

UNIwersYTET WARSZAWSKI
WYDZIAŁ FIZYKI
Instytut Fizyki Teoretycznej
Katedra Fizyki Materii Skondensowanej



**Kwantowe przemiany fazowe w spolaryzowanych
mieszaninach ultrazimnych atomów fermionowych
o nierównych masach**

Piotr Dariusz Zdybel

Rozprawa doktorska
wykonana pod kierunkiem

dr. hab. Pawła Jakubczyka
Katedra Fizyki Materii Skondensowanej
Instytut Fizyki Teoretycznej UW

Warszawa, maj 2021

Dzięki wykonywanej pracy człowiek przybliża się do poznania jakiejś prawdy o ziemi - scenie jego dramatu. Wydobywając z ziemi to, co najlepsze, człowiek doświadcza natury świata jako ziemi obiecanej. Smakując chleb, człowiek smakuje obietnicę, która się ziściła. Wierzy, że nie jest tu intruzem.

- ks. J. Tischner, Filozofia dramatu

Kochanej żonie

Spis treści

Streszczenie	9
Podziękowania	13
1 Wprowadzenie	15
1.1 Cele rozprawy	16
1.2 Struktura rozprawy	17
I Kontekst doświadczalny i teoretyczny	19
2 Ultrazimne fermiony	21
2.1 Ultrazimne atomy	22
2.1.1 Chłodzenie i pułapkowanie atomów	24
2.1.2 Próbkowanie własności ultrazimnych gazów	28
2.2 Rezonans Feshbacha	29
2.2.1 Teoria rozpraszania dla ultrazimnych gazów	29
2.2.2 Magnetyczny rezonans Feshbacha	31
2.3 Przejście BCS-BEC	34
2.3.1 Teoria pola średniego	35
2.3.2 Teoria Nozièresa–Schmitt-Rinka	36
2.4 Mieszaniny gazów fermionowych	39
3 Kwantowe przemiany fazowe	43
3.1 Teoria skalowania	44
3.1.1 Teoria skalowania w przypadku klasycznym	45
3.1.2 Teoria skalowania w przypadku kwantowym	47
3.1.3 Przejście między reżimem klasycznym i kwantowym	48
3.2 Teoria Hertza-Millisa	50
3.2.1 Działanie Hertza	50
3.2.2 Równania renormalizacji	51
3.2.3 Rozwiązanie dla $d + z > 4$ i diagram fazowy	53

II	Wyniki badań	57
4	Struktura efektywnego działania	59
4.1	Efektywne działanie	60
4.2	Efektywny potencjał	61
4.3	Fluktuacje parowania	63
5	Diagram fazowy i kwantowe przemiany fazowe	67
5.1	Średniopolowy diagram fazowy	68
5.1.1	Koncentracje atomów w mieszaninie	71
5.2	Rozwinięcie Landaua	73
5.2.1	Zerowa temperatura	76
5.3	Kwantowy punkt krytyczny	77
5.3.1	Przypadek $d = 2$	77
5.3.2	Przypadek $d = 3$	78
5.3.3	Asymptotyczny kształt linii krytycznej $T_c(h)$	81
5.4	Kwantowy punkt Lifszycza	82
5.4.1	Propagator fluktuacji parowania w fazie normalnej	83
5.4.2	Rozwinięcie gradientowe	84
6	Mody Goldstone’a i ich tłumienie	89
6.1	Fonony Andersona-Bogoliubowa	90
6.2	Tłumienie Landaua w fazie nadciekłej	93
6.2.1	Nielokalne człony w rozwinięciu gradientowym $\mathbb{F}_q^{-1}$	93
6.2.2	Wyniki numeryczne	98
6.3	Tłumienie Landaua w fazie normalnej	103
7	Teoria renormalizacji dla mieszanin Fermiego	107
7.1	Równanie Wettericha	108
7.1.1	Efektywne działanie Γ_k zależne od skali k	109
7.1.2	Własności regulatora $R_k(\mathbf{q})$	110
7.1.3	Ścisłe równanie płynięcia	111
7.2	Działanie typu Hertza dla mieszanin Fermiego	112
7.3	Renormalizacja efektywnego potencjału	114
7.3.1	Równanie płynięcia efektywnego potencjału	115
7.3.2	Stabilność QCP ze względu na fluktuacje	116
7.4	Teoria Hertza-Millisa w fazie nadciekłej	118
7.4.1	Równania płynięcia stałych $\dot{\rho}_{0,k}$ oraz $\dot{\lambda}_k$	118
7.4.2	Płynięcie RG przy braku tłumienia Landaua	121
7.4.3	Płynięcie RG przy uwzględnieniu tłumienia Landaua	123

8 Podsumowanie	127
A Sumy Matsubary	131
A.1 Suma typu $S = \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\beta} \sum_n \ln (ik_n - E_k^\sigma)$	131
A.2 Suma typu $S = \frac{1}{\beta} \sum_n (ik_n - E_k^\sigma)^{-1}$	132
B Przedłużenie analityczne $M_{ij}(\mathbf{q}, iq_0)$	135
C Wyprowadzenie $\beta_k^{qu,\sigma}$	137
Bibliografia	138

Streszczenie

Niniejsza rozprawa ma na celu zbadanie kwantowych przemian fazowych w spolaryzowanych mieszaninach ultrazimnych atomów fermionowych o nierównych masach. W takich układach wiodąca niestabilność morza Fermiego jest związana z parowaniem Coopera w kanale fal parcjalnych s . Skoncentrujemy się na przejściu fazowym zachodzącym między jednorodną fazą nadciekłą, a fazą normalną. Niezrównoważone mieszaniny Fermiego posiadają szeroki wybór parametrów kontroli, które pozwalają na dostrajanie ich właściwości. W szczególności dają one możliwość zmodyfikowania cech przemiany fazowej w $T = 0$. W tej dysertacji, podchodzimy do problemu kwantowych przemian fazowych z trzech różnych, ale uzupełniających się perspektyw.

Po pierwsze rozważamy przybliżenie średniego pola i rozwijamy efektywny potencjał w potęgach parametru porządku ϕ (co jest znane jako teoria Landaua-Ginzburga). Szczególnie jesteśmy zainteresowani możliwością sprowadzenia punktu trójkrytycznego do zerowej temperatury w taki sposób, że przemiana fazowa pozostaje ciągła w granicy $T \rightarrow 0$. W ten sposób badany układ zawiera kwantowy punkt krytyczny (QCP) na diagramie fazowym. Analitycznie identyfikujemy taką możliwość dla zakresu parametrów układu w trzech wymiarach ($d = 3$). Z drugiej strony pokazujemy, że występowanie QCP jest wykluczone w $d = 2$ (na poziomie pola średniego). Co więcej uwzględniając wyrazy gradientowe o postaci $|\nabla\phi|^2$ w efektywnym działaniu stwierdzamy, że można je sprowadzić do zera w granicy $T \rightarrow 0$ poprzez manipulację parametrami układu, co pozwala na zrealizowanie kwantowego punktu Lifszycy.

Po drugie skupiamy się na własnościach spektralnych fononowych modów kolektywnych (znanych jako mody Andersona-Bogoliubowa). Wzbudzenia te pełnią istotną rolę w opisie kwantowych zjawisk krytycznych. Badamy pochodzenie zespolonego bieguna propagatora fluktuacji parowania $\mathbb{F}_q$, który pozwala na znalezienie relacji dyspersji modów kolektywnych oraz ich współczynników tłumienia. Otrzymujemy nielocalne w czasie wkłady do rozwinięcia gradientowego propagatora $\mathbb{F}_q^{-1}$, które są związane z procesem tłumienia fononów Andersona-Bogoliubowa. Wyrażenia te pozwalają na wyprowadzenie analitycznego kryterium występowania tłumienia Landaua. Okazuje się, że jest ono obecne wyłącznie w fazie uporządkowanej dla odpowiednio dużego niedopasowania powierzchni Fermiego składników mieszaniny (co ma miejsce także dla $T = 0$). Następnie porównujemy otrzymane przewidywania z numerycznie obliczonymi współczynnikami tłumienia.

Na koniec przeprowadzamy analizę wykorzystującą nieperturbacyjną grupę renormalizacji (RG). Interesuje nas sytuacja w której kwantowa przemiana fazowa jest ciągła na poziomie pola średniego. Pokazujemy, że fluktuacje parametru porządku, wprowadzone przez człon tłumienia, destabilizują

płynięcie RG w kierunku punktu stałego Wilsona-Fishera dla odpowiednio niskich T , co może oznaczać występowanie przemiany I rodzaju. Przy zwiększaniu T wpływ tłumienia znika i obserwuje się skalowanie krytyczne scharakteryzowane wykładnikiem dynamicznym $z = 1$. W tym przypadku układ wykazuje ciągłe przejście między reżimem kwantowym i klasycznym dla $T > 0$. Co więcej, przy braku tłumienia, QCP jest stabilny ze względu na fluktuacje i przemiana fazowa pozostaje II rodzaju.

Abstract

Quantum phase transitions in polarized mixtures of ultracold fermionic atoms with unequal masses

This dissertation aims to investigate quantum phase transitions in polarized mixtures of ultracold fermionic atoms with unequal masses. In such systems, a leading instability of the Fermi sea is related to Cooper pairing in the s -wave channel. We will focus on the phase transition at the onset of the uniform superfluid phase. Imbalanced Fermi mixtures possess a wide choice of control parameters, which allow tuning its properties. In particular, they provide a way to modify the characteristics of the phase transition at $T = 0$. In this thesis, we approach the problem of quantum phase transitions from three distinct but complementary perspectives.

Firstly, we consider a mean-field approximation and expand the effective potential in powers of the order parameter ϕ (this is known as the Landau-Ginzburg theory). Of our particular interest is the possibility of suppressing the tricritical point to zero temperature, so that the transition remains continuous down to $T = 0$. Thus the system hosts a quantum critical point (QCP) in the phase diagram. We analytically identify such a possibility for a range of parameters in dimensionality $d = 3$, but on the other hand, we demonstrate that the QCP is excluded in $d = 2$ (at the mean-field level). Moreover, taking into account a gradient term $|\nabla\phi|^2$ in the effective action, we show that it can be tuned to zero at $T \rightarrow 0$, which gives a route to realizing a quantum Lifshitz point.

Secondly, we focus on the spectral properties of sound-like collective excitations (known as Anderson-Bogolyubov modes). Such excitations play a prominent role in the description of quantum criticality. We explore the origin of the complex pole of the pair fluctuation propagator $\mathbb{F}_q$, which gives dispersion relations of collective modes and its damping rates. We obtain the temporally non-local contributions to gradient expansion of $\mathbb{F}_q^{-1}$, which correspond to the damping process of collective phonons. These terms allow us to derive analytical conditions under which damping is active. It turns out that Landau damping is exclusively present in the ordered phase for a large enough mismatch of the Fermi surfaces (even at $T = 0$). We subsequently compare this prediction with numerically obtained damping rates.

Lastly, we perform a nonperturbative renormalization group (RG) analysis using its one-particle-irreducible variant. We consider a situation in which the quantum phase transition is continuous at

the mean-field level. Then one finds that order-parameter fluctuations, introduced by the Landau-damping term, obstruct the RG flow toward the Wilson-Fisher fixed point at sufficiently low T , which may indicate a first-order transition. Upon increasing T , the impact of damping ceases, and a critical scaling characterized by the dynamical exponent $z = 1$ is observed. In this case, the system shows a quantum-classical crossover at $T > 0$. Moreover, without damping, the QCP is stable with respect to fluctuations and the transition remains second-order.

Podziękowania

Chciałbym wyrazić szczerą wdzięczność mojemu promotorowi dr. hab. Pawłowi Jakubczykowi za zaproponowanie interesującego tematu badań, który stanowił dla mnie rozwijające wyzwanie i był on okazją do poszerzenia mojej wiedzy i zainteresowań. Serdecznie dziękuję za okazane wsparcie, przeprowadzone rozmowy, wyrozumiałość i cierpliwość. Bardzo doceniam poświęcony mi czas.

Pragnę podziękować także mojej ukochanej małżonce Kasi za niezachwianą wiarę w moje możliwości, bezwarunkowe wsparcie, cierpliwe znoszenie moich niedostatków i codziennie okazywaną miłość. Bez Ciebie nie poradziłbym sobie.

Dziękuję dr. Pawłowi Sznajderowi za poradę dotyczącą wyboru promotora i ukierunkowanie moich zainteresowań w stronę fizyki zjawisk krytycznych. Jestem wdzięczny za prowadzone rozmowy i dzielnie się doświadczeniami.

Jestem wdzięczny wszystkim koleżankom i kolegom z którymi razem studiowałem fizykę oraz chemię na Uniwersytecie Warszawskim. Dziękuję za prowadzone rozmowy i wspólne rozwijanie pasji. W szczególności chcę podziękować mgr. Tomaszowi Smółce.

Na koniec chciałbym wyrazić ogromną wdzięczność wszystkim moim nauczycielom, którzy zaszczyli we mnie ciekawość świata oraz chęci do wytrwałej pracy. Szczególnie dziękuję pani mgr. Annie Mazurkiewicz za okazaną dobroć i zaciekawienie mnie fizyką, panu mgr. Krzysztofowi Kuśmierczykowi za wiele godzin spędzonych na interesujących kołach w laboratorium chemicznym, pani mgr. Barbarze Tarnowskiej za fascynujące lekcje matematyki i pozostałym nauczycielom V LO im. Ks. J. Poniatowskiego w Warszawie.

Rozdział 1

Wprowadzenie

Jedną z najprężniej rozwijających się gałęzi badań w fizyce materii skondensowanej w ostatnich 50 latach są kwantowe przemiany fazowe. Zainteresowanie nimi jest stymulowane przez pojawianie się nowych materiałów w których możliwa jest ich realizacja. Do ważnych przykładów tego typu substancji należą między innymi silnie skorelowane materiały elektronowe takie jak wysokotemperaturowe nadprzewodniki miedzianowe (np. $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$), układy ciężkich fermionów (np. CePd_2Si_2), czy też przewodniki organiczne (np. $\text{EtMe}_3\text{Sb-dmit}^a$) [44, 192, 212, 213].

Kwantowe przemiany fazowe zachodzą w zerowej temperaturze ($T = 0$). W tym przypadku układ jest przybliżany do przemiany za pośrednictwem nietermicznych parametrów kontrolnych δ (takich jak ciśnienie, domieszkowanie, pole magnetyczne, etc.), przy czym przemiana zachodzi dla $\delta = \delta_c$. Decydującą rolę w opisie przemian fazowych w $T = 0$ pełnią fluktuacje kwantowe, a nie termiczne jak to ma miejsce w przypadku klasycznych zjawisk krytycznych. Okazuje się, że występowanie kwantowego punktu krytycznego (QCP) na diagramie fazowym wpływa na zachowanie mierzalnych wielkości fizycznych przy zbliżaniu się do QCP wzdłuż trajektorii $\delta = \delta_c$ oraz $T \rightarrow 0$. Dzięki temu sygnatury wskazujące na występowanie kwantowej przemiany fazowej pojawiają się także dla $T > 0$. W odpowiednio niskich temperaturach fluktuacje termiczne o charakterystycznej energii $k_B T$ współzawodniczą z fluktuacjami kwantowymi o charakterystycznej energii $\hbar\omega$. Gdy $\hbar\omega > k_B T$, zachowanie układu jest zdominowane przez fluktuacje kwantowe. W przeciwnym przypadku decydującą rolę pełnią fluktuacje termiczne. Współzawodnictwo to prowadzi do interesujących ciągłych przejść (ang. *crossovers*) między reżimem klasycznym i kwantowym [35, 44, 192].

Występowanie QCP wpływa także na charakter fermionowych wzbudzeń kwazicząstkowych. W szczególności w pobliżu QCP w wyniku fluktuacji o naturze kwantowej może nastąpić załamanie się teorii cieczy Fermiego sformułowanej przez Landaua. Prowadzi to do powstania tzw. cieczy nielandauowskiej (ang. *non-Fermi liquid*) w której kwazicząstki nie są dobrze zdefiniowane. Zrozumienie tego typu zachowania stanowi duże wyzwanie współczesnej teorii materii skondensowanej i jest ważnym zagadnieniem pojawiającym się między innymi w kontekście fazy dziwnego metalu występującej w nadprzewodnikach miedzianowych [212, 214].

^aSkrót Me oznacza grupę metylową, Et oznacza grupę etylową, a dmit oznacza grupę siarkoorganiczną o angielskiej nazwie systematycznej 1,3-dithiole-2-thione-4,5-dithiolate.

Nowe perspektywy badań nad kwantowymi przemianami fazowymi otworzyły intensywne prace nad ultrazimnymi gazami fermionowymi w ostatnich 20 latach. Wyjątkową własnością tych układów jest możliwość strojenia oddziaływań kontaktowych pomiędzy atomami występującymi w różnych stanach nadsubtelnych za pośrednictwem magnetycznego rezonansu Feshbacha. Pozwala on na precyzyjnie kontrolowaną zmianę wartości długości rozpraszania a_F , która w pełni charakteryzuje oddziaływania międzyatomowe w rozrzedzonych gazach, poprzez modyfikację natężenia zewnętrznego pola magnetycznego. Dominującą niestabilnością obserwowaną w tego typu układach jest parowanie Coopera w kanale fal s (ang. *s-wave*), które prowadzi do kondensacji gazu do stanu nadciekłego (ang. *superfluid*). Wspomniany wcześniej rezonans Feshbacha umożliwia realizację ciągłego przejścia od stanu Bardeena-Coopera-Schrieffera dla fermionowych atomów do kondensatu Bosego-Einsteina bozonowych dimerów utworzonych z silnie związanych fermionów (ang. *BCS-BEC crossover*) [24, 76, 221].

Współczesne techniki doświadczalne pozwalają na tworzenie spolaryzowanych ultrazimnych mieszanin atomów fermionowych o nierównych masach. Na przykład aktualnie prowadzone są badania nad mieszaninami atomów ^6Li oraz ^{40}K [103, 225, 227, 239], ^{40}K i ^{161}Dy [185, 186], a także ^6Li i ^{53}Cr [155]. Wszystkie atomy danego rodzaju znajdują się w tym samym stanie spinowym (" $\uparrow$ " lub " $\downarrow$ ") i w ogólności populacje atomów różnych gatunków mogą być różne, a w konsekwencji także potencjały chemiczne tych gatunków są różne $\mu_\uparrow \neq \mu_\downarrow$. Oznacza to, że w układach tego typu mamy do dyspozycji trzy nietermiczne parametry za pomocą których możemy kontrolować charakter i położenie kwantowej przemiany fazowej między fazą nadciekłą, a normalną. Zaliczamy do nich amplitudę oddziaływania kontaktowego $g \sim a_F$, tzw. pole Zeemana $h = (\mu_\uparrow - \mu_\downarrow)/2$ oraz stosunek mas atomów tworzących mieszaninę $r = m_\downarrow/m_\uparrow$.

Mimo rosnącego zainteresowania spolaryzowanymi mieszaninami Fermiego tylko nieliczne z dotychczas prowadzonych badań teoretycznych obierały jako swój cel opis kwantowych przemian fazowych między fazą nadciekłą, a normalną. Wiele potencjalnie interesujących problemów związanych z tego typu mieszaninami czeka na rozwiązanie, co jest główną motywacją wyboru tematu badań wyrażonego w tytule dysertacji. W dalszej części przedstawimy główne cele tej rozprawy.

1.1 Cele rozprawy

Celem rozprawy jest opisanie kwantowej przemiany fazowej między stanem nadciekłym, a fazą normalną dla spolaryzowanych mieszanin gazów fermionowych o nierównych masach. W szczególności chcemy zbadać wpływ niezerównoważenia (ang. *imbalance*) mieszaniny na właściwości rozwiązywanej przemiany fazowej w $T = 0$. Analiza tego problemu będzie obejmowała wykorzystanie teorii średniego pola, zbadanie dynamicznych własności wzbudzeń kolektywnych oraz wykorzystanie grupy renormalizacji do uwzględnienia fluktuacji parametru porządku ϕ .

W ramach teorii pola średniego wyprowadzimy rozwinięcie Landaua-Ginzburga dla efektywnego potencjału. Na jego podstawie zbadamy jakie warunki muszą być spełnione, aby na diagramie fazowym był obecny QCP. Zastanowimy się także nad możliwością wygenerowania przemiany mul-

tikrytycznej w $T = 0$ dla której znika wyraz gradientowy $|\nabla\phi|^2$ w rozwinięciu Landaua-Ginzburga. Wykorzystując przybliżenie pola średniego otrzymamy diagram fazowy w skończonych temperaturach i opiszemy jego najważniejsze cechy w granicy $T \rightarrow 0$.

Na zachowanie przemiany fazowej w zerowej temperaturze mają wpływ dynamiczne własności modów kolektywnych obecnych w układzie [89, 147]. W szczególności postać tłumienia Landaua modów Goldstone'a jest istotna w pobliżu kwantowej przemiany fazowej. Z tego powodu drugim tematem poruszonym w pracy będzie zbadanie tłumienia wzbudzeń kolektywnych w fazie uporządkowanej oraz nieuporządkowanej. Odpowiemy na pytanie jakie kryteria muszą być spełnione by proces tłumienia był aktywny. Ponadto zbadamy czy niezerowność mieszanki prowadzi do istotnych zmian w zachowaniu układu zwłaszcza w granicy $T \rightarrow 0$. Rozważania te pozwolą na wyprowadzenie efektywnego działania opisującego kwantową przemianę fazową.

Ostatnim tematem podejmowanym w tej pracy będzie kwestia uwzględnienia fluktuacji parametru porządku. Posługując się nieperturbacyjnym sformułowaniem teorii renormalizacji odpowiemy na pytanie czy QCP jest stabilny ze względu na fluktuacje, a także jaki jest wpływ tłumienia Landaua na obserwowaną przemianę fazową. W szczególności wyznaczymy kształt linii krytycznej, a także przedyskutujemy zjawisko ciągłego przejścia między reżimem kwantowy i klasycznym.

1.2 Struktura rozprawy

Rozprawa jest podzielona na dwie główne części. Pierwsza ma na celu zarysowanie szerszego kontekstu doświadczalnego i teoretycznego dla rozważanego problemu. W drugiej części następuje szczegółowe omówienie otrzymanych wyników badań dla niezerównoważonych mieszanin Fermiego.

