranżjanów wielu teorii fizycznych i w pewnym sensie samo już zasługuje na miano klasycznego, potwierdzeniem czego są dziesiątki artykułów poświęconych zastosowaniom i uogólnieniom „trójek Tulczyjewa”.

Wśród prac rozwijających formalizm Tulczyjewa można wydzielić dwie podstawowe grupy dotyczące: (1) mechaniki geometrycznej na algebroidach oraz gradowanych wiązek i rozmaitości (A. J. Bruce, K. Grabowska, J. Grabowski, M. Jóźwikowski, M. Rotkiewicz, P. Urbanowski); (2) klasycznej teorii pola (K. Grabowska, J. Grabowski, L. Vitagliano).

Rozprawa doktorska mgr. Marcina Zajęca wpisuje się w drugą grupę prac, aczkolwiek ma też związek z pierwszą z nich. Dokładniej mówiąc, główne wyniki pracy dotyczą: (1) formalizmu Tulczyjewa dla klasycznej teorii pola z cechowaniem; (2) przykładu redukcji trójki Tulczyjewa dla niezmienniczego układu mechanicznego na grupie Liego (jest to nieco osobny, ale też ważny wynik rozprawy); (3) geometrycznego podejścia do redukcji względem symetrii cechowania metodą „dressingu”. Ostatnia z wymienionych składowych pracy nie jest bezpośrednio związana z formalizmem Tulczyjewa (aczkolwiek zahacza też o wiązki konfiguracyjną i fazową, które leżą u jego podstaw) lecz rozwija koncepcję redukcji teorii z cechowaniem odkrytą przez J. Attarda, J. François, S. Lazarriniego oraz T. Massona.

Można powiedzieć, że wspólnym mianownikiem dla wszystkich trzech składowych pracy jest hasło „redukcja”, ale każdemu z trzech przypadków odpowiada inny typ redukcji. Poniżej rozważę dokładniej strukturę rozprawy i opiszę, o jakiej redukcji mowa.

Praca składa się z siedmiu rozdziałów, z których pierwsze cztery, z wyjątkiem podrozdziału 3.4, zawierają materiał przygotowawczy. Podstawowe wyniki pracy zawierają się w rozdziałach 5–7 oraz we wspomnianym podrozdziale 3.4.

We wstępie (rozdział 1) opisane są główne cele i struktura rozprawy oraz pokazano znaczenie wyników rozprawy w kontekście klasycznej teorii pola. Rozdział 2 rzetelnie opisuje aparat matematyczny stosowany w dalszych częściach pracy, w szczególności wiązki dżetów, geometrię wiązek głównych i koneksji, algebroidów Liego oraz sumy afiniczno-wektorowe wiązek. Ostatnie pojęcie jest względnie prostym, ale własnym wypracowaniem autora, z którego niejednokrotnie korzysta w dalszych częściach pracy.

Rozdział 3 jest wprowadzeniem do formalizmu Tulczyjewa w mechanice klasycznej oraz klasycznej teorii pola. Wspomniany podrozdział 3.4 jest oparty na artykule [23], napisanym przez autora rozprawy wspólnie z jej promotorką, i zawiera jeden z głównych wyników pracy – przykład redukcji trójki Tulczyjewa dla niezmienniczego układu mechanicznego na grupie Liego G . Korzysta się tutaj z trywializacji wiązki stycznej do G i wynikającej z niej trywializacji wiązek iterowanych. Następnie obliczone są odwzorowania α, β, κ , będące podstawowymi składowymi trójki Tulczyjewa, oraz redukcje tych obiektów względem naturalnego działania grupy. Ostatecznie otrzymuje się szczególny przypadek trójki Tulczyjewa na algebroidzie [21], gdzie algebroid jest postaci $\mathfrak{g} \rightarrow \{1\}$ ($\mathfrak{g}$ jest algebrą Liego odpowiadającą grupie Liego G).

W rozdziale 4 podane jest wprowadzenie do klasycznej teorii pola z cechowaniem. Opisane są tutaj różne podejścia do opisu transformacji cechowania oraz szczegółowo rozpatrzone przykłady elektrodynamiki klasycznej oraz teorii oddziaływań elektroślabych.

Rozdział 5, który jest poświęcony strukturze wiązek konfiguracyjnej oraz fazowej teorii z cechowaniem, zawiera już część głównych wyników pracy. Do nich należy w szczególności twierdzenie 3, opisujące izomorfizm wiązki konfiguracyjnej J^1C , gdzie $C = J^1P/G \rightarrow M$ jest wiązką koneksji głównych na wiązce głównej $P \rightarrow M$ z grupą strukturalną G , z wiązką $\widehat{J^2P}/G$ dżetów semiholonomicznych zredukowaną względem działania grupy. Z ogólnej teorii dżetów wynika też izomorfizm $\widehat{J^2P}/G \cong J^2P/G \oplus_C (C \times_M \wedge^2 T^*M \otimes_M \text{ad}P)$,

który pozwala na wydzielenie w wiązce konfiguracyjnej J^1C skośnie symetrycznej składowej $C \times_M \wedge^2 T^*M \otimes_M \text{ad}P$, istotnej w teoriach pola z cechowaniem, gdzie lagranżjan $L : J^1C \rightarrow \Omega^m$ zależy tylko od części dżetu (krzywizny koneksji). W ostatnim podrozdziale rozdziału 5 dany jest opis wiązki fazowej teorii z cechowaniem, w którym podobnie do wiązki konfiguracyjnej wydziela się „skośnie symetryczna składowa”.