Część pierwsza składa się z dwóch rozdziałów. Pierwszy z nich (rozdział 2) poświęcony jest ultrazimnym fermionom. Rozdział ten służy do zaprezentowania kontekstu historycznego oraz technik doświadczalnych wykorzystywanych w badaniach ultrazimnych atomów. Ponadto omawiamy w nim zjawisko rezonansu Feshbacha, a także podajemy opis teoretyczny przejścia BEC-BCS. Rozdział ten kończymy podsumowaniem dotychczasowych wyników badań dotyczących spolaryzowanych mieszanin fermionów o nierównych masach. W rozdziale 3 zaprezentujemy podstawowe informacje dotyczące kwantowych przemian fazowych. Następnie omawiamy w nim teorię Hertza-Millisa, która stanowi punkt odniesienia dla prowadzonych przez nas badań.

W drugiej części dysertacji prezentujemy oryginalne wyniki dotyczące kwantowych przemian fazowych w niezerównoważonych mieszaninach Fermiego. Część ta składa się z czterech rozdziałów, których podstawą były trzy artykuły opublikowane w recenzowanych pismach naukowych:

- P. Zdybel, P. Jakubczyk; "Effective potential and quantum criticality for imbalanced Fermi mixtures", *J. Phys.: Condens. Matter* **30** (2018) 305604 [248].
- P. Zdybel, P. Jakubczyk; "Damping of the Anderson-Bogolyubov mode in Fermi mixtures by spin and mass imbalance", *Phys. Rev. A* **100** (2019) 053622 [249].

- P. Zdybel, P. Jakubczyk; "Quantum Lifshitz points and fluctuation-induced first-order phase transitions in imbalanced Fermi mixtures", *Phys. Rev. Research* **2** (2020) 033486 [250].

Rozdział 4 jest przeznaczony na ustalenie wykorzystywanej notacji, a także na wyprowadzenie podstawowych równań, których analiza jest omówiona w dalszej części dysertacji. W rozdziale 5 badamy średniopolowe własności nadciekłej przemiany fazowej i otrzymujemy diagram fazowy. Tutaj również dyskutujemy możliwość otrzymania QCP. W następnym rozdziale zajmujemy się własnościami bozonowych modów kolektywnych i w szczególności opisujemy ich tłumienie w fazie normalnej i nadciekłej. Na koniec tej części opisujemy procedurę renormalizacji dla rozważanego układu i tym samym uwzględniamy wpływ fluktuacji parametru porządku na zachowanie układu.

Rozprawę kończymy podsumowaniem najważniejszych wyników, a także prezentujemy potencjalne kierunki rozwoju badań nad kwantowymi przemianami fazowymi w niezerównoważonych mieszaninach Fermiego. Bardziej szczegółowe omówienie zawartości każdego z rozdziałów jest podane na początku każdego z nich.

Część I

Kontekst doświadczalny i teoretyczny

Rozdział 2

Ultrazimne fermiony

Problem wielu oddziałujących ze sobą fermionów jest jednym z najważniejszych zagadnień teoretycznych współczesnej fizyki materii skondensowanej. Zachowanie elektronów w nadprzewodnikach wysokotemperaturowych, nukleonów w jądrach atomowych, czy też modelowanie struktury elektronowej związków chemicznych nie może być poprawnie opisane bez uwzględnienia korelacji między fermionami. Mimo dynamicznego rozwoju takich technik teoretycznych jak wielociałowy rachunek zaburzeń, teoria dynamicznego pola średniego oraz metoda kwantowego Monte Carlo układy wielu oddziałujących fermionów ciągle stanowią olbrzymie wyzwanie dla badaczy. Głównym powodem takiego stanu rzeczy jest wymiar przestrzeni Hilberta dla rozważanego problemu. Złożoność obliczeniowa zagadnienia N fermionów rośnie eksponencjalnie wraz z N , co skutecznie uniemożliwia stosowanie metod obliczeniowych do układów o rozmiarach, które moglibyśmy traktować jako makroskopowe [142]. Ponadto układy tego typu zwykle wykazują duże bogactwo emergentnych faz, które mogą współistnieć ze sobą, a także obserwuje się ich współzawodnictwo. Korelacje między wieloma cząstkami sprawiają, że w trywialny sposób nie da się sprowadzić własności takich układów do sumy odpowiednich własności jednociiałowych [7]. Sztandarowym przykładem materiałów, które wykazują tego typu cechy są spieki ceramiczne na bazie tlenków miedzi w których obserwowane jest nadprzewodnictwo wysokotemperaturowe [176].

Oddzielną klasą syntetycznych układów fermionowych, których intensywny rozwój na pograniczu optyki kwantowej, fizyki molekularnej oraz fizyki materii skondensowanej obserwuje się od 20 lat, są ultrazimne gazy atomów fermionowych [54, 187]. Duże możliwości ich kontrolowania oraz uzyskiwana precyzja badań doświadczalnych sprawiają, że stanowią one obiecujący układ za pomocą którego można zrozumieć zachowania oddziałujących fermionów [76]. Współczesny rozwój tej dziedziny pozwala na projektowanie potencjału w którym poruszają się atomy oraz tworzenie sieci optycznych symulujących sieci krystaliczne występujące w ciele stałym [24]. Innym aspektem sprawiającym, że układy te są niezwykle ciekawym obiektem badań jest możliwość tworzenia sztucznych pól cechowania, które wpływają na topologiczne własności badanego gazu [47]. Wspomniane cechy sprawiają, że układy te świetnie nadają się do badania własności takich modeli teoretycznych jak model Hubbarda, który jest uważany za minimalny model pozwalający opisać zachowanie nadprzewodników miedzianowych [8]. Układy zimnych atomów fermionowych pozwalają na zba-

danie własności modelu Hubbarda nie na drodze obliczeń numerycznych, ale przy wykorzystaniu symulatora kwantowego tego modelu w warunkach laboratoryjnych [23].

Syntetyczne gazy fermionowe pozwalają także na badania układów, które nie mają swoich odpowiedników w ciele stałym. Przykładem mogą tu być spolaryzowane mieszaniny atomów o nierównych masach, których właściwości stanowią przedmiot niniejszej dysertacji. W układach tego typu możliwe jest występowanie egzotycznych faz materii takich jak nadciecz Sarmy-Liu-Wilczka (SLW) [135, 198] czy niejednorodnej nadcieczy Fuldego-Ferrella-Larkina-Ovchinnikova (FFLO) [73, 129]. Co więcej przemiany fazowe między nadcieczą, a fazą normalną w tego typu układach nie są w pełni zrozumiane i ich opisem, w szczególności dla temperatur bliskich zera bezwzględnego, poświęcona jest ta praca.

Struktura tego rozdziału jest następująca:

Podrozdział 2.1. Zaczniemy od przedstawienia historycznego kontekstu badań nad zimnymi atomami oraz omówienia głównych metod eksperymentalnych wykorzystywanych do ich chłodzenia i próbkowania.

Podrozdział 2.2. Następnie zajmiemy się zwięzłym opisem zjawiska rezonansu Feshbacha, który pozwala na precyzyjne kontrolowanie oddziaływania kontaktowego pomiędzy atomami w gazie.

Podrozdział 2.3. Zaprezentujemy zjawisko ciągłego przejścia (ang. *crossover*) między stanem typu Bardeena-Coopera-Schrieffera (BCS), a kondensatem Bosego-Einsteina (BEC) ciasno związanych par atomów. Przedstawimy też przegląd prac dotyczący opisu teoretycznego tego zagadnienia.

Podrozdział 2.4. Na koniec podsumujemy dotychczasowe wyniki doświadczalne oraz teoretyczne dotyczące mieszanin gazów fermionowych o nierównych populacjach i masach.

2.1 Ultrazimne atomy

Za symboliczny początek dziedziny zajmującej się ultrazimnymi gazami atomowymi można przyjąć zaobserwowanie kondensacji Bosego-Einsteina (BEC) w rozrzedzonych gazach złożonych z bozonowych atomów alkalicznych. Osiągnięcia tego dokonano niezależnie w 1995 roku w grupach kierowanych przez Cornella i Wiemana (prace prowadzono nad ^{87}Rb) [5], Huleta (w eksperymentach wykorzystano atomy ^7Li) [31] oraz Ketterlego (tutaj badano kondensację w ^{23}Na) [51]. Wiele z metod opracowanych i udoskonalonych w trakcie prac nad otrzymaniem kondensatu przez te grupy zostało później wykorzystanych w innych układach doświadczalnych ultrazimnych atomów. Warto zaznaczyć, że wcześniej także prowadzono badania nad nimi, np. od lat 80 XX wieku próbowano osiągnąć BEC w atomowym wodorze [42, 209], ale osiągnięte zostało to dopiero w 1998 roku przez grupę Kleppnera i Greytaka [72]. Kolejnym przełomem eksperymentalnym w tej dziedzinie było otrzymanie zdegenerowanego gazu fermionowych atomów ^{40}K w 1999 roku [54] przez grupę Jin. Eksperymenty prowadzone z ultrazimnymi fermionami okazały się dużym wyzwaniem i uzyskanie ich kondensatu było możliwe tylko dzięki wykorzystaniu rezonansu Feshbacha [38]. Pierwsze eksperymentalne otrzymanie tego rezonansu dla bozonowych atomów sodu przez grupę z MIT nastąpiło w 1998 roku [95] dając tym samym doświadczalne narzędzia do sprowadzenia zde-

generowanego gazu fermionów do stanu nadciekłego. Korzystając z tej metody uzyskano najpierw kondensat dimerów $^{40}\text{K}_2$ w 2003 roku [81], a w końcu także kondensat luźno związanych par ^{40}K w 2004 roku [187]. Powyższe rezultaty zostały po raz pierwszy otrzymane przez grupę z Uniwersytetu Kolorado w Boulder. Równolegle podobne wyniki dla fermionowych atomów ^6Li uzyskało kilka innych grup eksperymentalnych na świecie [15, 29, 113, 166, 258].

Otrzymanie kondensatów atomowych wymaga wykorzystania bardzo rozrzedzonych gazów, aby zapobiec ich krystalizacji. Typowe koncentracje atomów alkalicznych jakie są wykorzystywane we współczesnych eksperymentach wynoszą $n \approx 10^{12} - 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ [217], co przekłada się na pułapkowanie kilkuset tysięcy atomów. Wraz z obniżaniem temperatury atomy zaczynają ujawniać swoją naturę kwantową i zachowywać się jak paczki falowe, których rozmiar jest dany przez termiczną długość de Broglie'a $\lambda_T = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_B T}$, gdzie m to masa cząstek. Szerokość paczki jest dana nieoznaczonością położenia, która jest związana z termicznym rozkładem pędów atomów. Rozmycie paczki staje się tym większe im niższa jest temperatura T . Gdy rozmiary paczek falowych λ_T stają się porównywalne ze średnimi odległościami między atomami $d \approx 1/\sqrt[3]{n}$, atomowe paczki falowe przekrywają się i opis układu dominują efekty kwantowe. W szczególności zgodnie z przewidywaniem Einsteina z 1925 roku, gdy temperatura jednorodnego idealnego gazu bozonów osiągnie temperaturę $T = T_c$, co odpowiada $n\lambda_{T_c}^3 = \zeta(3/2) \approx 2.612^a$, atomy obsadzają makroskopowo stan podstawowy, czyli tworzą kondensat Bosego-Einsteina [48, 112]. Typowe wartości temperatur krytycznych dla bozonowych atomów alkalicznych wynoszą $T_c \approx 1 - 100 \text{ nK}$ [217].

W przypadku kondensatów fermionowych wymagane jest występowanie oddziaływań przyciągających między atomami w gazie, które można wywołać w procesie wzajemnego rozpraszania cząstek. Dzięki temu, że badane gazy są rozrzedzone można ograniczyć się jedynie do uwzględnienia fal parcjalnych typu s w teorii rozpraszania. Okazuje się, że wykorzystując rezonans Feshbacha między dwoma stanami nadsubtelnymi $|F, m_F\rangle$ i $|F', m'_F\rangle^b$ atomów używanych w eksperymencie można otrzymać efektywne przyciągające oddziaływanie kontaktowe między atomami znajdującymi się w tych dwóch stanach. Amplitudę tego oddziaływania można modyfikować za pomocą zewnętrznego pola magnetycznego. Prowadzi ono do formowania się par Coopera [46] między atomami znajdującymi się we wspomnianych wyżej stanach nadsubtelnych w analogiczny sposób jak przewiduje to teoria BCS w kontekście konwencjonalnych nadprzewodników [14]. W odpowiednio niskich temperaturach powstałe pary Coopera kondensują tworząc fazę nadciekłą.

Przewidywana w tym przypadku temperatura krytyczna (w granicy słabych sprzężeń, tj. $a_F < -1$) jest dana równaniem [217]

$$T_c = \frac{4(9\pi)^{1/3}}{e^{2-\gamma_E}} \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{mk_B} \exp\left(-\frac{\pi}{2k_F|a_F|}\right), \quad (2.1)$$

gdzie $\gamma_E \approx 0.5772$ to stała Eulera, $k_F = \sqrt[3]{3\pi^2 n}$ jest liczbą falową Fermiego, a a_F jest fermionową długością rozpraszania odpowiadającą fali parcjalnej s . Zmieniając wartość zewnętrznego pola

^a $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ to funkcja ζ Riemanna.

^b F jest liczbą kwantową całkowitego momentu pędu $\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{J}} + \hat{\mathbf{I}}$, gdzie $\hat{\mathbf{J}}$ to całkowity moment pędu elektronów, a $\hat{\mathbf{I}}$ to całkowity moment pędu jądra. m_F jest liczbą kwantową odpowiadającą rzutowi $\mathbf{F}$ na wybraną oś.

magnetycznego można dostroić a_F tak, aby wartość T_c była osiągalna w eksperymentach. Dla kondensatów fermionowych mamy dwie charakterystyczne skale energetyczne jedną związaną z temperaturą Fermiego $k_B T_F = \varepsilon_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$, a drugą z temperaturą krytyczną $k_B T_c$. Dla układów ultrazimnych atomów fermionowych stosunek $T_c / T_F \approx 0.2$. Dla porównania w konwencjonalnych nadprzewodnikach ten stosunek wynosi $10^{-4} - 10^{-5}$, a w nadprzewodnikach wysokotemperaturowych jest on rzędu 10^{-2} . Ze względu na niewielkie koncentracje ultrazimnych atomów widzimy, że w skali względnej T_c / T_F możemy kondensaty fermionowe w rozrzedzonych gazach traktować jako nadciecze wysokotemperaturowe. Dzieje się tak mimo iż wartości temperatur krytycznych T_c charakterystycznych dla typowych nadprzewodników są zwykle znacznie wyższe niż te dla rozważanych gazów fermionowych [76].

2.1.1 Chłodzenie i pułapkowanie atomów

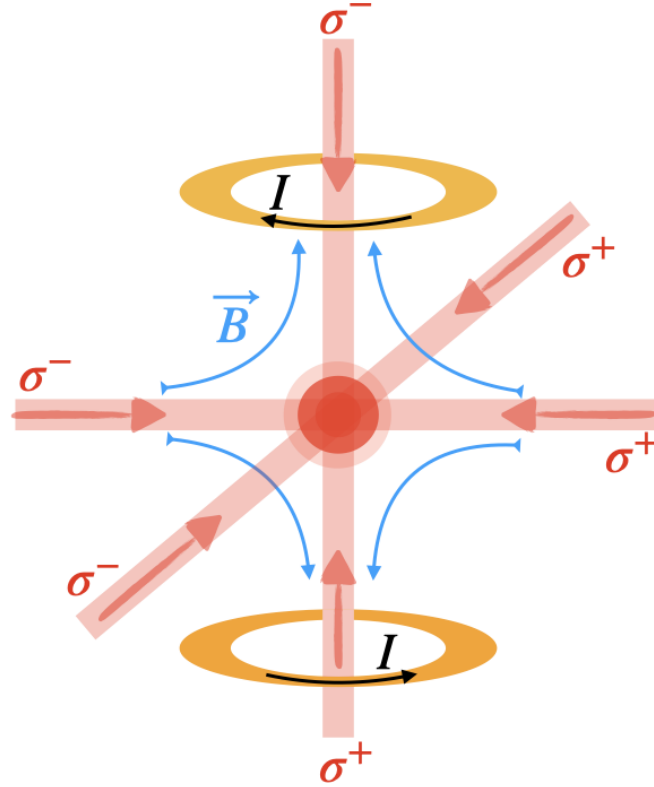
Chłodzenie atomów do ultraniskich temperatur w których możliwe jest powstawanie fazy nadciekłej nie jest zadaniem prostym. Na wstępnym etapie zmniejsza się temperaturę wiązki atomowej badanego izotopu przy wykorzystaniu chłodzenia laserowego [169, 177]. Proces ten polega na oświetlaniu atomów przeciwbieżną skolimowaną wiązką monochromatycznego światła laserowego o częstotliwości ω zbliżonej do rezonansowej częstotliwości ω_0 przejścia pomiędzy stanem podstawowym atomu $|g\rangle$ i jednym ze stanów wzbudzonych $|e\rangle$. Po pochłonięciu fotonu o energii $\hbar\omega$ pęd atomu ulega zmniejszeniu o wartość $\hbar k$, przy czym należy uwzględnić przesunięcie dopplerowskie^c związane z tym, że atom gazu porusza się z prędkością v . Następnie dochodzi do spontanicznej emisji fotonu w losowym kierunku przez wzbudzony atom powracający do stanu $|g\rangle$. Po wielu procesach tego typu przekaz pędu związany z emisją fotonów przez atom uśrednia się do zera i efektywnie pęd atomu ulega zmniejszeniu na skutek ich absorpcji. Uśredniona siła wywierana na chłodzony atom po wielu aktach rozpraszania fotonów na nim ma postać [71]

$$F_{rozp}(\delta) = \frac{\hbar k}{\tau} \frac{\Omega^2 / 2}{\delta^2 + \Omega^2 / 2 + \tau^{-2}}, \quad (2.2)$$

gdzie $\tau = 2/\Gamma$ to średni czas życia stanu $|e\rangle$, Γ to szerokość rezonansu, Ω to częstota Rabi'ego, a $\delta = \omega(1+v/c) - \omega_0$ to odstrojenie od rezonansu, przy czym uwzględniono w nim także przesunięcie Dopplera wynoszące $\omega v/c = kv$. Występowanie efektu Dopplera sprawia, że wraz ze spowalnianiem atomów zmienia się częstota przejścia i układ ulega odstrojeniu od rezonansu. Zapobiega się temu wykorzystując efekt Zeemana za pomocą, którego można przy wykorzystaniu zewnętrznego pola magnetycznego B przesuwać położenie stanów $|g\rangle$ i $|e\rangle$ względem siebie. W praktyce wiązka atomowa jest oświetlana laserem o częstotliwości ω w trakcie przechodzenia przez solenoid o zmiennym polu magnetycznym, które maleje jak $B(z) = B_0 \sqrt{1 - z/L_0} + B_{prz}$, gdzie B_0 jest wartością indukcji dostrojoną tak, aby spowolnić atomy poruszające się z najbardziej prawdopodobną prędkością w rozkładzie termicznym v_0 do niemalże zerowej prędkości na dystansie L_0 . Natomiast B_{prz} dobiera

^cNie możemy pominąć tego efektu, gdyż zmiany prędkości atomów na etapie wstępnym są największe, co powoduje zauważalne odstrojenie od przejścia rezonansowego.

się tak, aby ochłodzony gaz opuszczał spowalniacz zeemanowski z bardzo niewielkimi prędkościami, co pozwala na ekstrakcję atomów do dalszego etapu ich chłodzenia.



Rys. 2.1: Schemat budowy pułapki magnetoptycznej (MOT). Dwie cewki Helmholtza, w których prąd o natężeniu I płynie w przeciwnych kierunkach, wytwarzają kwadrupolowe pole magnetyczne B , które znika w centrum pułapki. Trzy pary przeciwbieżnych wiązek laserowych, ustawionych wzdłuż wzajemnie prostopadłych kierunków, spotykają się w środku pułapki. Wiązki propagujące się w przeciwnych kierunkach posiadają przeciwne polaryzacje kołowe σ^+ i σ^- . Światło laserowe powoduje ochładzanie i pułapkowanie atomów we wnętrzu MOT.

W następnym etapie chłodzenie atomów zachodzi przy wykorzystaniu pułapki magnetoptycznej (MOT) [148, 169]. Metoda ta polega na wykorzystaniu trzech par przeciwbieżnych wiązek laserowych spotykających się w centrum pułapki. Poszczególne pary wiązek są ustawione wzdłuż trzech wzajemnie ortogonalnych kierunków tak jak to zostało przedstawione na schematycznym rys. 2.1. Wiązki te oddziałują ze wstępnie schłodzonymi atomami wywierając na daną cząstkę wypadkową siłę o postaci [71]

$$F_{mel} = F_{rozp}(\omega - \omega_0 - kv) - F_{rozp}(\omega - \omega_0 + kv) \approx -\alpha v, \quad (2.3)$$

gdzie $\alpha = 2k \frac{\partial F_{rozp}}{\partial \omega} \approx 2\hbar k^2 \delta \Omega^2 \tau^3 / [1 + \delta^2 \tau^2]^2$, przy czym wykorzystaliśmy założenie, że atomy poruszają się z niewielkimi prędkościami, tj. $kv \ll \tau^{-1}$. Uzyskana w ten sposób wypadkowa siła oporu jest proporcjonalna do prędkości atomów, co przypomina siłę oporu występującą dla ciał poruszających się w ośrodku lepkiem. Z tego powodu zachowanie to jest nazywane melasą optyczną [40].

Minimalną temperaturę, którą można uzyskać wykorzystując przeciwbieżne wiązki laserów jest nazywana dopplerowską granicą chłodzenia (ang. *Doppler cooling limit*) i wynosi $T_D = \hbar/\tau k_B$ ^d. Na przykład dla atomów ^{23}Na temperatura ta wynosi 240 μK . Melasa optyczna pozwala na chłodzenie atomów, ale nie prowadzi do ich pułapkowania, gdyż siła oporu jest niezależna od położenia.

Wybierając w odpowiedni sposób polaryzację światła laserowego używanego do otrzymania melasy optycznej, a także wprowadzając gradient pola magnetycznego w układzie można dokonać pułapkowania chłodzonych atomów. W tym celu wykorzystuje się dwie cewki Helmholtza w których prąd elektryczny płynie w przeciwnych kierunkach (patrz rys. 2.1). W efekcie uzyskuje się kwadropolową konfigurację pola magnetycznego w przestrzeni. W środku pułapki pole magnetyczne znika, a w jego pobliżu ma ono jednorodny gradient. Samo pole magnetyczne o tej postaci jest niewystarczające do uwięzienia atomów i należy uwzględnić strukturę ich poziomów energetycznych. W celu ilustracji mechanizmu odpowiedzialnego za pułapkowanie atomów w MOT założmy, że absorpcja fotonu przez atom powoduje przejście między stanem podstawowym o $J = 0$, a stanem wzbudzonym o $J' = 1$. Ze względu na występowanie jednorodnego gradientu pola magnetycznego $\mathbf{B}$ w pobliżu centrum pułapki poziomy wzbudzone o $m'_J = \pm 1$ ulegają przesunięciu ze względu na efekt Zeemana. Oddalenie się o $z > 0$ od środka pułapki powoduje, że stan wzbudzony o $m'_J = -1$ zmniejsza swoją energię o $\hbar\beta z$, gdzie $\hbar\beta = g\mu_B \frac{dB}{dz}$, przy czym g to czynnik Landégo, a μ_B to magneton Bohra. Podobnie stan wzbudzony o $m'_J = +1$ zwiększa swoją energię o $\hbar\beta z$. Jeżeli spolaryzujemy wiązkę laserową padającą z kierunku odpowiadającego $z > 0$ tak, aby miała polaryzację kołową σ^- , wtedy ze względu na reguły wyboru przejście $J = 0 \rightarrow J' = 1$ może nastąpić tylko, gdy spełniony jest warunek $\Delta m_J = -1$. Analogicznie, gdy oddalimy się od centrum pułapki o $z < 0$ nastąpi przeciwne przesunięcie poziomów energetycznych, tj. stan o $m'_J = +1$ tym razem zmniejszy swoją energię ze względu na przesunięcie zeemanowskie. Jeżeli wiązkę laserową biegnącą od kierunku odpowiadającego $z < 0$ spolaryzujemy przeciwną polaryzacją kołową σ^+ , wtedy możliwe będą jedynie przejścia spełniające regułę wyboru $\Delta m_J = +1$. Prowadzi to do modyfikacji wyrażenia na wypadkową siłę działającą na atom w melasie optycznej (patrz równanie (2.3)) o odpowiednie przesunięcia zeemanowskie [71]

$$F_{MOT} = F_{rozp}^{\sigma^+}(\omega - [\omega_0 + \beta z] - kv) - F_{rozp}^{\sigma^-}(\omega - [\omega_0 - \beta z] + kv) \approx -\alpha v - \frac{\alpha\beta}{k}z. \quad (2.4)$$

Widzimy, że tym razem oprócz czynnika proporcjonalnego do prędkości dostajemy także czynnik związany z położeniem atomów w pułapce. Polaryzując w analogiczny sposób pozostałe wiązki laserowe wykorzystywane w melasie optycznej uzyskujemy tzw. pułpkę magnetooptyczną w której atomy poruszają się w potencjale harmonicznym w pobliżu jej środka^e.

^dTemperaturę T_D można powiązać ze współczynnikiem dyfuzji D_0 . Średni przekaz pędu $\langle p \rangle$ związany z procesami absorpcji i emisji fotonów jest równy zero, ale jego średni kwadrat $\langle p^2 \rangle$ jest niezerowy, co prowadzi do błędzenia losowego w przestrzeni pędowej. Stan stacjonarny dla tego procesu jest osiągany dla temperatury $T_D = D_0/\alpha k_B = \hbar/\tau k_B$, gdy $\delta = -\tau^{-1}$. Więcej szczegółów na ten temat można znaleźć w artykule [145].

^eWystępowanie harmonicznego potencjału pułapkującego powoduje, że modyfikacji ulegają także warunki przy których zachodzi kondensacja Bosego-Einsteina. Dla gazów bozonowych temperatura krytyczna w tym przypadku jest równa $T_c = \frac{\hbar\omega_0}{k_B} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3}$, gdzie $\omega_0 = \sqrt{\omega_x\omega_y\omega_z}$ oraz N to liczba pułapkowanych atomów [167].

W rzeczywistości otrzymanie MOT dla atomów alkalicznych jest bardziej skomplikowane i należy wziąć pod uwagę strukturę nadsubtelną chłodzonych atomów. W szczególności stany podstawowe atomów alkalicznych posiadają więcej niż jeden poziom nadsubtelny. Na przykład w ^{23}Na stan podstawowy $3S_{1/2}$ posiada stany nadsubtelne o $F = 1$ i 2 , a stan wzbudzony $3P_{3/2}$ posiada z kolei stany nadsubtelne o $F' = 0, 1, 2$ i 3^f . Jeżeli laser jest dostrojony rezonansowo do przejścia $F = 2 \rightarrow F' = 3$, to w trakcie tego procesu część atomów będzie nierezonansowo przechodziła do stanu wzbudzonego o $F' = 2$. Następnie atomy w stanie o $F' = 2$ powracają do stanu podstawowego, przy czym przejście to może zachodzić zarówno do stanu o $F = 2$ jak i o $F = 1$. Okazuje się jednak, że nie ma możliwości rezonansowego wzbudzenia atomów w stanie o $F = 1$ do stanu o $F' = 2$. Z tego powodu stan ten nazywany jest stanem ciemnym (ang. *dark state*), a stan o $F = 2$ stanem jasnym (ang. *bright state*). W efekcie w trakcie prowadzenia tego procesu ilość atomów obsadzających stan ciemny zaczyna rosnąć i coraz mniej atomów znajduje się w stanie jasnym, który podlega mechanizmowi działania MOT. Proces taki nazywany jest pompowaniem optycznym (ang. *optical pumping*). Aby zapewnić dobre działanie MOT w tym przypadku należy dodać dodatkowy laser dostrojony do przejścia między stanami $F = 1$ oraz $F' = 2$, który powoduje "przepompowanie" atomów ze stanu ciemnego do stanu wzbudzonego dla którego MOT działania poprawnie [168].

Ostatnim etapem zmniejszania temperatury atomów uwięzionych w MOT jest wykorzystanie tzw. chłodzenia przez odparowanie [143, 169]. Przyjmijmy, że $\bar{\epsilon}$ to średnia energia atomów w pułapce. Jeżeli w wyniku odparowania ilość atomów zmieni się o $dN < 0$ i uniesiona przez nie energia będzie równa $(1 + \gamma)\bar{\epsilon}dN$, wtedy ze względu na zachowanie energii mamy [168]

$$\bar{\epsilon} + d\bar{\epsilon} = \frac{E + (1 + \gamma)\bar{\epsilon}dN}{N + dN}, \quad (2.5)$$

gdzie $d\bar{\epsilon}$ to zmiana średniej energii atomów związaną z odparowaniem, γ jest pewną dodatnią stałą niezależną od N , która wskazuje na to, że cząstki ulegające odparowaniu mają średnio wyższą energię niż $\bar{\epsilon}$, E jest całkowitą energią atomów, a N jest ich całkowitą liczbą. Wyrażenie (2.5) możemy zapisać jako

$$\frac{d \ln \bar{\epsilon}}{d \ln N} = \gamma \Rightarrow \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}(0)} = \left(\frac{N}{N(0)} \right)^\gamma, \quad (2.6)$$

gdzie $\bar{\epsilon}(0)$ to średnia energia atomów przed odparowaniem, a $N(0)$ to ich liczba przed odparowaniem. Widzimy, że uwolnienie najszybszych atomów z pułapki powoduje zmniejszenie średniej energii atomów $\bar{\epsilon}$, a tym samym prowadzi do zmniejszenia temperatury gazu. Proces ten pozwala na osiągnięcie temperatur nawet poniżej 10 nK. W praktyce do odparowania najszybszych atomów w gazie wykorzystuje się przejścia między stanami będącymi pułapkowanymi w MOT, a tymi które pułapkowane nie są poprzez wykorzystanie impulsów promieniowania radiowego [71].

^fUżyto tutaj notacji spektroskopowej dla termów atomowych. Symbol nL_J oznacza, że atom jest w stanie o głównej liczbie kwantowej n , całkowitej orbitalnej liczbie kwantowej L (przy czym tradycyjnie używa się oznaczenia S na stan o $L = 0$, P na stan o $L = 1$, etc.) oraz liczbie kwantowej J charakteryzującej całkowity moment pędu atomu.

2.1.2 Próbkowanie własności ultrazimnych gazów

Po spulapkowaniu i ochłodzeniu atomów do odpowiednio niskich temperatur pozostaje problem próbkowania ich własności. Typową metodą wykorzystywaną w układach ultrazimnych atomów alkalicznych jest pomiar czasu lotu (ang. *time of flight*). W technice tej chmura atomów jest uwalniana z pułapki i opada w polu grawitacyjnym. W trakcie spadku swobodnego chmura atomów ulega balistycznemu rozszerzaniu i po pewnym czasie jest obrazowana za pomocą wiązki laserowej i kamery. Metoda ta pozwala na estymację temperatury chmury przed wyłączeniem pułapki [33], pomiar jednociałowej macierzy gęstości w przestrzeni odwrotnej [24], a także na obrazowanie interferencji kondensatów [9] oraz powstawania sieci wirów Abrikosowa [257]. Inną ważną techniką wykorzystującą obraz otrzymywany po termicznej ekspansji opadającej swobodnie chmury atomów jest metoda korelacji szumów [3]. Polega ona na pomiarze przestrzennych korelacji szumu występującego na otrzymanym w trakcie pomiaru obrazie chmury powstałym w wyniku absorpcji światła laserowego. Metoda ta pozwala na próbkowanie dwuciałowej macierzy gęstości w przestrzeni fourierowskiej [24].

Inną klasą metod wykorzystywaną w badaniach ultrazimnych atomów są techniki spektroskopowe, które pozwalają na pomiar widma wzbudzeń. W spektroskopii radiowej (ang. *radio-frequency spectroscopy*) [86] wykorzystuje się impulsy promieniowania radiowego o częstotliwości ν , które powodują przejścia pomiędzy podpoziomami Zeemana dla danego atomu alkalicznego. W trakcie tego procesu jest mierzona liczba atomów wzbudzanych do nieobsadzonych wysokoenergetycznych podpoziomów. Metoda ta pozwala na pomiar częstości przejść radiowych $\Gamma(\nu)$ (ang. *rf transition rate*) w funkcji częstości promieniowania radiowego. Wielkość $\Gamma(\nu)$ wiąże się z wieloma ważnymi obserwabłami charakteryzującymi kondensat [207]. Umożliwia ona pomiar takich własności układu jak wartość przerwy energetycznej związanej z parowaniem [37], rozmiar powstałych par [202], relacja dyspersji kwazicząstek [199], jednociałowa funkcja spektralna [216] czy wartość energii wiązania powstałych w wyniku oddziaływań kontaktowych molekuł dwuatomowych [259]. Metoda ta została także z powodzeniem zastosowana do obserwacji pseudoszczeliny (ang. *pseudogap*) w oddziałującym gazie Fermiego [74], a także demonstracji załamania teorii cieczy Fermiego w układach ultrazimnych fermionów [193]. Inną ważną metodą spektroskopową wykorzystywaną do badania ultrazimnych atomów jest technika wykorzystująca rozpraszanie Bragga [215, 230]. W metodzie tej wykorzystuje się dwie skrzyżowane wiązki laserowe, przy czym ich częstości wynoszą odpowiednio ω i $\omega + \delta$, a δ może być przestrajana w trakcie trwania eksperymentu. Wiazki te przecinają się w środku pułapki i powodują powstanie periodycznego potencjału. Następnie obserwuje się proces dwufotonowego rozpraszania Bragga związanego z przekazem pędu $\hbar q$, który pozwala na zrekonstruowanie czynnika struktury $S(q, \delta)$ (ang. *structure factor*) za pośrednictwem pomiaru przesunięcia środka masy chmury atomów w pułapce [230]. Metoda ta wykazuje dużą selektywność pomiaru ze względu na pęd. Za jej pośrednictwem udało się dokonać obserwacji modów Goldstone’a oraz Higgsa w ultrazimnych gazach fermionowych [91].

W badaniach ultrazimnych atomów zastosowano także metody kalorymetryczne. Udało się do-

konać pomiaru pojemności cieplnej dla ultrazimnych fermionów [114] i bozonów [190]. Metody te pozwalają na precyzyjne wyznaczenie temperatury krytycznej oraz badania zachowania pojemności cieplnej w pobliżu przejścia fazowego.

Oczywiście przedstawione w tej części metody nie są jedynymi wykorzystywanymi we współczesnych eksperymentach. Wyczerpujące podsumowanie innych technik można znaleźć w pracach [24, 50, 145, 169]. Na szczególną uwagę zasługują prace grupy doświadczalnej pod kierownictwem Hadzibabicia, której udało się otrzymać w 2013 roku jednorodną pułapkę magnetoptyczną [75]. Atomy w tym eksperymencie zostały uwięzione w pudle o wymiarach $70 \mu\text{m} \times 35 \mu\text{m} \times 6 \mu\text{m}$, przy czym boki pudła tworzyło światło laserowe wywołujące odpychający potencjał. Wpływ pola grawitacyjnego został skompensowany poprzez odpowiednie dobranie gradientu pola magnetycznego we wnętrzu pudła. Obecnie prace grupy Hadzibabicia koncentrują się na układach bozonowych. Przeprowadzono w tym przypadku badania wzbudzeń kolektywnych [137], a także wykonano pomiary dotyczące krytycznego spowolnienia (ang. *critical slowing down*) przewidywanego przez mechanizm Kibble'a-Żurka [153]. Opracowane przez nich metody stanowią potencjalny kierunek rozwoju badań doświadczalnych także dla atomów fermionowych.

2.2 Rezonans Feshbacha

Wyjątkowość dziedziny zajmującej się ultrazimnymi gazami atomowymi polega w dużej mierze na niezwyklej możliwości strojenia siły oddziaływań pomiędzy atomami z wykorzystaniem rezonansu Feshbacha. Zjawisko to zostało niezależnie opisane przez Feshbacha [67, 68] oraz Fano [65] na przełomie lat 60 i 70 XX wieku. Współczesne zastosowania rezonansu Feshbacha zostały w wyczerpujący sposób zaprezentowane w pracy przeglądowej [38].

2.2.1 Teoria rozpraszania dla ultrazimnych gazów

Omówienie zagadnienia rezonansu Feshbacha zaczniemy od krótkiej dyskusji teorii rozpraszania dla zderzeń dwóch atomów oddziałujących ze sobą potencjałem $V(r)$, gdzie r to odległość między atomami. Przyjmując, że potencjał oddziaływania pomiędzy parami neutralnych atomów można przybliżyć za pomocą potencjału o twardym rdzeniu dla odległości między atomami mniejszych niż r_c oraz przyciągającym "ogonem" typu van der Waalsa otrzymujemy [82]

$$V(r) = \begin{cases} \frac{-c_6}{r^6} & \text{dla } r > r_c, \\ \infty & \text{dla } r \leq r_c. \end{cases} \quad (2.7)$$

Dla potencjału tego można wprowadzić charakterystyczną długość $a_c = \sqrt[4]{2m_r c_6 / \hbar^2}$, gdzie $m_r = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ to masa zredukowana zderzających się atomów. Uzyskuje się ją poprzez porównanie energii kinetycznej związanej z ruchem względnym zderzających się atomów, a ich energią potencjalną^g. W przypadku typowych atomów alkalicznych wykorzystywanych w eksperymentach

^gPrzyjmuje się przy tym, że zgodnie z zasadą nieoznaczoności Heisenberga $\hbar k r \approx \hbar$, przy czym $r = a_c$.

$a_c \gg r_c$ [24].

Funkcja falowa opisująca proces rozpraszania dla sferycznie symetrycznego potencjału $V(r)$ jest dana równaniem

$$\psi_{\mathbf{k}}^{sc}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(k, \theta) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (2.8)$$

gdzie pierwszy wkład odpowiada padającej fali płaskiej, a drugi wkład sferycznej fali rozproszonej. Proces rozpraszania jest opisywany przez amplitudę rozpraszania $f(k, \theta)$, którą możemy wyrazić za pomocą fal parcjalnych [128]

$$f(k, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) f_{\ell}(k) P_{\ell}(\cos \theta), \quad (2.9)$$

gdzie $P_{\ell}(x)$ to odpowiednie wielomiany Legendre'a. Podobnie rozkładamy falę płaską w bazie fal sferycznych

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) P_{\ell}(\cos \theta) \frac{e^{ikr} - e^{-i(kr - \ell\pi)}}{2ikr}, \quad (2.10)$$

gdzie $j_{\ell}(kr)$ jest sferyczną funkcją Bessela. Porównanie tych równań prozwała na zdefiniowanie przesunięć fazowych charakteryzujących rozpraszanie w dalekim polu jako

$$e^{2i\delta_{\ell}(k)} = 1 + 2ik f_{\ell}(k). \quad (2.11)$$

Dla $\ell \neq 0$ w efektywnym potencjale trzeba uwzględnić pojawienie się bariery centryfugalnej, której wysokość można oszacować jako $E_{cf} \approx \hbar^2 \ell^2 / m_r a_c^2$. W odpowiednio niskich temperaturach energia kinetyczna ruchu względnego atomów $\hbar^2 k^2 / 2m_r$ jest mniejsza od E_{cf} . Oznacza to, że można pominać stany rozproszeniowe o $\ell \neq 0$, bo nie są one aktywne [24]. Korzystając z wyrażenia (2.9) oraz przesunięć fazowych dla $\ell = 0$ dostajemy, że dla ultrazimnych atomów alkalicznych amplitudę rozpraszania możemy rozwinąć dla małych wartości k , co prowadzi do wyrażenia^h

$$f(k, \theta) \approx f_0(k) = \frac{1}{k \operatorname{ctg} \delta_0(k) - ik} = \frac{1}{-a^{-1} + \frac{1}{2} r_e k^2 - ik}, \quad (2.12)$$

przy czym z definicji $a = -\lim_{k \rightarrow 0} \operatorname{tg} \delta_0(k)/k$ to długość rozpraszania dla fali parcjalnej s odpowiadającej $\ell = 0$, a r_e to efektywny zasięg potencjału, który definiowany jest przedstawionym wyżej rozwinięciem $k \operatorname{ctg} \delta_0(k)$ dla małych wartości k . W rozważanym problemie efektywny zasięg r_e okazuje się być rzędu a_c . Ponadto dla ultrazimnych zderzeń atomów spełniony jest warunek $ka_c \ll 1$, co pozwala zaniedbać wyraz k^2 w mianowniku równania (2.12), co daje amplitudę rozpraszania o postaci [24]

$$f(k) = -\frac{a}{1 + iak}. \quad (2.13)$$

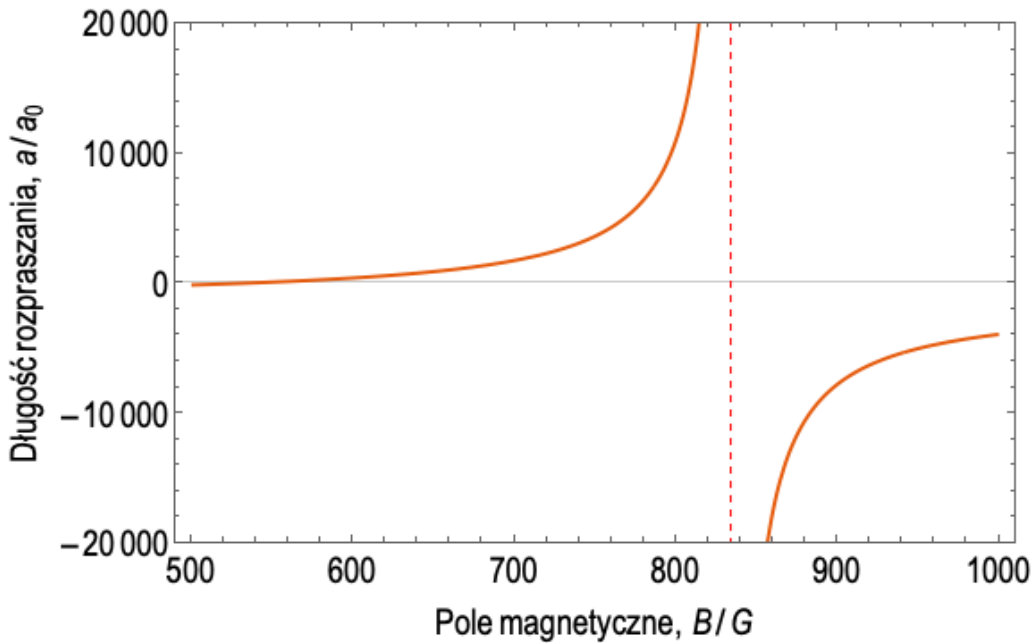
Jeżeli spełnione są warunki zachodzenia ultrazimnych zderzeń ($k_B T < E_{cf}$) możliwe jest wprowadzenie pseudopotencjału opisującego dwuciałowe zderzenia atomów dla fali parcjalnej s [93]

$$V(\mathbf{r})\psi(r) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{2m_r} \delta(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} [r\psi(r)], \quad (2.14)$$

^hWykorzystujemy tutaj relację $\exp(2i\delta_{\ell}(k)) = 1 + 2ik f_{\ell}(k)$ (patrz równanie (2.11)), która dla $\ell = 0$ prowadzi do wyrażenia $f_0(k) = \frac{\exp(2i\delta_0(k)) - 1}{2ik} = (k \operatorname{ctg} \delta_0(k) - ik)^{-1}$.

przy czym pochodna służy regularyzacji wyrażenia, gdy funkcja falowa $\psi(r)$ działająca na pseudopotencjał nie jest regularna dla $r = 0$. Potencjał ten daje amplitudę rozpraszania $f(k)$ o postaci otrzymanej w równaniu (2.13). Widzimy, że znak długości rozpraszania a determinuje to czy potencjał jest przyciągający ($a < 0$), czy też odpychający ($a > 0$). Co więcej wiadomo, że potencjał typu $\delta(r)$ posiada dokładnie jeden stan związany, gdy $a < 0$. Energia wiązania $\varepsilon_b = -\hbar^2 \kappa^2 / 2m_r$ tego stanu jest zadana przez biegun amplitudy rozpraszania $f(k)$ w dolnej półpłaszczyźnie zespolonej dany przez $k = i\kappa = i/a$. Gdy $a > 0$ nie obserwuje się stanu związanego, ale stan wirtualny położony tuż nad *continuum* potencjału danego równaniem (2.7) [128].