Rozdział 6 jest centralnym w całej rozprawie. Opisana w nim jest redukcja formalizmu Tulczyjewa dla teorii z cechowaniem względem symetrii polegającej na uwolnieniu się od nieistotnych z punktu widzenia fizycznych teorii „symetrycznych składowych” wiązek konfiguracyjnej i fazowej. Obliczone są wszystkie składniki formalizmu Tulczyjewa, takie jak odwzorowania α, β, κ i R oraz dynamika $\mathcal{D}$, zredukowane do „skośnie symetrycznych składowych” odpowiednich wiązek. Rozdział kończy się ilustracją powyższej redukcji na przykładzie teorii Yanga–Millsa.

Rozdział 7, ostatni w rozprawie, poświęcony jest redukcji innego typu. Najpierw autor skupia się na geometrycznym przeformułowaniu ww. metody dressingu, które samo w sobie może być zaliczone do osiągnięć rozprawy, gdyż autorzy tej metody sformułowali ją w języku algebraicznym modułów nad pierścieniem. Następnie, zakładając najpierw, że grupa strukturalna G jest iloczynem półprostym, a potem – prostym grup J i H , autor pokazuje jak redukują się poszczególne składowe teorii, takie jak wiązka główna, wiązka koneksji, wiązki konfiguracyjna i fazowa, przy założeniu współmienniczości dodatkowego pola teorii (tzw. pola dressingu) względem jednej z tych podgrup. Istotnym spostrzeżeniem mgr. M. Zająca w tej części rozprawy jest zauważenie, że koneksja „po dressingu”, czyli po transformacji pól cechowania za pomocą pola dressingu, redukuje się do koneksji w innej wiązce głównej z mniejszą grupą strukturalną (drugą z wymienionych grup).

Rozprawa doktorska mgr. Marcina Zająca sprawia bardzo solidne wrażenie: jest technicznie zaawansowana i wymagała od autora gruntownej erudycji matematycznej w dziedzinie geometrii różniczkowej (specyficznie w takich jej rozdziałach jak teoria wiązek głównych, koneksje na wiązkach głównych oraz ich krzywizny, teoria wiązek dżetów, wiązek afinicznych, wiązek podwójnych, teoria algebroidów i struktur powiązanych) oraz zawiera dużo oryginalnych wyników stanowiących istotny wkład w rozwój formalizmu Tulczyjewa oraz teorii pola z cechowaniem.

Nie pozbawiona jednak ona i mankamentów. Wśród nich w pierwszej kolejności wymienilibym fakt, iż jedyna opublikowana praca autora dotycząca tematów rozprawy [23] obejmuje istotny lecz bardzo mały fragment rozprawy

opisany wyżej.

Następnie chciałbym nadmienić, że jeden z tematów w tytule rozprawy, mianowicie „algebroidy Atiyaha”, pojawia się tylko w obrębie rozdziałów przygotowawczych, gdzie podana jest definicja algebroidu Atiyaha (podrozdział 2.4). Odnoszę wrażenie, że wstępny zamysł rozprawy przewidywał badanie struktur algebroidalnych (czyli nawiasu Liego oraz kotwicy) związanych z wiązką Atiyaha TP/G oraz wiązkami powiązаныmi $C = J^1P/G$, J^1C i t.p., ale z jakichś powodów nie został zrealizowany. Przypomnijmy sobie, że formalizm Tulczyjewa dla mechaniki klasycznej przyczynił się do odkrycia ważnych pojęć matematycznych oraz związków między nimi (wiązki podwójne, dualność pomiędzy strukturami algebroidów Liego i liniowych struktur Poissona i t.p.). W tym kontekście wydaje się, że struktury algebroidalne związane z formalizmem Tulczyjewa w teorii pola i w szczególności pola z cechowaniem są bardzo ważne i ich badanie może być jednym z ewentualnych kierunków perspektywicznych.

Zauważę również, że ze względu na dużą objętość czytanie rozprawy utrudnione jest niewystarczającą ilością dokładnych odwołań do notacji oraz wyników z rozdziałów poprzedzających. Z pewnością pomocą czytelnikowi posłużyłaby lista oznaczeń. Poniżej wymienię też kilkanaście literówek oraz nieścisłości, które zakradły się do tekstu rozprawy. Dla ułatwienia czytania rozprawy warto byłoby w rozdziałach przygotowawczych dodać wprowadzenie do relacji symplektycznych i obiektów generujących, które pojawiają się w wielu miejscach.