2.2.2 Magnetyczny rezonans Feshbacha



Rys. 2.2: Zależność długości rozpraszania a dla ${}^6\text{Li}$ w funkcji pola magnetycznego B dla magnetycznego rezonansu Feshbacha. Długość rozpraszania dla tła wynosi $a_{bg} = -1405 a_0$, gdzie a_0 to promień Bohra, rezonansowa wartość pola magnetycznego $B_0 = 834$ G, a szerokość rezonansu wynosi $|\Delta B| = 300$ G [24].

Magnetyczny rezonans Feshbach pozwala na modyfikację wartości długości rozpraszania a za pośrednictwem zewnętrznego pola magnetycznego B , a w konsekwencji także na strojenie siły oddziaływań między atomami w trakcie zderzeń. Fenomenologicznie rezonans można scharakteryzować za pomocą trzech parametrów: długości rozpraszania dla tła a_{bg} ⁱ, która otrzymywana jest dla zderzeń odstrojonych od rezonansu, wartości pola magnetycznego B_0 dla którego zachodzi rezonans oraz szerokości rezonansu ΔB , przy czym $B_0 + \Delta B$ mówi o wartości pola dla której długość rozpraszania $a(B)$ się zeruje. Rezonansową wartość długości rozpraszania można, wtedy opisać przy pomocy

ⁱDługość rozpraszania dla tła a_{bg} jest asymptotyką $a(B)$, gdy $B \rightarrow \pm\infty$.

równania [24]

$$a(B) = a_{bg} \left(1 - \frac{\Delta B}{B - B_0} \right). \quad (2.15)$$

Wykres przedstawiający ten rezonans dla atomów ${}^6\text{Li}$ został zaprezentowany na rys. 2.2. Warto zwrócić uwagę, że wartość $|a|$ gwałtownie rośnie w pobliżu rezonansu, tj. $B \rightarrow B_0$. Zakres ten odpowiada występowaniu silnych oddziaływań między atomami w gazie.

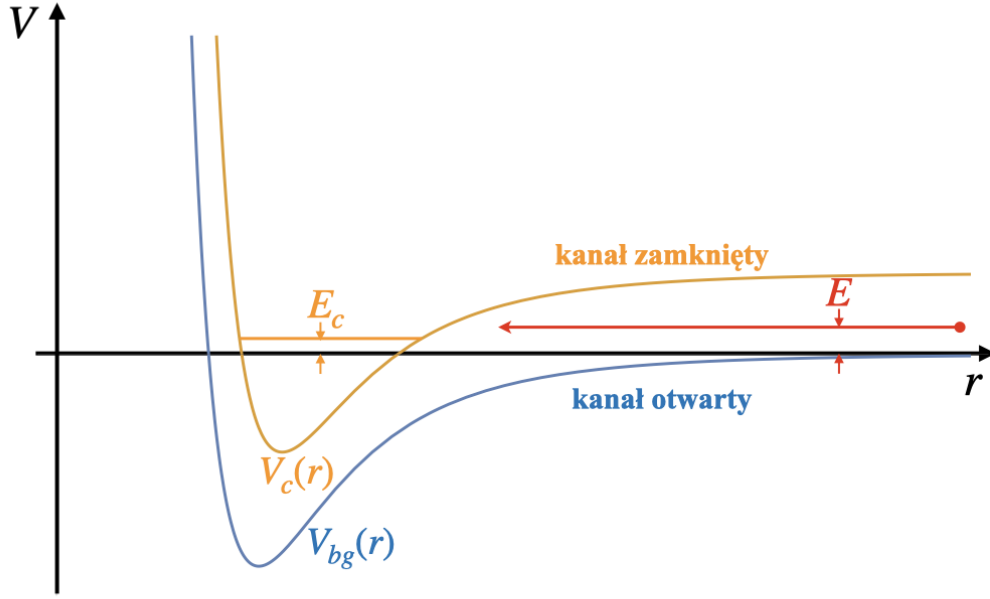
Zrozumienie pochodzenia rezonansu Feshbacha wymaga odwołania się do struktury nadsubtelnej zderzających się atomów oraz konfiguracji ich spinów w trakcie zderzenia. Zilustrujemy ten problem odwołując się do dwukanałowego modelu rezonansu Feshbacha na przykładzie atomów ${}^6\text{Li}$, których spin elektronowy wynosi $S = 1/2$, a spin jądrowy $I = 1$. Hamiltonian opisujący strukturę nadsubtelną można w tym przypadku przedstawić w postaci

$$\hat{H}' = A_{hf} \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{I}} + (2\mu_B \hat{S}_z - \mu_N \hat{I}_z) B, \quad (2.16)$$

gdzie pierwszy człon odpowiada sprzężeniu nadsubtelnemu, drugi rozszczepieniu Zeemana poziomów elektronowych i jądrowych w zewnętrznym polu magnetycznym, a μ_N to magneton jądrowy. W pobliżu rezonansu Feshbacha, który dla litu występuje dla pól magnetycznych rzędu $B_0 = 834$ G stany własne powyższego hamiltonianu są numerowane liczbami kwantowymi m_s oraz m_I , przy czym $m_F = m_s + m_I$, a nie za pomocą liczb kwantowych F i m_F jak to ma miejsce dla słabych pól magnetycznych. Powyższa własność jest spełniona, gdy $B \gg A_{hf}/\mu_B$ (≈ 30 G dla litu), tj. gdy dominującym wkładem w hamiltonianie jest część zeemanowska [24].

Rozważmy zderzenia między atomami litu w dwóch stanach, które będziemy nazywali stanami pseudospinowymi. Pierwszy z nich to $|\uparrow\rangle \approx |m_s = -1/2, m_I = 1\rangle$ (stan ten posiada niewielką domieszkę stanu $|m_s = 1/2, m_I = 0\rangle$) o $m_F = 1/2$, a drugi to $|\downarrow\rangle \approx |m_s = -1/2, m_I = 0\rangle$ (ten stan także posiada niewielką domieszkę tym razem stanu $|m_s = 1/2, m_I = -1\rangle$) o $m_F = -1/2$. W silnych polach magnetycznych spiny elektronów w zderzających się atomach ustawiają się równolegle, co powoduje, że zderzenie następuje w przybliżeniu w konfiguracji trypletowej dla spinów elektronów walencyjnych zderzających się atomów. Stan dwuciałowy $|op\rangle \equiv |\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 = |m_{F,1}^{op}\rangle_1 \otimes |m_{F,2}^{op}\rangle_2$ padających atomów odpowiada zatem potencjałowi trypletowemu $V_{bg}(r)$ między tymi cząstkami i jest nazywany kanałem otwartym. W trakcie zderzenia atomy w kanale otwartym mogą, ze względu na sprzężenie nadsubtelne, przeskoczyć do singletowego stanu związanego $|cl\rangle = |m_{F,1}^{cl}\rangle_1 \otimes |m_{F,2}^{cl}\rangle_2$, przy czym rzut całkowitego momentu pędu na oś z pozostaje zachowany, czyli $m_{F,1}^{op} + m_{F,2}^{op} = m_{F,1}^{cl} + m_{F,2}^{cl}$. Stan $|cl\rangle$ nazywamy kanałem zamkniętym. Atomy w tym przypadku znajdują się w stanie związanym dla potencjału singletowego $V_c(r)$ (patrz rys. 2.3). Położenie $V_c(r)$ względem $V_{bg}(r)$ można zmieniać za pośrednictwem modyfikacji wartości zewnętrznego pola magnetycznego o δB . Jest to związane z tym, że momenty magnetyczne stanów $|op\rangle$ i $|cl\rangle$ są różne. Jeżeli oznaczymy ich różnicę jako μ , wtedy przesunięcie $V_c(r)$ względem $V_{bg}(r)$ jest związane z energią Zeemana $\mu\delta B$, przy czym $\delta B = B - B_0$, bo układ znajduje się blisko rezonansu [24].

Dwukanałowy model opisujący rezonans Feshbacha można zilustrować przy pomocy następu-



Rys. 2.3: Uproszczony dwukanałowy model rezonansu Feshbacha. Atomy przygotowane w kanale otwartym, odpowiadającym potencjałowi $V_{bg}(r)$, zderzają się ze sobą z małą energią E . W trakcie zderzenia kanał otwarty sprzęga się z kanałem zamkniętym, który jest dany położeniem stanu związanego dla potencjału $V_c(r)$. Gdy położenie stanu związanego E_c względem *plateau* potencjału $V_{bg}(r)$ jest bliskie zera zachodzi proces rozpraszania rezonansowego. Położenie kanału zamkniętego E_c dla magnetycznego rezonansu Feshbacha jest przesuwane przy pomocy zewnętrznego pola magnetycznego B .

jącego hamiltonianu [159]

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} -\frac{\hbar^2}{2m_r} \nabla^2 + V_{bg}(r) & W(r) \\ W(r) & -\frac{\hbar^2}{2m_r} \nabla^2 + V_c(r) \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

gdzie $W(r)$ jest potencjałem odpowiedzialnym za sprzęganie się kanału otwartego z kanałem zamkniętym i ujawnia się dopiero dla odległości między atomami rzędu r_c (patrz równanie (2.7)). Zakładamy, że zderzenie atomów w kanale otwartym zachodzi dla niskich energii, tj. $E(k) = \hbar^2 k^2 / 2m_r \rightarrow 0$ (patrz rys. 2.3). W pobliżu rezonansu energia stanu związanego $E_c = \mu(B - B_0)$ i dla kanału zamkniętego jest bliska zeru (patrz rys. 2.3), co powoduje rezonansowe sprzężenie między kanałami. Sprzężenie to prowadzi do pojawienia się dodatkowego przesunięcia fazowego dla procesu rozpraszania (tak jak dla problemu rozpraszania rezonansowego Breita-Wignera [128])

$$\text{tg } \delta_{res}(k) = -\frac{\Gamma(k)}{2(E(k) - \nu)} \xrightarrow{k \rightarrow 0} \frac{\hbar^2 k}{2m_r r^* \nu}, \quad (2.18)$$

gdzie $\Gamma(k)$ to szerokość rezonansu, a $\nu = \mu(B - B_0)$ to odstrojenie od rezonansu. Charakterystyczna długość r^* jest definiowana przez amplitudę przejścia między kanałem otwartym, a zamkniętym

[24]

$$\langle cl | W | op \rangle = \frac{\hbar^2}{2m_r} \sqrt{\frac{4\pi}{r^*}}. \quad (2.19)$$

Długość r^* opisuje, więc to jak bardzo kanały otwarty i zamknięty sprzęgają się ze sobą. Uzyskane wyniki pozwalają na otrzymanie długości rozpraszania w tym problemie

$$a(B) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \operatorname{tg} (\delta_{bg}(k) + \delta_{res}(k)) \approx a_{bg} - \frac{\hbar^2}{2m_r r^* v}, \quad (2.20)$$

gdzie a_{bg} jest długością rozpraszania związaną z rozpraszaniem w kanale otwartym. Wprowadzając $\Delta B = \hbar^2/2m_r \mu r^* a_{bg}$ odtwarza się fenomenologiczne równanie (2.15).

2.3 Przejście BCS-BEC

Występowanie rezonansu Feshbacha w układach ultrazimnych fermionów pozwala na realizację ciągłego przejścia (ang. *crossover*) między kondensatem par Coopera (stan BCS), a kondensatem bozonowych molekuł złożonych z dwóch atomów fermionowych (stan BEC). Początkowo problem ten pojawił się w kontekście nadprzewodników, które posiadają niewielką koncentrację nośników i tym samym przyciągające oddziaływania między elektronami są porównywalne z energią Fermiego [61]. Następnie przejście BCS-BEC było badane w przypadku nadciekłego ^3He , dla którego Leggett teoretycznie sformułował to zagadnienie w zerowych temperaturach [130]. Jego pracę na skończone temperatury uogólnili Nozières i Schmitt-Rink (teoria NSR) [158] i to sformułowanie zostanie później przez nas wykorzystane do omówienia najważniejszych aspektów tego zjawiska. Odkrycie nadprzewodnictwa wysokotemperaturowego w 1986 roku [17] spowodowało nagły wzrost zainteresowania ciągłym przejściem BCS-BEC [58, 182, 183, 222]. Było to spowodowane obserwacją, że $k_F \xi_0 \sim 5 - 20$ dla nadprzewodników miedzianowych, gdzie ξ_0 to średni rozmiar pary Coopera. Dla porównania w standardowych nadprzewodnikach parametr $k_F \xi_0 \sim 10^3 - 10^4$. Jednak dopiero prace nad kondensatami fermionowymi w ultrazimnych gazach [15, 29, 81, 113, 166, 187, 258] pozwoliły w pełni zbadać to zjawisko, a także osiągnąć granicę unitarną w której $(k_F a_F)^{-1} \rightarrow 0$. W reżimie unitarnym gaz fermionowy wykazuje niezmienniczość skalowania oraz konforemność. Współczesny stan wiedzy dotyczącej własności przejścia BCS-BEC oraz unitarnego gazu fermionów został zaprezentowany w monografii [256] oraz pracy przeglądowej [220].

Do opisu przejścia BCS-BEC wykorzystamy model w którym przyjmujemy, że fermiony mogą znajdować się w jednym z dwóch stanów pseudospinowych $|\uparrow\rangle$ lub $|\downarrow\rangle$. Atomy w przeciwnych stanach pseudospinowych ulegają parowaniu na skutek występowania efektywnego oddziaływania kontaktowego $V(\mathbf{r}) = g\delta(\mathbf{r})$, gdzie $g < 0$. Rozważamy sytuację w której populacje oraz masy atomów o przeciwnych spinach są jednakowe. Hamiltonian ma w tym przypadku postać

$$\hat{H} - \mu\hat{N} = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}, \sigma} + \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \downarrow}^\dagger c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}/2, \downarrow} c_{-\mathbf{k}'+\mathbf{q}/2, \uparrow}, \quad (2.21)$$

gdzie $\xi_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2/2m - \mu$ to relacja dyspersji, μ to potencjał chemiczny, V to objętość układu, a $c_{\mathbf{k}, \sigma}^{(\dagger)}$ to odpowiedni operator anihilacji (kreacji) cząstki o pędzie $\hbar\mathbf{k}$ oraz pseudospinie $\sigma \in \{\uparrow, \downarrow\}$. Wy-

korzystanie tego modelu prowadzi do pojawienia się osobliwości w granicy krótkofalowej $k \rightarrow \infty$, gdyż potencjał kontaktowy nie posiada naturalnej regularyzacji $\hbar\Lambda$ dla pędów związanej z jego zasięgiem r_e , tj. $\Lambda \sim 1/r_e \rightarrow \infty$, bo $r_e \rightarrow 0$. Można zregularyzować ten problem korzystając z równania Lippmanna-Schwingera [217]

$$\frac{2m_r}{4\pi\hbar^2 a_F} = \frac{1}{g} - \int_{|\mathbf{k}| \leq \Lambda} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{2m_r}{\hbar^2 \mathbf{k}^2}, \quad (2.22)$$

przy czym $m_r = m/2$. W przypadku ultrazimnych gazów oddziaływanie dwuciałowe jest parametryzowane tylko przez długość rozpraszania a_F . Wykonując granicę $g \rightarrow 0^-$ oraz $\Lambda \rightarrow \infty$ w taki sposób, że utrzymujemy stałą wartość a_F możemy pozbyć się rozbieżności ultrafioletowych [220].

2.3.1 Teoria pola średniego

Na poziomie teorii pola średniego (MFT) przyjmujemy, że parowanie następuje przy $\mathbf{q} = 0$ i przybliżamy człon oddziaływania w równaniu (2.21) korzystając z relacji

$$\mathcal{P}_{\mathbf{k}}^\dagger \mathcal{P}_{\mathbf{k}'} - \langle \mathcal{P}_{\mathbf{k}}^\dagger \rangle \mathcal{P}_{\mathbf{k}'} - \mathcal{P}_{\mathbf{k}}^\dagger \langle \mathcal{P}_{\mathbf{k}'} \rangle + \langle \mathcal{P}_{\mathbf{k}}^\dagger \rangle \langle \mathcal{P}_{\mathbf{k}'} \rangle = (\mathcal{P}_{\mathbf{k}}^\dagger - \langle \mathcal{P}_{\mathbf{k}}^\dagger \rangle)(\mathcal{P}_{\mathbf{k}'} - \langle \mathcal{P}_{\mathbf{k}'} \rangle) \approx 0, \quad (2.23)$$

gdzie $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}^\dagger = c_{\mathbf{k},\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger$ oraz $\mathcal{P}_{\mathbf{k}'} = c_{\mathbf{k}',\downarrow} c_{-\mathbf{k}',\uparrow}$ są operatorami kreacji i anihilacji pary Coopera. W przybliżeniu średniego pola zaniedbujemy fluktuacje parowania, tj. $(\mathcal{P}_{\mathbf{k}}^\dagger - \langle \mathcal{P}_{\mathbf{k}}^\dagger \rangle)(\mathcal{P}_{\mathbf{k}'} - \langle \mathcal{P}_{\mathbf{k}'} \rangle) \approx 0$ i wprowadzając przerwę energetyczną jako $\Delta = \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{k}'} \mathcal{P}_{\mathbf{k}'}$ otrzymujemy średniopolowy hamiltonian, który jest formą kwadratową operatorów kreacji i anihilacji co sprawia, że może on zostać łatwo zdiagnozowany. Pozwala to otrzymać dwa sprzężone równania opisujące zachowanie układu [201]

$$-\frac{m}{4\pi\hbar^2 a_F} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(\frac{1 - 2f(E_k)}{2E_k} - \frac{m}{\hbar^2 \mathbf{k}^2} \right), \quad (2.24)$$

oraz

$$n = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(1 - \frac{\xi_k}{E_k} (1 - 2f(E_k)) \right), \quad (2.25)$$

gdzie pierwsze z nich to równanie przerwy energetycznej, a drugie to równanie na koncentrację atomów n . Ponadto $f(E) = (\exp(E/k_B T) + 1)^{-1}$, $E_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}$, a Δ to przerwa energetyczna związana z powstawaniem w układzie par Coopera. Pełni ona funkcję parametru porządku. W granicy $T \rightarrow T^*$ parametr porządku znika, tj. $\Delta \rightarrow 0$, co pozwala na rozwiązanie powyższego układu równań i wyznaczenie wartości T^* , gdzie jest to wartość temperatury krytycznej otrzymana w ramach MFT.

Najpierw rozpatrzmy granicę słabych sprzężeń w której $(k_F a_F)^{-1} \ll -1$ (reżim BCS). Równanie (2.25) pozwala powiązać potencjał chemiczny μ i koncentrację atomów n , a to prowadzi do wyniku spodziewanego dla idealnego gazu fermionów, tj. $\mu \approx \varepsilon_F = \hbar^2(2\pi^2 n)^{2/3}/2m$. Następnie można rozwiązać równanie (2.24) wyznaczając tym samym wartość T^* , która jest równa

$$T^* = T_F \frac{e^{Y_F - 2}}{\pi} e^{\frac{\pi}{2k_F a_F}}, \quad (2.26)$$

czyli $T^* \ll T_F$, gdyż $(k_F a_F)^{-1} \ll -1$.

Analogicznie możemy postąpić w granicy silnych sprzężeń, która odpowiada $(k_F a_F)^{-1} \gg 1$ (reżim BEC). Zakładając w tym przypadku, że $|\mu| \gg T^*$ ($\mu < 0$) możemy przyjąć, że wyrażenie $1 - 2f(\xi_k)|_{T=T^*} = \tanh(\xi_k/2k_B T^*) \approx 1$ w równaniu (2.24) i sprowadza się ono do równania na stan związany $\varepsilon_b = \hbar^2/2ma_F^2 \approx \mu/2$. Natomiast z równania (2.25) możemy wyznaczyć T^* , co daje

$$T^* = \frac{\varepsilon_b}{2k_B \ln(\varepsilon_b/\varepsilon_F)}, \quad (2.27)$$

przy czym wyrażenie to jest rozbieżne w granicy silnych sprzężeń dla $n = \text{const}$. Wynik ten możemy zrozumieć zauważając, że odpowiada on temperaturze dysocjacji w której proces tworzenia i rozpadu bozonowej pary, złożonej z fermionów o pseudospinach " $\uparrow$ " i " $\downarrow$ ", osiąga równowagę chemiczną ($f_\uparrow + f_\downarrow \rightleftharpoons b$). Oznacza to, że ε_b jest wkładem entalpowym związanym z energią uwalnianą w trakcie tworzenia się stanu związanego, a czynnik z logarytmem odpowiada wkładowi entropowemu, który faworyzuje rozpadanie się pary [222]. Zależność temperatury T^* od parametru $(k_F a_F)^{-1}$ została pokazana na rys. 2.4 (czerwona linia przerywana).

2.3.2 Teoria Nozières–Schmitt-Rinka

Widzimy, że uzyskane wyniki w ramach MFT niewłaściwie opisują przejście BCS-BEC w granicy dużych sprzężeń, bo nie prowadzą do poprawnej temperatury kondensacji dla bozonowych dimerów powstałych z atomów o przeciwnych pseudospinach, która powinna wynosić

$$T_{BEC} = \frac{2\pi\hbar^2}{k_B m_{dim}} \left(\frac{n_{dim}}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3}, \quad (2.28)$$

gdzie $m_{dim} = 2m$ to masa dimeru, a $n_{dim} = n/2$ to ich koncentracja.