Podsumowując, zważywszy na to, że przedstawiona rozprawa świadczy o dojrzałości badawczej autora oraz spełnia wszystkie formalne wymogi, uważam, że jej autor mgr. Marcin Zając zasługuje na nadanie mu tytułu doktora i powinien być dopuszczony do dalszych etapów procedury doktorskiej.

Na koniec chciałbym podkreślić, że mgr. Marcin Zając oprócz cytowanej publikacji [23] jest autorem 4 prac naukowych, tematy których nie są bezpośrednio związane z tematem rozprawy doktorskiej, opublikowanych lub przyjętych do druku w wysoko punktowanych czasopismach. Dodatkowo 4 prace jego autorstwa, w tym jedna dotycząca ww. metody dressingu, są złożone do publikacji. Ma doświadczenie współpracy z ośrodkami zagranicznymi oraz wygłoszenia referatów na konferencjach oraz seminariach międzynarodowych (kilka z nich miałem przyjemność wysłuchać). Potwierdza to w dużym stopniu moje powyższe zdanie, sformułowane na podstawie samej analizy rozprawy doktorskiej.

Pomyłki druku oraz nieścisłości formułowań

- str. 8, ak. 3: ma być „ $\phi \sim \phi' \Leftrightarrow \phi(m) = \phi'(m), T_m\phi(T_mM) = T_m\phi'(T_mM)$ ”;
- str. 8, ostatni ak.: jest „ (x^i, u^α) ”, ma być „ (q^i, u^α) ”;
- str. 10, ak. 1: jest „ $\widehat{J^1E} \rightarrow J^1E$ ”, ma być „ $\widehat{J^2E} \rightarrow J^1E$ ” (2 razy);
- str. 10, ostatni ak.: jest „dowolna krzywa w M ”, ma być „dowolna krzywa gładka w M ”;
- str. 11, ak. 1: jest „podzbiorem elementów mających”, ma być „podzbiorem par elementów mających”;
- str. 11, ak. 2: jest „modelowana na V_1 ”, ma być „modelowana na $V_1 \subset V$ ”;
- str. 13, ak. 2: jest „ $W^* \cong V^*/W^o$ ”, ma być „ $W^* \cong V^*/W^o$, gdzie W^o jest anihilatorem podprzestrzeni W ”;
- str. 15, ak. 1: jest „ $F = \mathfrak{g}$ ”, ma być „ $F = \mathfrak{g}$, gdzie $\mathfrak{g}$ jest algebrą Liego grupy Liego G ”;
- tamże: podana definicja odwzorowania $\text{Ad} : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ jest prawdziwa wyłącznie dla liniowych grup i algebr Liego;
- str. 18: diagram (2.22) jest niezrozumiały, gdyż $\mathcal{A} \subset \Gamma(T^*P \otimes \mathfrak{g})$, a nie $\mathcal{A} \subset T^*P \otimes \mathfrak{g}$;
- str. 20, ak. 3: jest „Definicja (2.30)”. Formalnie wzór (2.30) nie jest definicją;
- str. 26, ostatni ak.: jest „ λ jest lokalnie odwracalna”, ma być „ λ jest lokalnie odwracalne”;
- str. 27, ak. 2: jest „ $\omega_L = \lambda^*\omega_M$ ”, ma być „ $\omega_L = \lambda^*\omega_M$, gdzie ω_M jest kanoniczną formą symplektyczną na T^*M ”;
- str. 35–36: w podrozdziałach 3.3.2 oraz 3.3.3 użyto różnych oznaczeń do przestrzeni odwzorowań afinicznych $A_p \rightarrow U$;

- str. 46, ak. 1: jest „ $\{\Phi : P \rightarrow P\}$ ”, ma być „ $\{\Phi : P \rightarrow P \mid$ ” lub „ $\{\Phi : P \rightarrow P : \}$ ”; analogicznie we wzorze (4.2);
- str. 52, ak. 1: jest „ $\rho : G \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^2)$ ”, ma być „ $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}^2)$ ”;
- tamże: jest „Założmy ponadto, że K jest niezmiennicze”, ma być „Założmy ponadto, że K jest niezmienniczy”; w tym miejscu warto byłoby nadmienić, dlaczego niezmienniczy iloczyn skalarny istnieje;
- str. 53, ostatni ak.: jest „ $a \in T^*M \otimes u(1)$ ” oraz „ $a \in T^*M \otimes su(2)$ ”, ma być „ $a \in \Gamma(T^*M \otimes u(1))$ ” oraz „ $a \in \Gamma(T^*M \otimes su(2))$ ”;
- str. 81, ak. 4: jest „związany z grupą $\mathcal{H}$ ”, ma być „związany z grupą H ”;
- str. 90: pozycje [22] oraz [33] zawierają niepełne dane bibliograficzne.

A. Panasyuk

dr hab. Andriy Panasyuk
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
w Olsztynie