W celu poprawienia tego wyniku odwołamy się do teorii NSR, która uwzględnia gaussowskie fluktuacje parowania. W tym celu posłużymy się metodą funkcji Greena [1, 139]. W fazie normalnej, tj. $\Delta = 0$, przybliżone wyrażenie na fermionową selfenergię ma postać (przyjmujemy, że $\hbar = k_B = 1$)

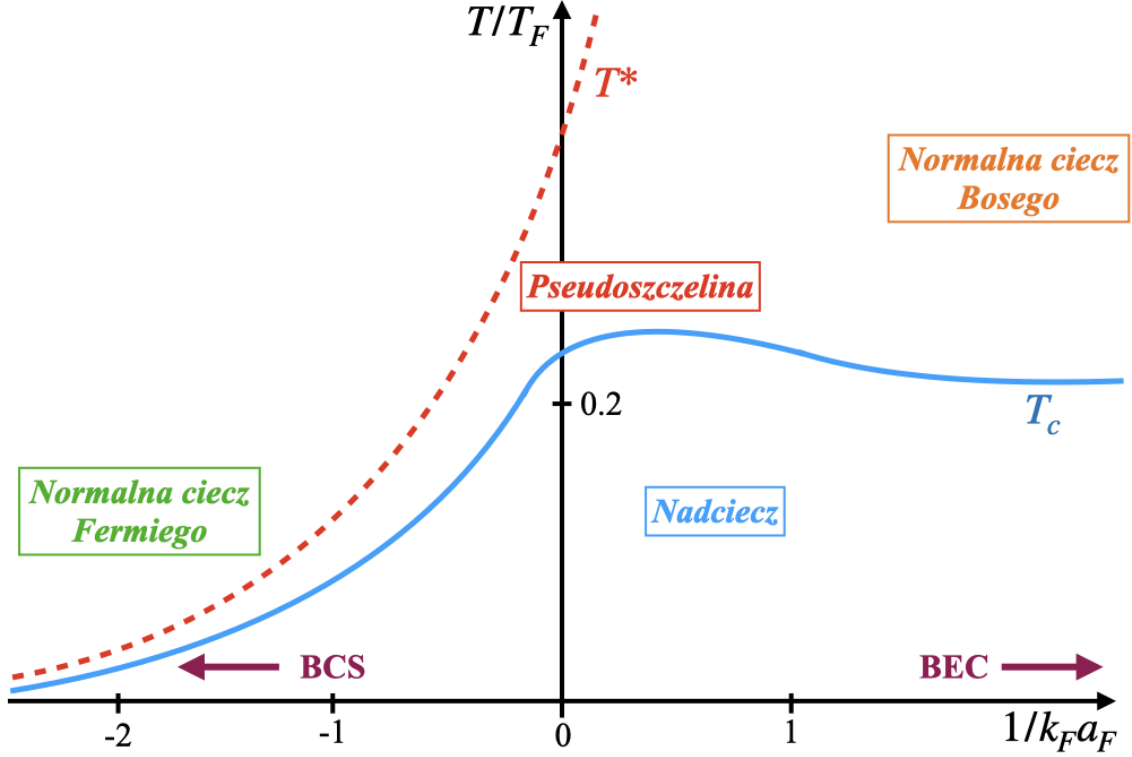
$$\Sigma(k) = - \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} T \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma_0(q) G_0(q-k). \quad (2.29)$$

Powyżej wykorzystano notację $k = (\mathbf{k}, \omega_n)$ oraz $q = (\mathbf{q}, \omega_m)$, gdzie $\omega_n = (2n+1)\pi T$ ($n \in \mathbb{Z}$) jest fermionową częstością Matsubary, a $\omega_m = 2m\pi T$ ($m \in \mathbb{Z}$) jest jej bozonowym odpowiednikiem. Wielkość $G_0(k) = (i\omega_n - \xi_k)^{-1}$ jest nieoddziałującą funkcją Greena, a $\Gamma_0(q)$ propagatorem fluktuacji parowania. Oddziałująca fermionowa funkcja Greena $G(k)$ jest dana równaniem Dysona

$$G(k) = \frac{1}{G_0^{-1}(k) - \Sigma(k)} = G_0(k) + G_0(k)\Sigma(k)G_0(k) + \dots, \quad (2.30)$$

przy czym w teorii NSR ograniczamy się tylko do poprawki liniowej w $\Sigma(k)$. Propagator fluktuacji parowania $\Gamma_0(q)$ uzyskuje się poprzez wysumowanie podklasy diagramów drabinkowych (ang. *ladder diagrams*), które pokazane są na rys. 2.5 (c). Korzystając z diagramu (c) na rys. 2.5 (tj. $\Gamma_0(q) = -g - gT \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} G_0(k+q) G_0(-k) \Gamma_0(q)$) oraz relacji (2.22) dostajemy, że [220]

$$\Gamma_0(q) = -\frac{g}{1 + g\chi_{pp}(q)} = -\left(\frac{m}{4\pi a_F} - \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{\mathbf{k}^2} + \chi_{pp}(q) \right)^{-1}, \quad (2.31)$$



Rys. 2.4: Schematyczny diagram fazowy dla przejścia BCS-BEC. Niebieska linia odpowiada ewolucji temperatury krytycznej T_c w trakcie ciągłego przejścia od słabych $((k_F a_F)^{-1} \rightarrow -\infty)$ do silnych sprzężeń $((k_F a_F)^{-1} \rightarrow \infty)$. W temperaturze T_c zachodzi przemiana fazowa między fazą normalną, a fazą nadciekłą. Linia czerwona odpowiada temperaturze T^* poniżej, której w układzie powstają pary Coopera. W reżimie pośrednim $(|(k_F a_F)^{-1}| < 1)$ oddziaływania w układzie są silne. W obszarze tym układ charakteryzuje się pseudoszczeliną w fazie normalnej, związaną z istnieniem par, które nie uległy kondensacji [256].

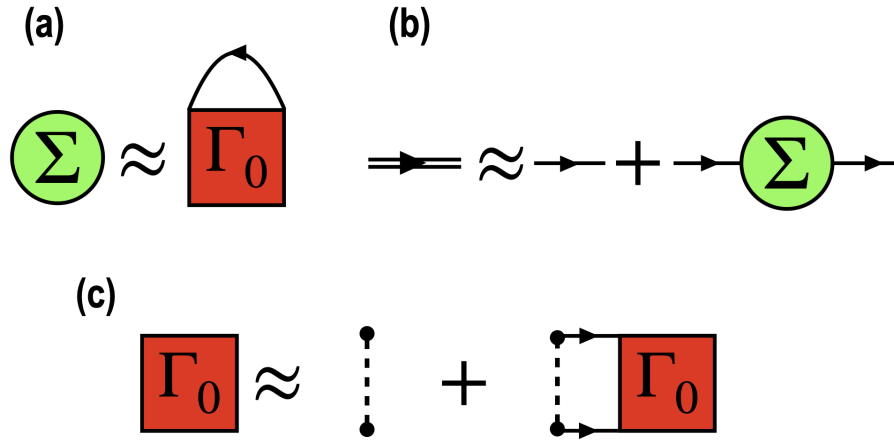
przy czym $\chi_{pp}(q)$ odpowiada diagramowi pęcherzykowemu typu cząstka-cząstka (ang. *particle-particle bubble diagram*) dla którego mamy

$$\chi_{pp}(q) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_0(\mathbf{k} + \mathbf{q}) G_0(-\mathbf{k}). \quad (2.32)$$

Korzystając z ubranej funkcji Greena $G(k)$ możemy otrzymać przesunięcie wartości wielkiego potencjału kanonicznego $\Omega(T, V, \mu)$ względem jego wartości dla układu nieoddziałującego $\Omega_0(T, V, \mu)$ korzystając z równania (porównaj z równaniem (14.41) w [32] lub z równaniem (23.22) w [69])

$$\begin{aligned} \Omega - \Omega_0 &= V \int_0^1 d\lambda \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} T \sum_n e^{i k_n 0^+} \frac{G^\lambda(k)}{G_0(k)} \approx \\ &\approx V \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} T \sum_m e^{i q_m 0^+} \ln[1 + g \chi_{pp}(q)]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Poprzez różniczkowanie względem μ możemy otrzymać wyrażenie na koncentrację cząstek po uwzględ-



Rys. 2.5: Diagramatyczna reprezentacja: (a) selfenergii fermionowej $\Sigma(k)$, (b) równania Dysona dla oddziałującej fermionowej funkcji Greena $G(k)$, które zostało obcięte do liniowego rzędu w $\Sigma(k)$ oraz (c) propagator fluktuacji parowania $\Gamma_0(q)$ w przybliżeniu NSR. Podwójna linia odpowiada oddziałującej funkcji Greena $G(k)$, linia pojedyncza nieoddziałującej funkcji Greena $G_0(k)$, a linia przerywana oznacza stałą sprzężenia $-g$.

nieniu fluktuacji parowania w ramach teorii NSR, wtedy [220]

$$n - n_0 = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial(\Omega - \Omega_0)}{\partial\mu} \right)_{T,V} \approx 2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} T \sum_n G_0^2(k) \Sigma(k). \quad (2.34)$$

Jedynym elementem ulegającym modyfikacji w teorii NSR w stosunku do MFT jest wyrażenie na koncentrację cząstek n . Równoczesne rozwiązanie równania (2.24) oraz (2.34) prowadzi do poprawnego oszacowania wartości temperatury krytycznej T_c poniżej której układ przechodzi do fazy nadciekłej. Uzyskany w ten sposób wynik został naniesiony na rys. 2.4 (niebieska linia). W granicy dużych sprzężeń odtwarza się spodziewany wynik dla temperatury krytycznej, tj. $T_c/T_F = T_{BEC}/T_F \approx 0.218$, gdzie T_{BEC} jest dane równaniem (2.28) [220].

Temperatura T^* odpowiada skali energetycznej poniżej której w układzie zaczynają formować się pary Coopera, ale nie tworzą one jeszcze kondensatu. Przy dalszym zmniejszaniu temperatury poniżej $T = T_c$ układ kondensuje i zachodzi przemiana fazowa między fazą normalną i nadciekłą. Obszar występowania wstępnie powstałych par Coopera, które nie są jeszcze skondensowane jest nazywany pseudoszczeliną i jest charakterystyczny dla sytuacji w której $|(k_F a_F)^{-1}| < 1$ (patrz rys. 2.4). Jest to reżim przejściowy, w którym występują najsilniejsze oddziaływania między atomami, przy czym dla $(k_F a_F)^{-1} = 0$ układ znajduje się w granicy unitarnej. Z kolei faza normalna dla słabych sprzężeń jest poprawnie opisywana przez teorię cieczy Fermiego, a dla silnych sprzężeń teorią cieczy Bosego [173]. Warto tu podkreślić, że granica silnych sprzężeń odpowiada słabo oddziałującym dimerom bozonowym, które posiadają resztkowy potencjał odpychający powiązany z zakazem Pauliego dla fermionów będących ich składowymi [256].

2.4 Mieszaniny gazów fermionowych

Układy ultrazimnych fermionów pozwalają na eksperymentalną realizację mieszanin o różnicowych populacjach atomów o pseudospinach " $\uparrow$ " i " $\downarrow$ " [165], tj. $n_{\uparrow} \neq n_{\downarrow}$. Przekłada się to na nierówność ich potencjałów chemicznych ($\mu_{\uparrow} \neq \mu_{\downarrow}$). Kontrolując koncentracje atomów możemy zmieniać polaryzację $P = (n_{\uparrow} - n_{\downarrow})/(n_{\uparrow} + n_{\downarrow})$ lub tzw. pole Zeemana $h = (\mu_{\uparrow} - \mu_{\downarrow})/2$. Badania w ramach teorii pola średniego (MFT) przewidują, że na diagramie fazowym w zmiennych (P, T) oprócz fazy nadciekłej i normalnej obecny jest także obszar występowania separacji faz, który nie jest obecny dla niespolaryzowanego gazu, tj. $P = 0$. Ponadto temperatura krytyczna T_c jest maksymalna, gdy $P = 0$. Obszar separacji faz w granicy unitarnej, tj. $|a_F| \rightarrow \infty$, pojawia się dla temperatur $T \approx 0.6T_c$ i w zerowej temperaturze rozciąga się dla polaryzacji $P \in [0, 1]$ [84]. W układach spolaryzowanych można badać także zjawisko ciągłego przejścia BEC-BCS poprzez modyfikację wartości a_F^{-1} . Wyniki badań sugerują, że obszar separacji faz w zmiennych (a_F^{-1}, P, T) jest największy w pobliżu granicy unitarnej ($|a_F^{-1}| < 1$), czyli w reżimie silnych oddziaływań między fermionami. Dla większych wartości $|a_F^{-1}|$ ulega on redukcji lub całkowicie znika. Z kolei przemiana dla temperatur $T > T_{tri}$ jest ciągła, przy czym T_{tri} jest temperaturą trójkrytyczną. W zmiennych (h, T) sytuacja jest analogiczna, ale obszar separacji faz jest niewidoczny. Przemiana fazowa między fazą normalną i nadciekłą dla $T < T_{tri}$ jest I rodzaju, zaś w wyższych temperaturach ($T > T_{tri}$) przemiana ta jest ciągła [163].

Wykorzystanie przybliżenia lokalnej gęstości (ang. *local density approximation*) pozwala uwzględnić wpływ potencjału pułapkującego w którym znajdują się atomy. Prowadzi to do przewidywania radialnego profilu gęstości chmury atomów i sekwencji następujących po sobie faz, przy czym typowo faza nadciekła znajduje się w środku chmury, a atomy w stanie normalnym znajdują się na jej obrzeżach [179]. Ponadto wpływ fluktuacji na diagram fazowy był badany przy wykorzystaniu perturbacyjnej grupy renormalizacji [85], a także jej nieperturbacyjnego wariantu wykorzystującego równanie Wettericha [25]. Ich uwzględnienie powoduje zmniejszenie obszaru dla którego obserwowana jest faza uporządkowana na diagramie fazowym, a także redukcję wartości T_{tri} w porównaniu z wynikiem średniopółowym. Innym ważnym kierunkiem badań jest scharakteryzowanie zachowania modów kolektywnych w układzie. W fazie nadciekłej mają one charakter wzbudzeń fononowych nazywanych modami Andersona-Bogoliubowa, przy czym ich relacja dyspersji jest liniowa dla małych pędów [118]. Mody te w skończonych temperaturach ulegają tłumieniu w wyniku sprzężenia z kwazicząstkami fermionowymi [115, 118]. Innym ważnym przykładem wzbudzenia kolektywnego obserwowanego w tego typu układach jest tzw. mod oddychający (ang. *breathing mode*), gdzie chmura atomów wykonuje pulsujący ruch polegający na naprzemiennym kurczeniu się i rozszerzaniu [90]. Mody te potencjalnie można wykorzystać do próbkowania własności faz, które występują w badanym układzie [62]. Wyczerpującą dyskusję dotyczącą także innych aspektów badanych w kontekście spolaryzowanych gazów Fermiego można znaleźć w następujących pracach przeglądowych [36, 85, 179, 204, 223].

W tej dysertacji skupimy się na układach w których, oprócz różnych koncentracji, składniki posiadają także różne masy, tj. $m_{\uparrow} \neq m_{\downarrow}$. W takich mieszaninach wszystkie atomy o danym pseu-

dospinie są jednakowe, ale te posiadające przeciwne pseudospiny odpowiadają różnym izotopom. Mieszaniny takie udało się doświadczalnie zrealizować w kilku wariantach różniących się stosunkiem mas atomów $r = m_{\downarrow}/m_{\uparrow}$, takich jak mieszanina ${}^6\text{Li}-{}^{40}\text{K}$ ($r = 6.67$) [103, 225, 227, 239], mieszanina ${}^{40}\text{K}-{}^{161}\text{Dy}$ ($r = 4.03$) [185, 186] oraz mieszanina ${}^6\text{Li}-{}^{53}\text{Cr}$ ($r = 8.83$) [155]. Układy te charakteryzują się występowaniem dwóch powierzchni Fermiego o pędach Fermiego wynoszących $k_F^{\sigma} = \sqrt{2m_{\sigma}\mu_{\sigma}}$. Pokrywają się one tylko wtedy, gdy zachodzi warunek $h = \zeta\mu$, gdzie $\mu = (\mu_{\uparrow} + \mu_{\downarrow})/2$ to średni potencjał chemiczny, a $\zeta = (r-1)/(r+1)$ to wygodny parametr charakteryzujący nierówność mas składników mieszaniny. Jedną z konsekwencji istnienia dwóch niepokrywających się kul Fermiego jest możliwość występowania egzotycznych faz materii, takich jak niejednorodny stan FFLO [73, 129] oraz nadciecz SLW [135, 198]. W ogólności nierówność mas składników mieszaniny powoduje, że diagram fazowy nie jest symetryczny ze względu na odbicie względem prostej odpowiadającej sytuacji niespolaryzowanej, tj. $P = 0$ lub $h = 0$ [12, 164, 234].

W przypadku nadcieczy typu FFLO parowanie zachodzi w sytuacji w której położenia środków kul Fermiego atomów o pseudospinie " $\uparrow$ " oraz " $\downarrow$ " nie pokrywa się. Powoduje to, że zachodzi ono przy niezerowym całkowitym pędzie środka masy pary Coopera, tj. $|\mathbf{Q}| \approx k_F^{\uparrow} - k_F^{\downarrow}$. W rezultacie parametr porządku dla tego typu nadcieczy ulega periodycznej modulacji w przestrzeni $\Delta(\mathbf{x}) = \Delta_0 \cos(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x})$ dla stanu LO, a w przypadku stanu FF parametr porządku ma postać fali płaskiej $\Delta(\mathbf{x}) = \Delta_0 e^{i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}}$ [179]. Faza FFLO może powstać, gdy wytworzenie niejednorodnej konfiguracji $\Delta(\mathbf{x})$ w układzie jest korzystne energetycznie. Dzieje się tak, gdy współczynnik proporcjonalności przy członie $|\nabla\Delta(\mathbf{x})|^2$ w rozwinięciu Landaua-Ginzburga dla potencjału termodynamicznego jest ujemny [83]. Istnienie tej fazy dla spolaryzowanych mieszanin Fermiego zostało przewidziane w ramach MFT. W tej sytuacji faza FFLO zajmuje bardzo niewielki obszar diagramu fazowego odpowiadający dużym wartościom h lub P oraz stosunkowo niskim temperaturom [12, 13, 188]. Stwierdzono także możliwość występowania w tym kontekście punktu przemiany multikrytycznej, który jest nazwany punktem Lifszycza. Występuje on w skończonych temperaturach i spotykają się w nim faza normalna, nadciekła oraz niejednorodna faza FFLO [13, 83, 174]. Badania nad wpływem zmiany stosunku mas składników mieszaniny pokazują, że jego zwiększenie prowadzi do rozrostu obszaru odpowiadającemu niejednorodnej nadcieczy na diagramie fazowym w zmiennych (P, T, a_F^{-1}) [99, 101, 189, 234]. Jeżeli chodzi o stabilność tej fazy to wyniki badań nie są jednoznaczne [105, 189]. Uwzględnienie wpływu fluktuacji związanych z występowaniem modów Goldstone'a sugerują jednak, że faza FFLO jest niestabilna dla $T > 0$ w przypadku neutralnych gazów fermionowych [105, 178]. Zdają się to potwierdzać także eksperymenty w których brak jest śladów nadcieczy typu FFLO w izotropowych układach obojętnych elektrycznie.

W przypadku fazy SLW powstająca nadciecz charakteryzuje się parowaniem pod powierzchnią Fermiego jednego ze składników. Przyjmijmy, że $k_F^{\downarrow} > k_F^{\uparrow}$. Przyciąganie pomiędzy atomami powoduje powstawanie par Coopera dla których pędy parujących się atomów są przeciwne. W tym przypadku parowanie może występować jedynie dla pędów w pobliżu $k_F^{\uparrow}$. Ponadto warunek mówiący o zerowym całkowitym pędzie pary powoduje, że niektóre atomy o pseudospinach " $\downarrow$ " są promowane na powierzchnię Fermiego $k_F^{\downarrow}$ z wnętrza morza Fermiego pozostawiając w nim przerwę

energetyczną dla pędów równych $k_F^\uparrow$. Proces formowania się par zachodzi dla powłoki o promieniu $k_F^\uparrow$ oraz o szerokości κ . Zysk energetyczny, który jest związany z energią kondensacji pojedynczej pary wynosi $E_{par} \sim k_F^\uparrow \kappa / m_r$, gdzie m_r jest masą zredukowaną dla atomów tworzących parę Coopera. Z kolei koszt związany z promowaniem niektórych atomów o pseudospinie " $\downarrow$ ", tak aby odpowiadały im pędy zbliżone do $k_F^\downarrow$, jest dany przez $E_{prom} \sim [(k_F^\downarrow)^2 - (k_F^\uparrow)^2] / 2m_\downarrow$ dla pojedynczej pary. Proces ten jest korzystny energetycznie, gdy $E_{par} > E_{prom}$. W przypadku, gdy $k_F^\downarrow - k_F^\uparrow > \kappa$ mamy do czynienia z parowaniem we wnętrzu morza Fermiego cięższego z atomów [135]. Istnienie tej fazy wiąże się z pojawieniem nadmiaru atomów jednego typu w fazie uporządkowanej i tym samym obserwowana nadciecz jest spolaryzowana. Tego typu scenariusz może zostać zrealizowany dla spolaryzowanych mieszanin Fermiego o nierównych masach [12, 84, 234]. Fazę tą udało się także zidentyfikować eksperymentalnie w tego typu układach [244].

W kontekście ultrazimnych mieszanin fermionów o nierównych masach prowadzono badania dotyczące problemu polaronu Fermiego. Dla dużych polaryzacji mieszaniny pojedyncze atomy mniejszościowego składnika zachowują się jak domieszki zanurzone w morzu atomów składnika stanowiącego większość mieszaniny. W wyniku oddziaływań atomy mniejszościowe efektywnie "ubierają się" w chmurę atomów drugiego składnika i powodują, że atomy te zachowują się jak kwazicząstki o określonym czasie życia [11, 122]. Zbadano także problem istnienia i własności pseudoszczeliny dla mieszanin w pułapkach harmonicznym [236] oraz znajdujących się w regularnych sieciach optycznych [111]. W szczególności zidentyfikowano nowy egzotyczny typ pseudoszczeliny w którym układ posiada radialny profil faz w których na przemian występuje faza normalna i pseudoszczelina, przy czym pojawia się on jedynie dla odpowiednio dużych stosunków mas składników mieszaniny [236]. Sprawdzono także zachowanie układu w granicy silnych oddziaływań w której efektywnie mieszanina składa się z fermionów i bozonowych dimerów [102]. Poza tym uogólniono ten problem uwzględniając sprzężenie spin-orbita [97], a także zbadano go gdy wiodącą niestabilnością jest ferromagnetyzm wędrujących fermionów (ang. *itinerant ferromagnetism*), a nie nadciekłość [233]. Pokazano także możliwość realizacji topologicznej przemiany fazowej dla $T = 0$ w trakcie której widmo wzbudzeń fermionowych zmienia się z posiadającego przerwę energetyczną na takie, które tej przerwy nie ma [101]. Jak widzimy spolaryzowane ultrazimne mieszaniny Fermiego z nierównymi masami są układem obfitującym w mnogość interesujących efektów oraz faz.

Ważną inspirację do podjęcia badań nad ultrazimnymi mieszaninami fermionów stanowią dla nas prace, które dotyczą kwantowych przemian fazowych w tych układach. W pierwszej z nich wykazano możliwość strojenia położenia punktu trójkrytycznego na diagramie fazowym w zmiennych (h, T) na poziomie MFT za pośrednictwem zmiany stosunku mas składników mieszaniny [164]. Wyniki tej pracy sugerują, że da się odpowiednio dobierając nietermiczne parametry kontrolne układu otrzymać kwantowy punkt krytyczny. Ponadto badania wpływu fluktuacji w takich układach pokazały, że mogą one prowadzić do zmiany rzędu przemiany fazowej. W szczególności dla dwuwymiarowej mieszaniny Fermiego pokazano, że fluktuacje prowadzą do wyindukowania ciągłej przemiany fazowej między fazą nadciekłą oraz normalną. Dzieje się tak mimo iż MFT przewiduje, że przemiana powinna być w tym przypadku I rodzaju [219]. Wpływ fluktuacji został zbadany także w kontekście

gazu unitarnego o nierównych masach w trzech wymiarach w którym zaobserwowano zmniejszenie obszaru występowania fazy uporządkowanej [189], podobne zachowanie zaobserwowano także we wspomnianym wcześniej układzie dwuwymiarowym [219]. W obu tych przypadkach nie uwzględniono tłumienia Landaua modów Goldstone'a w fazie ze złamaną symetrią, które powinno mieć wpływ na zachowanie układu w przypadku spolaryzowanym [101]. Spodziewamy się, że uwzględnienie tłumienia jest istotne dla zrozumienia charakteru kwantowej przemiany fazowej podobnie jak to ma miejsce w przypadku teorii Hertza-Millisa dla układów magnetycznych [89, 147].

W tej pracy zbadamy możliwości otrzymania kwantowego punktu krytycznego oraz jego stabilność ze względu na fluktuacje. Uwzględnimy także efekty związane z występowaniem tłumienia Landaua. Jako punkt wyjścia przyjmujemy, że wiodącą niestabilnością w naszym układzie jest parowanie singletowe dla którego jedynie atomy o przeciwnych pseudospinach parują się ze sobą. Zakładamy, że oddziaływania między fermionami są przyciągające i modelujemy je potencjałem kontaktowym o amplitudzie $g < 0$. Hamiltonian dla tego układu ma postać

$$\hat{H} - \mu\hat{N} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \xi_k^\sigma c_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k},\sigma} + \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q}} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2,\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}/2,\downarrow}^\dagger c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}/2,\downarrow} c_{-\mathbf{k}'+\mathbf{q}/2,\uparrow}, \quad (2.35)$$

gdzie $\xi_k^\sigma = \hbar^2 k^2 / 2m_\sigma - \mu_\sigma$, co stanowi to uogólnienie wzoru (2.21). W dalszej części pracy będziemy posługiwali się naturalnym układem jednostek w którym przyjmujemy, że $\hbar = k_B = m_\uparrow = 1$. Ponadto będziemy oznaczać stany pseudospinowe jako $|\uparrow\rangle \equiv |+\rangle$ oraz $|\downarrow\rangle \equiv |-\rangle$.

Rozdział 3

Kwantowe przemiany fazowe

Jednym z głównych paradygmatów współczesnej fizyki materii skondensowanej jest pojęcie przemiany fazowej, a także związane z nim spontaniczne łamanie symetrii [35, 77, 156]. Okazały się one niezwykle użyteczne przy zrozumieniu emergentnych zjawisk występujących w różnych dziedzinach nauki [210]. Za ich pomocą możemy opisać ewolucję naszego Wszechświata od bardzo gorącego i jednorodnego stanu tuż po Wielkim Wybuchu, aż do chwili obecnej w której jest on wypełniony różnymi strukturami i niejednorodnościami [30]. Posługując się analogicznymi koncepcjami badacze starają się zbudować ramy teoretyczne opisujące ewolucję biologiczną oraz problem powstawania życia [78, 210], a także lepiej zrozumieć zachowania społeczne i ekonomiczne [228]. W tym kontekście zagadnienia spontanicznego łamania symetrii oraz powstawania hierarchicznych struktur w przyrodzie zdają się być ze sobą ściśle związane [7].

Przemiany fazowe w kontekście materii skondensowanej mają miejsce, gdy w wyniku modyfikacji pewnego parametru kontrolnego jakościowe własności badanego układu ulegają gwałtownej zmianie. Przemiany takie zwykle zachodzą w skończonych temperaturach i makroskopowy porządek ulega w ich trakcie zniszczeniu na skutek fluktuacji termicznych [35, 77, 156]. Możliwe jest także zrealizowanie przemiany fazowej w zerowej temperaturze. W tym przypadku faza uporządkowana ulega zniszczeniu na skutek fluktuacji kwantowych związanych z zasadą nieoznaczoności Heisenberga, a nie z fluktuacjami termicznymi jak to ma miejsce w przypadku klasycznym. Przemiany tego typu nazywamy kwantowymi przemianami fazowymi i ich występowanie w układzie ma wpływ także na jego własności w $T > 0$ [44, 192, 231]. W szczególności obecność kwantowego punktu krytycznego (QCP) na diagramie fazowym jest związana z intrygującymi efektami obserwowanymi w takich materiałach jak magnetyczne izolatory oparte na metalach ziem rzadkich [22], wysokotemperaturowe nadprzewodniki [49, 140, 146, 152, 162, 191], a także organiczne przewodniki [59]. Kwantowa krytyczność została zaobserwowana także w kontekście ultrazimnych atomów [252, 253]. Szczegółowe omówienie tego problemu można znaleźć w pracach przeglądowych [20, 44, 138, 192, 211, 231, 232].

Struktura tego rozdziału jest następująca:

Podrozdział 3.1. Zaczniemy od przedstawienie podstaw teorii skalowania dla klasycznych ($T > 0$) oraz kwantowych ($T = 0$) przemian fazowych. Scharakteryzujemy najważniejsze różnice między

tymi dwoma typami przemian oraz wprowadzimy wykładnik dynamiczny z . Ponadto pokażemy, że istnieje korespondencja między kwantową przemianą fazową w d wymiarach, a klasyczną przemianą w $D = d + z$ wymiarach.

Podrozdział 3.2. Następnie zaprezentujemy podstawowe informacje na temat teorii Hertza-Millisa w przypadku ferromagnetyzmu wędrujących elektronów. Opiszemy jaki wpływ na przemianę fazową ma tłumienie Landaua paramagnonów. Następnie omówimy ciągłe przejście od reżimu klasycznego do kwantowego dla $T > 0$ w obszarze zlokalizowanym ponad QCP i przedstawimy uzyskiwany diagram fazowy.

3.1 Teoria skalowania

W tej części skupimy się na opisie układu w pobliżu ciągłej przemiany fazowej. Można ją scharakteryzować poprzez wprowadzenie parametru porządku ϕ , który przyjmuje niezerową wartość w fazie o złamanej symetrii, a w fazie symetrycznej jest równy zero. Zbliżając się do przemiany fluktuacje parametru porządku stają się coraz większe i w pobliżu punktu krytycznego przestrzenne korelacje są długozasięgowe. W tym przypadku układ jest charakteryzowany skalą długość ξ związaną z zasięgiem korelacji, przy czym rozbiega ona w punkcie krytycznym zgodnie z prawem potęgowym

$$\xi \propto |t|^{-\nu}, \quad (3.1)$$

gdzie t jest bezwymiarową wielkością charakteryzującą odległość od punktu krytycznego, a ν jest wykładnikiem krytycznym związanym z długością korelacji. W analogiczny sposób możemy wprowadzić charakterystyczną skalę czasową τ_c związaną z czasem zaniku korelacji w układzie. Podobnie jak ξ , także τ_c rozbiega w pobliżu przemiany fazowej zgodnie z prawem potęgowym

$$\tau_c \propto \xi^z \propto |t|^{-\nu z}, \quad (3.2)$$

przy czym zależność ta definiuje wykładnik dynamiczny z . W otoczeniu przemiany fazowej jedyną istotną skalą długości jest ξ , a skalą czasu τ_c . Obie te wielkości rozbiegają do nieskończoności w punkcie krytycznym. Oznacza to, że fluktuacje pojawiają się we wszystkich skalach czasowych i na wszystkich długościach. W konsekwencji układ jest niezmienniczy ze względu na skalowanie (ang. *scale invariant*) [231].

Zachowanie krytyczne układu może być scharakteryzowane przez podanie zestawu wykładników krytycznych opisujących nieanalityczności różnych wielkości fizycznych przy podchodzeniu do przemiany fazowej. Definicje tych wykładników zostały zawarte w tabeli 3.1. Ciągłe przemiany fazowe wykazują uniwersalność, tzn. wartości wykładników krytycznych są takie same dla całych klas przemian występujących w różnych układach fizycznych. O przynależności układu do danej klasy uniwersalności decyduje jego wymiarowość, symetria parametru porządku oraz zasięg oddziaływania. Mechanizm pojawiania się uniwersalności jest związany z silnymi fluktuacjami występującymi w pobliżu punktu krytycznego. Rozbieżność ξ powoduje, że efektywnie własności układu

ulegają uśrednieniu po dużych objętościach tracąc tym samym wrażliwość na mikroskopowe szczegóły [156, 231]. Fluktuacje są w pełni uwzględnione w opisie średniopolowym układu, gdy $d > d_c^+$, przy czym d_c^+ to górny wymiar krytyczny. W tym przypadku średniopolowe wartości wykładników krytycznych przewidywane przez teorię Landaua-Ginzburga są poprawne [77, 156].

Tab. 3.1: Definicje wykładników krytycznych związanych z zachowaniem różnych obserwabli przy podchodzeniu do punktu krytycznego. Parametry charakteryzujące układ to w tym przypadku zredukowana temperatura $t = (T - T_c)/T_c$, parametr porządku ϕ (np. magnetyzacja m dla ferromagnetyków) oraz sprzężone z nim pole źródłowe J (np. pole magnetyczne B dla ferromagnetyków). Przyjmujemy, że układ jest d -wymiarowy [77, 156, 231].

Obserwabla	Wykładnik	Definicja	Dodatkowe warunki
Pojemność cieplna	α	$C \propto t ^{-\alpha}$	$t \rightarrow 0, \quad J = 0$
Parametr porządku	β	$\phi \propto (-t)^\beta$	$t \rightarrow 0^-, \quad J = 0$
Podatność	γ	$\chi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial J}\right) \propto t ^{-\gamma}$	$t \rightarrow 0, \quad J = 0$
Izoterma krytyczna	δ	$J \propto \phi ^\delta \text{sgn } \phi$	$J \rightarrow 0, \quad t = 0$
Długość korelacji	ν	$\xi \propto t ^{-\nu}$	$t \rightarrow 0, \quad J = 0$
Funkcja korelacji	η	$G(r) \propto r ^{-d+2-\eta}$	$t = 0, \quad J = 0$
Czas korelacji	z	$\tau_c \propto \xi^z$	$t \rightarrow 0, \quad J = 0$

3.1.1 Teoria skalowania w przypadku klasycznym

Niezmienniczość skalowania w pobliżu punktu krytycznego powoduje, że własności fizyczne układu nie powinny ulec zmianie pod wpływem przeskalowania wszystkich długości występujących w układzie wykorzystując wspólny czynnik $b \in \mathbb{R}_+$. W trakcie tej procedury należy w taki sposób dostosować wartości zewnętrznych parametrów $\{t, J, \dots\}$ opisujących stan układu, aby długość korelacji nie uległa zmianie. Zakładamy, że jedynymi istotnymi stałymi sprzężenia są t oraz J . Prowadzi to do następującej relacji jednorodności dla osobliwej części gęstości energii swobodnej

$$f_s(t, J) = b^{-d} f_s(t b^x, J b^y), \quad (3.3)$$

przy czym $t = (T - T_c)/T_c$, a wykładniki $x = d/(2 - \alpha)$ oraz $y = d\delta/(1 + \delta)$ są dobrane w taki sposób, aby były konsystentne z definicjami wykładników krytycznych z tabeli 3.1, które można otrzymać poprzez obliczenie odpowiednich pochodnych termodynamicznych energii swobodnej^a. Powyższą relację jako pierwszy zaproponował na podstawie dociekań fenomenologicznych Widom

^aW celu powiązania wykładników x oraz y z tymi zdefiniowanymi w tabeli 3.1 należy skorzystać z następujących relacji $C(t, 0) \propto \frac{\partial^2 f_s(t, 0)}{\partial t^2}$, $\phi(t, J) \propto \frac{\partial f_s(t, J)}{\partial J}$ oraz $\chi(t, 0) \propto \frac{\partial^2 f_s(t, J)}{\partial J^2} \Big|_{J=0}$. W rezultacie otrzymuje się, że $\alpha = 2 - d/x$, $\beta = (d - y)/x$, $\gamma = (2y - d)/x$ i $\delta = y/(d - y)$.

w 1965 roku [238], a została ona uzasadniona na gruncie teorii renormalizacji przez Kadanoffa [110] i Wilsona [240, 241].

Przeskalowanie długości o czynnik b jest arbitralne i można go dokonać w taki sposób, aby $tb^x = 1$. W rezultacie otrzymujemy tzw. prawo skalowania [156]

$$f_s(t, J) = t^{d/x} f_s(1, Jt^{-y/x}) = t^{d/x} \Psi(Jt^{-y/x}), \quad (3.4)$$

gdzie $\Psi(\cdot)$ to funkcja skalująca. Obserwujemy, że w granicy $t \rightarrow 0$ funkcja $f_s(t, J)$ zależy jedynie od J . Oznacza to, że czynnik $t^{d/x}$ znajdujący się w równaniu (3.4) musi być kasowany w tej granicy, a konsekwencji

$$\Psi(Jt^{-y/x}) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} (Jt^{-y/x})^{d/y} = J^{d/y} t^{-d/x}, \quad (3.5)$$

czyli $f_s(0, J) \propto J^{d/y}$. Wniosek ten pozwala otrzymać związki pomiędzy termodynamicznymi wykładnikami krytycznymi $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Relacje skalowania między nimi mają postać [156]

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad \text{oraz} \quad \gamma = \beta(\delta - 1). \quad (3.6)$$

W przypadku wykładników dotyczących funkcji korelacji $\{\nu, \eta\}$ możemy skonstruować w analogiczny sposób przeskalowaną postać funkcji korelacji, która jest dana wyrażeniem^b

$$G(r; t) = \langle \varphi(r) \varphi(0) \rangle_t - \langle \varphi(r) \rangle_t \langle \varphi(0) \rangle_t. \quad (3.7)$$

Po przeskalowaniu długości w $G(r; t)$ wykorzystując czynnik b dostajemy [156]

$$G(r; t) = b^{-2d+2y} G(b^{-1}r; b^x t). \quad (3.8)$$

Powyżej wykorzystano równanie (3.7) oraz postać skalowania dla parametru porządku $\phi(b^x t, 0) = b^{d-y} \phi(t, 0)$, która pozwala na znalezienie wymiaru skalowania dla pola $\varphi(r)$, który wynosi $d - y$. Dla $t \neq 0$ możemy przyjąć, że $b^x t = 1$. Prowadzi to do prawa skalowania dla funkcji korelacji

$$G(r; t) = t^{2(d+y)/x} \Phi(rt^{1/x}). \quad (3.9)$$

Jeżeli ustalimy t tak, aby jego wartość była skończona i bliska zeru, wtedy spodziewamy się zanikania $G(r; t \neq 0) \sim \exp(-r/\xi)$ w granicy $r \rightarrow \infty$. Asymptotyka ta powinna być odtwarzana przez funkcję skalującą $\Phi(rt^{1/x})$, co w połączeniu z równaniem (3.1) prowadzi do relacji $\nu = 1/x$. Z kolei dla $t = 0$ dostajemy z równania (3.8), że $G(r; 0) \propto r^{-2(d-y)}$, co po porównaniu z definicją z tabeli 3.1 pozwala na otrzymanie relacji $\eta = d - 2y + 2$. Związki te pozwalają na wyprowadzenie relacji skalowania

$$\gamma = (2 - \eta)\nu, \quad (3.10)$$

^bWielkość $\phi = \langle \varphi(r) \rangle_t$ jest parametrem porządku, który otrzymuje się w wyniku termicznego uśredniania pola $\varphi(r)$ (np. dla ferromagnetyka jest to pole spinowe $s(r)$, które po uśrednieniu daje magnetyzację m).

oraz relacji hiperskalowania

$$2 - \alpha = d\nu, \quad (3.11)$$

która wiąże wykładniki krytyczne z wymiarowością układu [156].

Warto zauważyć, że dla klasycznych ciągłych przemian fazowych ($T > 0$) w relacjach skalowania nie występuje wykładnik dynamiczny z . Jest to spowodowane tym, że suma statystyczna $Z = \text{Tr}\{\exp(-H/T)\}$ faktoryzuje się na część związaną z energią kinetyczną układu H_{kin} oraz część potencjalną H_{pot} , czyli $Z = Z_{kin}Z_{pot}$. Część kinetyczna wymaga policzenia całek gaussowskich, które nie generują osobliwego wkładu do gęstości energii swobodnej. W konsekwencji w przypadku klasycznym układ efektywnie jest opisywany za pomocą modeli niezależnych od czasu, a tym samym czas korelacji nie pojawia się w problemie [231].

3.1.2 Teoria skalowania w przypadku kwantowym

W przypadku kwantowym części kinetyczna i potencjalna hamiltonianu w ogólności nie komutują, co powoduje, że kwantowo-mechaniczna suma statystyczna nie ulega faktoryzacji. Oznacza to, że własności statyczne i dynamiczne układu sprzęgają się. Problem kwantowy musi być formułowany w języku pól zależnych zarówno od współrzędnych przestrzennych, jak i czasowych. Ponadto macierz gęstości w zespole kanonicznym $\hat{\rho} \sim \exp(-\hat{H}/T)$ ma postać operatora ewolucji dla czasu urojonego $\tau = 1/T = -it$, przy czym t to czas rzeczywisty. W konsekwencji układ kwantowy poza d kierunkami przestrzennymi posiada dodatkowy kierunek czasowy związany z jego temperaturą. Gdy $T \rightarrow 0$, wtedy staje się on nieskończony. Co więcej, zgodnie z równaniem (3.2) kierunek czasowy skaluje się z z -tą potęgą długości [231]. Powyższe rozumowanie wskazuje na korespondencję pomiędzy $D = d + z$ wymiarowym układem klasycznym, a d wymiarowym układem kwantowym.

W zerowej temperaturze przemiana fazowa jest dostrajana za pośrednictwem nietermicznych parametrów kontrolnych $t = (K - K_c)/K_c$, gdzie K_c to wartość K dla której osiąga się QCP. Na przykład parametr K może być ciśnieniem, domieszkowaniem, polem magnetycznym, etc. Wykorzystanie korespondencji między problemem kwantowym, a klasycznym pozwala na zmodyfikowanie relacji jednorodności dla osobliwej części gęstości energii swobodnej dla $T = 0$ w następujący sposób [231]

$$f_s(t, J) = b^{-(d+z)} f_s(tb^x, Jb^y). \quad (3.12)$$

Relacja ta pozwala wyprowadzić w analogiczny sposób jak dla przypadku klasycznego związek między x i y , a wykładnikami zdefiniowanymi w tabeli 3.1 z tym, że teraz $t = (K - K_c)/K_c$. W rezultacie dostajemy te same relacje, co dla punktu krytycznego w $T > 0$ w których należy jedynie wymienić d na $D = d + z$. Efektywne zwiększenie wymiarowości układu do $D = d + z$ w przypadku kwantowym powoduje, że D może stać się większe od d_c^+ . Oznacza to, że wykładniki krytyczne przyjmują wartości średniopolewe, a fluktuacje niegaussowskie stają się nieistotne [44]. Do kwantowej przemiany fazowej możemy zbliżyć się także poprzez redukcję temperatury układu do zera przy jednoczesnym

utrzymywaniu $K = K_c$. W tym przypadku należy uogólnić relację jednorodności tak, aby zawierała także zależność od temperatury układu [231]

$$f_s(t, J, T) = b^{-(d+z)} f_s(t b^x, J b^y, T b^z). \quad (3.13)$$

Przedyskutujemy teraz skalowanie dla obserwabli $O(k, \omega)$ opisujących rozważany układ (np. funkcji spektralnych). W pobliżu QCP problem można opisać przy pomocy skalowania skończonych rozmiarów (ang. *finite-size scaling*) [35]. W tym przypadku układ jest scharakteryzowany pojedynczą skalą długości ξ oraz czasu $\tau_c = \omega_c^{-1} \propto \xi^z \sim T^{-1}$, która jest związana z temperaturą T . Gdy $T \rightarrow 0$ rozmiary układu w kierunku czasowym zwiększają się i gdy $T = 0$ układ w tym kierunku staje się nieskończony. Prowadzi to do następującej relacji [211]

$$\begin{aligned} O(k, \omega; t, J, T) &= \xi^{d_O} O_1(k\xi, \omega\xi^z; J\xi^y, T\xi^z) = \\ &= T^{-d_O/z} O_2(kT^{-1/z}, \omega/T; JT^{-y/z}, T\xi^z), \end{aligned} \quad (3.14)$$

gdzie O_1 i O_2 są różnymi postaciami funkcji skalujących, a d_O jest wymiarem skalującym obserwabli O . W punkcie krytycznym, tj. $t = T = J = 0$, skala długości w układzie jest związana tylko z mierzonym wektorem falowym k . Analogicznie skala energii jest zadana mierzoną wartością ω , co prowadzi do wniosku, że

$$O(k, \omega) = k^{-d_O} O_1(1, \omega/k^z) = k^{-d_O} O_3(\omega/k^z). \quad (3.15)$$

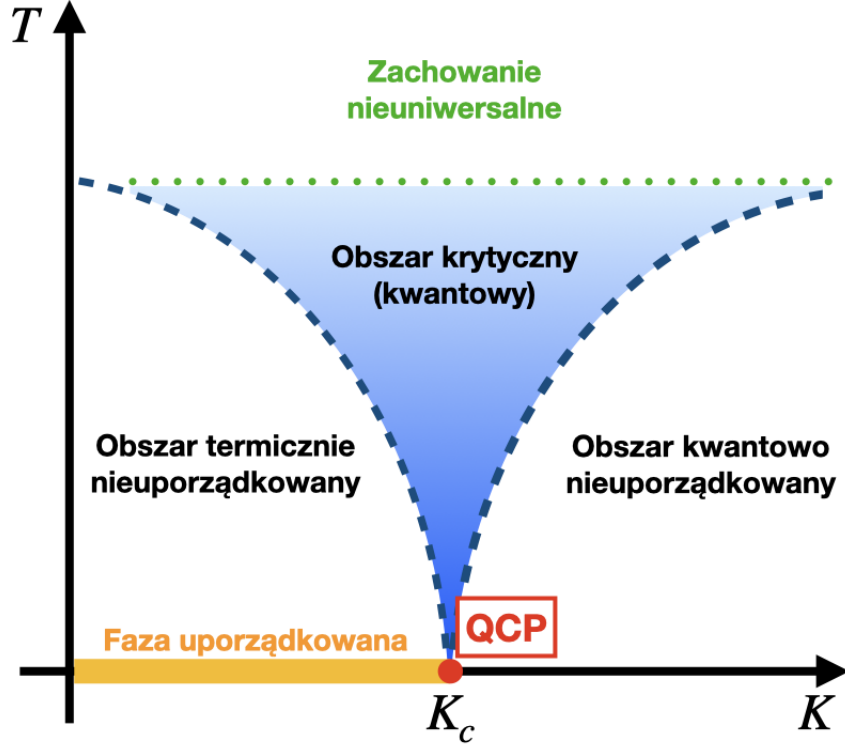
Podobnie, gdy podchodzimy do QCP redukując temperaturę T do zera jednocześnie utrzymując $t = 0$, wtedy

$$O(k = 0, \omega; T) = T^{-d_O/z} O_4(\omega/T). \quad (3.16)$$

Warto zwrócić uwagę, że skalowanie skończonych rozmiarów przedstawione w równaniu (3.14) jest uprawnione, gdy punkt krytyczny spełnia relacje hiperskalowania. Sytuacja taka ma miejsce, gdy $D < d_c^+$ [231]. W przypadku, gdy $D \geq d_c^+$ układ opisują także niebezpiecznie nieistotne zmienne (ang. *dangerously irrelevant variables*), które powodują naruszanie relacji hiperskalowania, a także modyfikację skalowania O w pobliżu QCP [138]. Z tego powodu przedstawione wyżej skalowanie dla obserwabli O jest nazywane w literaturze skalowaniem naiwnym.

3.1.3 Przejście między reżimem klasycznym i kwantowym

Przedyskutujemy teraz podstawowe aspekty diagramu fazowego dla $T \geq 0$ w przypadku, gdy układ posiada QCP. Na razie ograniczymy się do sytuacji w której faza uporządkowana występuje tylko w zerowych temperaturach. Z sytuacją taką mamy do czynienia, gdy układ jest niskowymiarowy i fluktuacje termiczne niszczą porządek w wyższych temperaturach w zgodzie z twierdzeniem Mermin-Wagnera [77, 156]. Diagram fazowy w sytuacji, gdy faza uporządkowana jest obecna także w skończonych temperaturach zostanie przedyskutowany przy omawianiu teorii Hertza-Millisa.



Rys. 3.1: Schematyczny diagram fazowy w pobliżu kwantowego punktu krytycznego (QCP). Przemiana fazowa jest manipulowana za pośrednictwem nietermicznego parametru K , przy czym QCP odpowiada $K = K_c$. Przemiana fazowa zachodzi w zerowej temperaturze między fazą uporządkowaną ($K < K_c$), a fazą symetryczną. Dalekozasięgowy porządek ulega zniszczeniu w skończonych temperaturach na skutek fluktuacji termicznych. Obszar ten nazywamy termicznie nieuporządkowanym. Z kolei, gdy $K > K_c$ dominują fluktuacje kwantowe i jest to tzw. obszar nieuporządkowany kwantowo. Bezpośrednio nad QCP znajduje się obszar, w którym fluktuacje termiczne i kwantowe są porównywalne. Ciągłe przejście między reżimem klasycznym i kwantowym wyznacza zależność $T \propto |K - K_c|^{\nu z}$ [231].

W skończonych temperaturach zachowanie układu jest określone poprzez współzawodnictwo efektów termicznych z fluktuacjami kwantowymi. Skala energetyczna związana z fluktuacjami termicznymi jest dana przez T , a energia związana z dalekozasięgowymi fluktuacjami parametru porządku wynosi $\omega_c \propto \xi^{-z} \propto |t|^{\nu z}$. Gdy $T \gg \omega_c$, wtedy dominującą rolę w układzie pełnią fluktuacje termiczne (reżim klasyczny) i odpowiadają one za zniszczenie porządku dalekozasięgowego dla $T > 0$. Z kolei, gdy $T \ll \omega_c$ tylko fluktuacje kwantowe są istotne w opisie układu (reżim kwantowy). W tym przypadku układ znajduje się w fazie symetrycznej także dla $T = 0$. Gdy $\omega_c \approx T$, wtedy znajdujemy się w obszarze krytycznym zlokalizowanym w skończonych temperaturach powyżej QCP, tj. $K = K_c$. Jest to obszar przejściowy w którym zarówno efekty termiczne jak i kwantowe są istotne. Granice tego obszaru są wyznaczone przez warunek $T \approx \omega_c \propto |K - K_c|^{\nu z}$. Warto wspomnieć, że uniwersalne zachowanie obserwowane w obszarze krytycznym jest obecne tylko w odpowiednio niskich temperaturach. Gdy T przekroczy pewną charakterystyczną mikroskopową skalę energii

obecność QCP nie wpływa na własności układu. Ciągłe przejście obserwowane między reżimem klasycznym i kwantowym zostało schematycznie przedstawione na rys. 3.1 [231].

Występowanie obszaru krytycznego jest odpowiedzialne za możliwość obserwacji QCP także w skończonych temperaturach. W tym przypadku układ jest scharakteryzowany przez termiczne wzbudzenia kwantowego stanu podstawowego, które cechuje brak obecności konwencjonalnych kwazicząstek. Powoduje to, że w obszarze tym załamuje się teoria cieczy Fermiego prowadząc do pojawienia się tzw. cieczy nielandauowskiej (ang. *non-Fermi liquid*). Jej obecność jest sygnalizowana przez nietypowe prawa potęgowe dla różnych obserwabli mierzonych w układzie [200, 229, 231]. Na przykład czas życia kwazicząstek τ_{quasi} skaluje się z energią ich wzbudzenia ϵ jak $\tau_{quasi}^{-1} \propto \epsilon^2 \sim T^2$ dla cieczy Fermiego, a w przypadku cieczy nielandauowskiej dostajemy, że $\tau_{quasi}^{-1} \propto T^\ell$, gdzie $\ell < 2$. Oznacza, że kwazicząstki są znacznie silniej tłumione w kwantowym obszarze krytycznym nad QCP niż poza nim [200].

3.2 Teoria Hertza-Millisa

W przełomowej pracy z 1976 roku Hertz zastosował teorię renormalizacji do ferromagnetycznej przemiany fazowej w $T = 0$ dla układu wędrujących elektronów [89]. Pokazał, że cechy statyczne i dynamiczne dla QCP są ze sobą powiązane, co prowadzi do pojawienia się w ich opisie wykładnika dynamicznego z . Poza tym wykazał, że możliwa jest realizacja przejść między reżimem klasycznym i kwantowym. W 1993 roku Millis dokonał rewizji pracy Hertza wprowadzając konieczne poprawki oraz zbadał zachowanie układu w pobliżu QCP dla skończonych temperatur [147]. Prace te stanowią podwaliny teorii kwantowych przemian krytycznych w układach fermionowych i ta część jest dedykowana przeglądowi najważniejszych aspektów i wyników teorii Hertza-Millisa.

3.2.1 Działanie Hertza

Skupimy się na ferromagnetycznej przemianie fazowej w układzie wędrujących elektronów, przy czym będziemy do niej podchodzić od strony fazy paramagnetycznej. Wzbudzenia kolektywne tego układu są opisywane w pobliżu przemiany za pomocą bozonowego pola porządku $\phi(\mathbf{r}, \tau)$ przyjmującego wartości rzeczywiste. Sumę statystyczną Z można przedstawić wykorzystując formalizm całek funkcjonalnych [2, 154] jako $Z = \int \mathcal{D}[\phi] \exp(-S_H[\phi])$, przy czym efektywne działanie Hertza $S_H[\phi]$ ma w tym przypadku postać [2, 138, 147]

$$S_H[\phi] \approx \frac{1}{2\beta V} \sum_{\mathbf{q}, \omega_m} \left(\delta + \mathbf{q}^2 + \frac{|\omega_m|}{\Gamma_q} \right) \phi_{\mathbf{q}, \omega_m} \phi_{-\mathbf{q}, -\omega_m} + \frac{u}{4} \int_0^\beta d\tau \int d^d \mathbf{r} [\phi^2(\mathbf{r}, \tau)]^2 = S^{(2)}[\phi] + S^{(4)}[\phi], \quad (3.17)$$

gdzie $\beta = 1/T$, $\Gamma_q = \Gamma|\mathbf{q}|$ dla przemiany ferromagnetycznej, zaś Γ jest stałą charakteryzującą tłumienie modów kolektywnych, δ jest parametrem kontrolującym przemianę fazową, a u to parametr

określający siłę samooddziaływania fluktuacji spinowych w członie $S^{(4)}[\phi] \sim \phi^4$. Szczegółowe wyprowadzenie powyższego działania wychodzące z modelu Hubbarda dla elektronów można znaleźć w monografiach Continentino [44] i Nagaosy [150]. Analogiczne wyprowadzenie zostanie w sposób szczegółowy omówione w dalszej części dysertacji w kontekście przemiany fazowej do stanu nadciekłego dla ultrazimnych mieszanin atomów fermionowych.

Współczynnik proporcjonalności w członie $S^{(2)}[\phi]$ rzędu ϕ^2 jest związany z odwrotnością podatności spinowej $\chi_{spin}^{-1}(\mathbf{q}, \omega_m) \sim 1 - \frac{U}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{f(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}) - f(\xi_{\mathbf{k}})}{i\omega_m - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \xi_{\mathbf{k}}}$, gdzie $\xi_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}} - \mu$ jest relacją dyspersji elektronów, $f(\cdot)$ jest rozkładem Fermiego-Diraca, V jest objętością układu, a U to stała oddziaływania między elektronami w modelu Hubbarda. Podatność $\chi_{spin}(\mathbf{q}, \omega_m)$ pełni rolę propagatora paramagnonów, które są wzbudzeniami kolektywnymi układu w fazie symetrycznej. Biegun tego propagatora dla $\mathbf{q} = \omega_m = 0$ odpowiada kryterium Stonera i wyznacza położenie przemiany fazowej w przybliżeniu pola średniego [2, 139]. Rozwinięcie gradientowe $\chi_{spin}(\mathbf{q}, \omega_m)$ dla małych wartości $\mathbf{q}$ oraz $|\omega_m|/|\mathbf{q}|$ prowadzi do wyrażenia w równaniu (3.17). Dynamiczny wkład rzędu $|\omega_m|/|\mathbf{q}|$ jest związany z tłumieniem Landaua paramagnonów. W trakcie tego procesu paramagnony sprzęgają się z fermionowym *continuum* par cząstka-dziura wzbudzanych w pobliżu powierzchni Fermiego. Efektem tłumienia jest modyfikacja dynamicznego zachowania układu, co objawia się tym, że $z = 3$ dla przemiany ferromagnetycznej. W granicy $|\mathbf{q}| \rightarrow 0$ ilość dostępnych par cząstka-dziura o małych pędach jest duża, co prowadzi w efekcie do silnego tłumienia fluktuacji spinowych. W tym sensie człon odpowiadający tłumieniu Landaua efektywnie uwzględnia sprzęganie się fermionowych i bozonowych stopni swobody [89, 138, 147].

3.2.2 Równania renormalizacji

Korzystając z działania Hertza zadanego równaniem (3.17) możemy wyprowadzić równania płynięcia stałych sprzężenia posługując się perturbacyjną teorią renormalizacji zgodnie z procedurą przedstawioną w pracy Millisa [147]. Zaczynamy od przypadku gaussowskiego w którym bierzemy pod uwagę tylko $S^{(2)}[\phi]$, tj. $\delta > 0$ i $u = 0$. Równania płynięcia (ang. *RG flow equations*) w przypadku gaussowskim możemy wyprowadzić wychodząc z gęstości energii swobodnej f_G o postaci [147]

$$\begin{aligned} f_G(\delta, T) &= -\frac{1}{\beta V} \ln Z_G \propto \int_0^\Lambda \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_m} \ln \left(\delta + \mathbf{q}^2 + |\omega_m|/\Gamma_q \right) \propto \\ &\propto \int_0^\Lambda \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \int_0^{\Gamma_q} \frac{d\omega}{\pi} \operatorname{ctgh} \left(\frac{\beta\omega}{2} \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega/\Gamma_q}{\delta + \mathbf{q}^2} \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

przy czym $Z_G = \int \mathcal{D}[\phi] \exp(-S^{(2)}[\phi])$, Λ to obcięcie ultrafioletowe i $|\omega_m| = -i\omega^c$. Zgodnie ze standardową procedurą renormalizacji pola bozonowe ϕ w $S[\phi]$ możemy rozdzielić na mody wolne

^cSumę Matsubary w równaniu (3.18) wykonano poprzez zróżniczkowanie powyższego wyrażenia po δ , a następnie zastąpienie $|\omega_m|$ przez $-i\omega$ i wykonanie całki konturowej danej wyrażeniem $\frac{1}{\beta} \sum_{\omega_m} g(|\omega_m|) = \mathcal{P} \int_{-\Gamma_q}^{\Gamma_q} \frac{d\omega}{2\pi i} \operatorname{ctgh}(\beta\omega/2) g(-i\omega)$, gdzie $g(x) = (\delta + \mathbf{q}^2 + x/\Gamma_q)^{-1}$, a $\mathcal{P}$ to część główna całki. Następnie całkując otrzymane wyrażenie po δ otrzymujemy powyższy wynik [2].

$\phi^<$ oraz mody szybkie $\phi^>$ tak, że

$$\phi_{\mathbf{q},\omega_m} = \begin{cases} \phi_{\mathbf{q},\omega_m}^<, & \text{gdy } 0 < |\mathbf{q}| < \Lambda/b, \\ \phi_{\mathbf{q},\omega_m}^>, & \text{gdy } \Lambda/b < |\mathbf{q}| < \Lambda, \end{cases} \quad (3.19)$$

gdzie $b > 1$. Na poziomie teorii gaussowskiej działanie dla modów wolnych $\phi^<$ i szybkich $\phi^>$ rozpręga się, tj. $S^{(2)}[\phi] = S^{(2)}[\phi^<] + S^{(2)}[\phi^>]$, więc wyrażenia na gęstość energii swobodnej po odcałkowaniu szybkich modów ma postać $f_G = f_G^< + \text{const} \cdot \ln b$, gdzie postać $f_G^<$ jest taka sama w równaniu (3.18), ale obcięcie dla pędów zostało przeskalowane, tj. $\Lambda \mapsto \Lambda' = \Lambda/b$. Chcąc przywrócić obcięcie Λ' do jego wyjściowej wartości Λ należy przeskalować $\mathbf{q}' = b\mathbf{q}$ oraz $\omega' = b^z\omega$. Procedura przeskalowania ω zmusza nas także do odcałkowania częstości z przedziału $\omega' \in [\Gamma_{q'}, \Gamma_{q'}b]$, co prowadzi do modyfikacji stałej $\text{const}' \cdot \ln b$ w wyrażeniu na f_G otrzymanego po odcałkowaniu szybkich modów. Procedura ta odtwarza obcięcie w częstościach występujące w równaniu (3.18).

Korzystając z otrzymanej relacji można zauważyć, że przeskalowanie częstości ω' jest związane z redefinicją temperatury $T' = Tb^z$, przy czym dla przemiany ferromagnetycznej $z = 3^d$. Co więcej niezmienniczość wyrażenia $f_G^<$ ze względu na przeskalowanie pędu $\mathbf{q}'$ wymaga by parametr δ skalował się jak $\delta' = b^2\delta$. Obserwacje te pozwalają wypisać równania płynięcia w przypadku gaussowskim

$$\begin{aligned} \frac{dT(b)}{d \ln b} &= zT(b), \\ \frac{d\delta(b)}{d \ln b} &= 2\delta(b). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Powyższy układ równań dla $T = \delta = 0$ posiada tzw. gaussowski punkt stały, który jest związany z występowaniem QCP na diagramie fazowym.

Kolejnym krokiem jest uwzględnienie członu oddziaływania $S^{(4)}[\phi]$ i znalezienie równania płynięcia dla stałej u . Korzystając z uzyskanego skalowania dla przypadku gaussowskiego oraz postaci działania Hertza (patrz równanie (3.17)) możemy znaleźć skalowanie pola $\phi'(\mathbf{r}', \tau') = \phi(\mathbf{r}, \tau)/\ell$, gdzie $\ell = b^{(2-d-z)/2}$. W efekcie dostajemy, że

$$\frac{u}{4} \int_0^\beta d\tau \int d^d \mathbf{r} [\phi(\mathbf{r}, \tau)]^4 \mapsto \frac{u}{4} b^{d+z} \ell^4 \int_0^\beta d\tau \int d^d \mathbf{r} [\phi'(\mathbf{r}', \tau')]^4, \quad (3.21)$$

co prowadzi do $u' = b^{4-d-z}u$. Wynik ten oznacza, że gdy $d + z > 4$ wartość u w trakcie płynięcia zmniejsza się i w obszarze w pobliżu QCP ($T = \delta = u = 0$) spodziewamy się, że układ będzie opisywany za pomocą średniopolowych wykładników krytycznych.

Występowanie oddziaływania $S^{(4)}[\phi]$ powoduje modyfikację równań płynięcia (3.20) uzyskanych wyżej. Możemy uwzględnić poprawkę pochodzącą od oddziaływania postępując analogicznie

^dSkalowanie dla temperatury T i parametru δ można otrzymać poprzez przeskalowanie wyrazu $\arctg[(\omega/\Gamma_q)/(\delta + \mathbf{q}^2)] = \arctg[(\omega/\Gamma|\mathbf{q}|)/(\delta + \mathbf{q}^2)]$ w równaniu (3.18). Po pierwsze widzimy, że δ skaluje się jak $\mathbf{q}^2$, a w konsekwencji ω skaluje się jak $|\mathbf{q}|^3$, co daje $\delta' = b^2\delta$ i $\omega' = b^3\omega$. Takie samo skalowanie temperatury T jak częstości ω wiąże się z występowaniem czynnika ω/T w funkcji $\text{ctgh}(\beta\omega/2)$ w równaniu (3.18).

jak w problemie gaussowskim, ale tym razem musimy rozwinąć człon $S^{(4)}[\phi] \equiv S_{int}[\phi]$ dla małych wartości $u > 0$ uzyskując tym samym perturbacyjne wyrażenie na sumę statystyczną [2]

$$\begin{aligned}
 Z &= \int \mathcal{D}[\phi^<] e^{-S_{ef}[\phi^<]} = \int \mathcal{D}[\phi^<] \int \mathcal{D}[\phi^>] e^{-S[\phi^<+\phi^>]} = \\
 &= \int \mathcal{D}[\phi^<] \int \mathcal{D}[\phi^>] e^{-S^{(2)}[\phi^<]-S^{(2)}[\phi^>]-S^{(4)}[\phi^<+\phi^>]} = \\
 &= \int \mathcal{D}[\phi^<] e^{-S^{(2)}[\phi^<]} Z_G^> \left\langle e^{-S_{int}[\phi^<+\phi^>]} \right\rangle_G^> \approx \\
 &\approx \int \mathcal{D}[\phi^<] e^{-S^{(2)}[\phi^<]} Z_G^> \left(1 - \langle S_{int} \rangle_G^> + \frac{1}{2} \langle S_{int}^2 \rangle_G^> + \dots \right),
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

gdzie wartość oczekiwana $\langle O \rangle_G^> = \frac{1}{Z_G^>} \int \mathcal{D}[\phi^>] O \exp(-S^{(2)}[\phi^>])$. Wystarczy, że uwzględnimy tylko wkłady liniowe w u , czyli pomijamy $\langle S_{int}^2 \rangle_G^> \sim u^2$ i wyrazy wyższego rzędu. Powyższe wyrażenie pozwala na wyprowadzenie liniowej poprawki w u do płynięcia parametru δ , która jest rzędu $\sim u \int d^d \mathbf{r} \int d\tau [\phi^<(\mathbf{r}, \tau)]^2 \langle [\phi^>]^2 \rangle_G^>$. Ewaluuując $\langle [\phi^>]^2 \rangle_G^>$ należy odcałkować mody leżące w powłoce $(\omega, |\mathbf{q}|) \in \partial\Lambda$ zdefiniowanej poprzez warunki $\{\omega \in [0, \Gamma_q] ; |\mathbf{q}| \in [\Lambda/b, \Lambda]\}$ i $\{|\mathbf{q}| \in [0, \Lambda] ; \omega \in [\Gamma_q/b^z, \Gamma_q]\}$, a następnie przeskalować uzyskane wyrażenia tak, aby odtworzyć wyjściowe obciążenia. Ostatecznie zlinearyzowane równania płynięcia mają postać [2, 147]

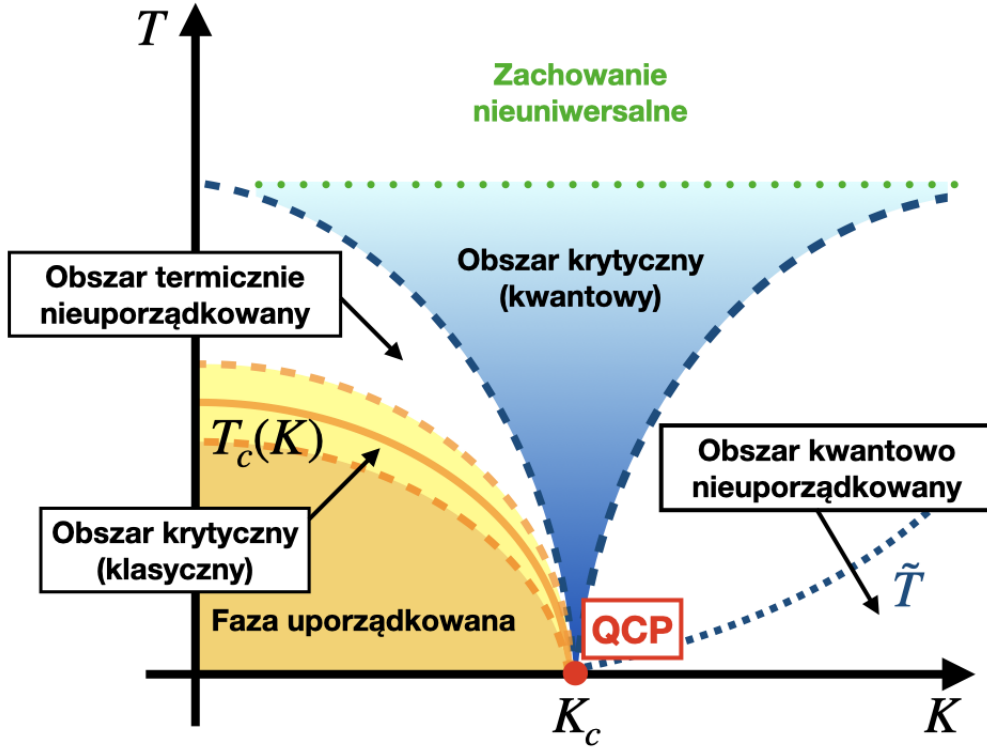
$$\begin{aligned}
 \frac{dT(b)}{d \ln b} &= zT(b), \\
 \frac{d\delta(b)}{d \ln b} &= 2\delta(b) + 12u(b)f^{(2)}[T(b)], \\
 \frac{du(b)}{d \ln b} &= (4 - d - z)u(b),
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

gdzie $f^{(2)}[T(b)] = \Lambda^d S_d \Gamma_\Lambda \int_0^1 \frac{ds}{\pi} \left[\text{ctgh} \left(\frac{s\Gamma_\Lambda}{2T} \right) \frac{s}{(\delta + \Lambda^2) + s^2} + z \text{ctgh} \left(\frac{s^{z-2}\Gamma_\Lambda}{2T} \right) \frac{s^{d+z-3}}{(\delta + s^2\Lambda)^2 + 1} \right]$, S_d to powierzchnia d -wymiarowej sfery, a $\Gamma_\Lambda = \Gamma\Lambda$. Techniczne szczegóły tego wyprowadzenia można znaleźć w pracy Millisa [147]. Widzimy, że uwzględniona poprawka sprawia, że gaussowski punkt stały jest niestabilny.

3.2.3 Rozwiązanie dla $d + z > 4$ i diagram fazowy

Przyjrzymy się teraz rozwiązaniu powyższych równań w przypadku, gdy $d + z > 4$. Zaczniemy od położenia $\Lambda = \Gamma_\Lambda = 1$, aby uprościć rozważane równania. Warto zauważyć, że temperatura $T(b) = Tb^z$ rośnie dla $T \neq 0$ w trakcie procedury renormalizacji i tym samym wpływa na wartość $f^{(2)}[T(b)]$. Gdy $T(b) \approx 1$, tj. $\ln b \approx \ln b_0 = -\frac{1}{z} \ln T$ skończone rozmiary układu w kierunku czasowym zaczynają mieć znaczenie. Przyjmujemy, że $\delta(b) \ll 1$, aby pozostać w reżimie skalowania. Gdy $\delta(b) \sim \delta(b_1) = 1$ skalowanie ulega zatrzymaniu. Korzystając z wprowadzonych skali b_0 i b_1 możemy przedyskutować przejście między reżimem kwantowym i klasycznym w fazie paramagnetycznej.

Dla odpowiednio niskich temperatur, gdy $1 \ll b_1 \ll b_0$ układ charakteryzuje się kwantowym zachowaniem krytycznym. Jest ono kontrolowane przez gaussowski punkt stały dla $T = 0$. W tym przypadku możemy przyjąć, że $T(b) \approx 0$ i wtedy z równania płynięcia dla δ (patrz równanie (3.23))



Rys. 3.2: Schematyczny diagram fazowy w pobliżu kwantowego punktu krytycznego (QCP) w przypadku, gdy faza uporządkowana występuje w skończonych temperaturach. Przemiana fazowa jest manipulowana za pośrednictwem nietermicznego parametru porządku K , przy czym QCP odpowiada $K = K_c$ dla $T = 0$. W jasno żółty obszarze występują silne niegaussowskie fluktuacje termiczne. Jest on nazywany klasycznym obszarem krytycznym i otacza linię krytyczną, która jest dana relacją $T_c \propto (K_c - K)^\psi$, przy czym ψ to wykładnik przesunięcia. W ogólnym przypadku nad klasycznym obszarem krytycznym może występować faza nieuporządkowana termicznie. Ciągłe przejście między reżimem klasycznym i kwantowym określa zależność $T \propto |K - K_c|^{\nu_z}$, przy czym wewnątrz obszaru wyznaczanego tym warunkiem zarówno fluktuacje kwantowe jak i klasyczne są istotne. Jest to kwantowy obszar krytyczny. W odpowiednio wysokich temperaturach układ przestaje wykazywać uniwersalne zachowanie związane z obecnością QCP [138].

dostajemy w wyniku jego odcałkowania wyrażenie

$$\delta(b) = b^2 \left[\delta + \frac{12uf^{(2)}(0)}{z+d-2} \right] \equiv b^2 t, \quad (3.24)$$

gdzie t jest zrenormalizowaną odległością od przemiany fazowej w $T = 0$, tj. $t = \delta - \delta_c$. Korzystając z warunku, że $\delta(b_1) = 1$ oraz $b_1 \ll T^{-1/z}$ możemy otrzymać z równania (3.24) granice obszaru nieuporządkowanego kwantowo, które prowadzą do nierówności $T \ll \tilde{T} \propto t^{\nu}$, przy czym $\nu = 1/2$ jest wartością średniopółową [147]. W obszarze tym fermiony zachowują się zgodnie z przewidywaniami teorii Landaua dla cieczy Fermiego. Obszar dla $T > \tilde{T}$ jest kwantowym obszarem krytycznym (patrz rys. 3.2).

Gdy $b_1 > b_0$, wtedy skalowanie należy rozseparować na dwa reżimy: (A) $b > b_0$ dla $T(b) > 1$

oraz (B) $b < b_0$ dla $T(b) < 1$. Zauważając, że $f^{(2)}[T(b)] \propto T(b)$, gdy $T(b) \gg 1$ można wprowadzić wielkość $v(b) = u(b)T(b)$. Pozwala ona na zmodyfikowanie i uproszczenie równań płynięcia w tym przypadku w następujący sposób

$$\begin{aligned}\frac{d\delta(b)}{d \ln b} &= 2\delta(b) + Cv(b) \\ \frac{dv(b)}{d \ln b} &= (4-d)v(b),\end{aligned}\tag{3.25}$$

gdzie C jest stałą proporcjonalności. Rozwiązując powyższy układ równań całkując go od b_0 do b dostajemy

$$\begin{aligned}\delta(b) &= \left(\delta(b_0) - \frac{Cv(b_0)}{2-d} \right) \left(\frac{b}{b_0} \right)^2 + \frac{Cv(b_0)}{2-d} \left(\frac{b}{b_0} \right)^{4-d}, \\ v(b) &= v(b_0) \left(\frac{b}{b_0} \right)^{4-d}.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Odcalkowanie równań w reżimie (B) pozwala na znalezienie warunku początkowego $\delta(b_0)$ i $v(b_0)$ w równaniu (3.26). W tym celu wprowadzamy $f^{(2)}(Te^{zx}) = f^{(2)}(0) + [f^{(2)}(Te^{zx}) - f^{(2)}(0)]$. Człon $f^{(2)}(0)$ prowadzi do tego samego wyniku jak w równaniu (3.24), a człon w nawiasie kwadratowym pozwala na znalezienie poprawki dla skończonych temperatur. W wyniku dostajemy [147]

$$\begin{aligned}\delta(b_0) &= T^{-2/z} \left[t + Bu T^{(d+z-2)/2} \right], \\ v(b_0) &= u T^{(d+z-4)/z},\end{aligned}\tag{3.27}$$

gdzie $B = \frac{12}{z} \int_0^1 dT T^{(2-d-2z)/2} [f^{(2)}(T) - f^{(2)}(0)]$. Uzyskane równania pozwolą nam na zbadanie w jaki sposób renormalizuje się linia krytyczna $T_c(t)$.

Możliwe jest zaobserwowanie dwóch różnych scenariuszy dotyczących zachowania układu. W pierwszym przypadku, gdy $\delta(b) \sim 1$, tj. skalowanie ulega zatrzymaniu, gdy wartość $v(b)$ pozostaje mała, można posługiwać się bezpiecznie rozwinięciem perturbacyjnym. W drugim zaś w trakcie płynięcia parametr $v(b)$ rośnie przyjmując wartości rzędu jedności, przy czym $\delta(b)$ pozostaje niewielka. W tym przypadku płynięcie stałych sprzężenia następuje w kierunku obszaru w którym występują silne niegaussowskie fluktuacje. Korzystając z tej obserwacji możemy sformułować tzw. kryterium Ginzburga, które określa warunki dla których fluktuacje gaussowskie są dominujące. W naszym przypadku odpowiada to $\delta(b) = 1$ oraz $v(b) \ll 1$, co można zapisać w postaci nierówności [147]

$$\frac{u T^{(d+z-4)/z}}{\left[t + (B+C) u T^{(d+z-2)/z} \right]^{1/2}} \ll 1.\tag{3.28}$$

Warto zauważyć, że nierówność ta jest złamana, gdy mianownik powyższego wyrażenia zeruje się. Odpowiadającą tej sytuacji temperaturę utożsamiamy z linią krytyczną $T_c(t)$, która ma postać [147]

$$T_c(t < 0, u) = \left[-\frac{t}{(B+C)u} \right]^{z/(d+z-2)}.\tag{3.29}$$

Uzyskany wykładnik $\psi = z/(d+z-2)$ nosi nazwę wykładnika przesunięcia i opisuje renormalizację kształtu linii krytycznej w pobliżu QCP. Warto zauważyć, że obszar diagramu w pobliżu $T_c(t)$

charakteryzuje się niegaussowskimi fluktuacjami, a jego granice są wyznaczone przez temperaturę Ginzburga T_G (patrz rys. 3.2).

Mimo iż stała u jest nieistotna, tj. skaluje się do zera (patrz równanie (3.23)) w trakcie procedury renormalizacji względem gaussowskiego punktu stałego, to jej jawne występowanie w wyrażeniu na temperaturę krytyczną T_c oznacza, że stała ta jest tzw. zmienną niebezpiecznie nieistotną. Oznacza to, że mimo iż u nie wpływa na istnienie gaussowskiego punktu krytycznego dla $d + z > 4$ to nadal pełni ważną rolę w opisie kształtu linii krytycznej i nie może zostać położone $u = 0$. Okazuje się, że także zachowanie układu przy podchodzeniu do QCP wzdłuż trajektorii $t = 0$ i $T \rightarrow 0$ zależy od u . Jako przykład można przytoczyć zachowanie długości korelacji $\xi(t = 0, T) \propto u^{-\nu} T^{-\nu/\psi}$ [44, 138].

Linia punktów krytycznych w skończonych T jest rządzone przez punkt stały Wilsona-Fishera [35], który pojawia się przy uwzględnieniu poprawek rzędu u^2 w równaniach płynięcia. W szczególności zostaje zmodyfikowane płynięcie stałej $u(b)$, które ma postać

$$\frac{du(b)}{d \ln b} = (4 - d - z)u(b) - 36u^2(b)f^{(4)}[T(b)], \quad (3.30)$$

gdzie $f^{(4)}[T(b)]$ jest analogiczną funkcją jak $f^{(2)}[T(b)]$, której dokładna postać nie jest istotna. Gdy w trakcie płynięcia osiągana jest skala $\ln b_0 = -\frac{1}{z} \ln T$ następuje ciągłe przejście między reżimem kwantowym rządzonym przez gaussowski punkt stały dla $T = 0$, a reżimem klasycznym w którym to punkt Wilsona-Fishera jest decydujący w opisie przemiany fazowej dla $T > 0$ [147].

Część II

Wyniki badań

Rozdział 4

Struktura efektywnego działania

Dotychczasowe rozważania miały charakter wprowadzenia do głównego tematu tej pracy jakim są kwantowe przemiany fazowe w układach spolaryzowanych fermionów o nierównych masach. Opis tego problemu zostanie sformułowany przy wykorzystaniu formalizmu całek funkcjonalnych [2, 154] za pomocą których można zapisać sumę statystyczną w wielkim zespole kanonicznym dla układu wielu fermionów

$$Z = \int \mathcal{D}[\bar{\psi}, \psi] e^{-S[\bar{\psi}, \psi]}, \quad (4.1)$$

gdzie działanie $S[\bar{\psi}, \psi]$ jest związane z modelowym hamiltonianem zadany równaniem (2.35) w następujący sposób

$$\begin{aligned} S[\bar{\psi}, \psi] = & \int_x \sum_{\sigma \in \{+, -\}} \bar{\psi}^\sigma(x) \left[\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\nabla_x^2}{2m_\sigma} - \mu_\sigma \right] \psi^\sigma(x) + \\ & + \int_x \int_y \bar{\psi}^+(x) \bar{\psi}^-(y) V(x-y) \psi^-(y) \psi^+(x). \end{aligned} \quad (4.2)$$

W powyższym równaniu zastosowano skrócony zapis w którym $x = (\mathbf{r}, \tau)$, a $\int_x(\cdot) = \int_0^\beta d\tau \int_V d^d \mathbf{r}(\cdot)$. Przyjmujemy, że fermiony oddziałują ze sobą przyciągającym potencjałem kontaktowym $V(x-y) = g\delta(x-y)$, gdzie $g < 0$. Pola fermionowe $\{\bar{\psi}^\sigma, \psi^\sigma\}$ są antyprzemiennymi zmiennymi grassmannowskimi, które spełniają antyperiodyczne warunki brzegowe w domenie czasów urojonych, tj. $\psi^\sigma(\mathbf{r}, 0) = -\psi^\sigma(\mathbf{r}, \beta)$.

Struktura tego rozdziału jest następująca:

Podrozdział 4.1. Zaczniemy od wyprowadzenia efektywnego działania poprzez zastosowanie transformacji Hubbarda-Stratonovicha za pomocą której wprowadzimy bozonowe pole porządku. Następnie odcałkujemy pola fermionowe otrzymując tym samym bozonowy opis układu.

Podrozdział 4.2. Przyjrzymy się wkładowi do efektywnego działania związanemu z jednorodną konfiguracją pola porządku, który nosi nazwę efektywnego potencjału.

Podrozdział 4.3. Na koniec włączymy do opisu fluktuacje pola porządku wokół jego wartości jednorodnej i tym samym uwzględnimy dynamiczne własności bozonowych stopni swobody. Przedyskutujemy także związek uzyskanych wyrażeń z metodą funkcji Greena.

4.1 Efektywne działanie

Działanie przedstawione w równaniu (4.2) posiada człon oddziaływania co sprawia, że nie jest ono formą kwadratową pól fermionowych. W celu wykonania całki funkcjonalnej po zmiennych Grassmanna w równaniu (4.1) należy ten człon rozprząc wykorzystując ściśłą transformację Hubbarda-Stratonovicha [2, 154]. Przyjmujemy, że wiodąca niestabilność w rozważanym układzie jest związana z parowaniem Coopera i wykorzystujemy relację

$$\exp \left(g \int_x \bar{\psi}_x^+ \bar{\psi}_x^- \psi_x^- \psi_x^+ \right) = \int \mathcal{D}[\eta] \exp \left(\int_x \left[-\frac{|\eta_x|^2}{g} + \bar{\psi}_x^+ \bar{\psi}_x^- \eta_x + \psi_x^- \psi_x^+ \eta_x^* \right] \right), \quad (4.3)$$

gdzie $\psi_x^\sigma \equiv \psi^\sigma(x)$ oraz $\eta_x \equiv \eta(x)$. Transformacja ta sprowadza wyjściowe działanie do postaci w której jest ono formą kwadratową pól $\{\bar{\psi}^\sigma, \psi^\sigma\}$, ale poniesionym kosztem jest wprowadzenie dodatkowej całki funkcjonalnej po bozonowym polu pomocniczym η przyjmującym wartości zespolone. Wstawiając wyrażenie (4.3) do równania (4.2) otrzymujemy

$$S_{HS}[\bar{\psi}, \psi, \eta] = \int_x \left[\sum_\sigma \bar{\psi}_x^\sigma \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\nabla_x^2}{2m_\sigma} - \mu_\sigma \right) \psi_x^\sigma - \frac{|\eta_x|^2}{g} + \bar{\psi}_x^+ \bar{\psi}_x^- \eta_x + \psi_x^- \psi_x^+ \eta_x^* \right]. \quad (4.4)$$

Pole parowania η_x jest sprzężone do formy dwuliniowej $g \bar{\psi}_x^- \psi_x^+$, a tym samym będzie ono pełnić rolę pola porządku opisującego powstawanie par Coopera w układzie.

Działanie $S_{HS}[\bar{\psi}, \psi, \phi]$ możemy przedstawić w reprezentacji pędowej wykorzystując transformację Fouiera dla pól fermionowych i bozonowych daną za pomocą

$$\begin{aligned} \psi_x^\sigma &= \frac{1}{\sqrt{\beta V}} \sum_k e^{ikx} \psi_k^\sigma, \\ \bar{\psi}_x^\sigma &= \frac{1}{\sqrt{\beta V}} \sum_k e^{-ikx} \bar{\psi}_k^\sigma, \\ \eta_x &= \frac{1}{\sqrt{\beta V}} \sum_q e^{iqx} \eta_q, \end{aligned} \quad (4.5)$$

gdzie $k = (\mathbf{k}, k_n)$ oraz $q = (\mathbf{q}, q_m)$, gdzie $k_n = \frac{2\pi}{\beta}(n + \frac{1}{2})$ [$n \in \mathbb{Z}$] to fermionowa częstość Matsubary, a $q_m = \frac{2\pi}{\beta}m$ [$m \in \mathbb{Z}$] to jej bozonowy odpowiednik. Ponadto powyżej skorzystano ze skróconych oznaczeń $kx = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - k_n \tau$ oraz $\sum_k(\cdot) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{k_n}(\cdot)$. Po przejściu do przestrzeni odwrotnej działanie ma postać

$$S_{HS}[\bar{\psi}, \psi, \eta] = -\frac{1}{g} \sum_q |\eta_q|^2 + \sum_{k,q} \bar{\Psi}_{k+q} \left[-\mathbb{G}_{k+q,k}^{-1} \right] \Psi_k, \quad (4.6)$$

przy czym wykorzystano notację Nambu $\Psi_k = [\psi_k^+, \bar{\psi}_{-k}^-]^T$ oraz $\bar{\Psi}_k = [\bar{\psi}_k^+, \psi_{-k}^-]$. Macierz $\mathbb{G}^{-1} = \mathbb{G}_0^{-1} - \Sigma$ jest odwrotnością macierzy funkcji Greena dla tego problemu, przy czym możemy ją podzielić na część swobodną $\mathbb{G}_0^{-1}$ oraz selfenergię Σ związaną z parowaniem. Elementy macierzowe $\mathbb{G}_0^{-1}$ i Σ mają postać

$$\left[\mathbb{G}_0^{-1} \right]_{k+q,k} = \delta(q) \begin{bmatrix} G_{0,+}^{-1}(k) & 0 \\ 0 & -G_{0,-}^{-1}(-k) \end{bmatrix} \text{ oraz } \Sigma_{k+q,k} = \frac{1}{\sqrt{\beta V}} \begin{bmatrix} 0 & \eta_q \\ \eta_{-q}^* & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

gdzie $G_{0,\sigma}(k) = (ik_n - \xi_k^\sigma)^{-1}$ jest swobodną funkcją Greena fermionu o pseudospinie σ , a $\xi_k^\sigma = k^2/2m_\sigma - \mu_\sigma$ jest jego relacją dyspersji.

Opisana powyżej procedura sprawia, że działanie S_{HS} zapisane zostaje jako forma kwadratowa pól fermionowych i tym samym możliwe jest analityczne wykonania całkowania funkcjonalnego ze względu na fermionowe stopnie swobody. Wykorzystanie spinorów Nambu w działaniu z równania (4.6) skutkuje zamianą kolejności pól fermionowych w mierze całki funkcjonalnej

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}[\bar{\psi}, \psi](\cdot) &= \int \prod_{x,\sigma} d\bar{\psi}_x^\sigma d\psi_x^\sigma(\cdot) = \int \prod_x (-1) d\bar{\psi}_x^+ d\psi_x^+ d\bar{\psi}_x^- d\psi_x^- (\cdot) = \\ &= \int \prod_{x,i} \bar{\Psi}_x^i \Psi_x^i = \rho \int \mathcal{D}[\bar{\Psi}, \Psi](\cdot), \end{aligned} \quad (4.8)$$

gdzie i to indeks numerujący składową odpowiedniego spinora Nambu. Pociąga to za sobą pojawienie się dodatkowego czynnika $\rho = \prod_{k,q} (-1)$ w reprezentacji pędowej wynikającego z antyprzemienności pól grassmanowskich, którego moduł jest równy 1 i tym samym w granicy termodynamicznej jest on nieistotny [223]. W związku z tym wykonując całki gaussowskie otrzymujemy

$$\rho \int \mathcal{D}[\bar{\Psi}, \Psi] \exp \left(- \sum_{k,q} \bar{\Psi}_{k+q} \left[-\mathbb{G}_{k+q,k}^{-1} \right] \Psi_k \right) = \exp \left(\sum_{k,q} \ln \left(-\det_\sigma \left[-\mathbb{G}_{k+q,k}^{-1} \right] \right) \right). \quad (4.9)$$

W dalszej części rozdziału będziemy posługiwać się skróconym zapisem w którym $\text{Tr} \left[\ln(-\mathbb{G}^{-1}) \right] = \sum_{k,q} \ln \left(\det_\sigma \left[-\mathbb{G}_{k+q,k}^{-1} \right] \right)$. Postępowanie to prowadzi do w pełni bozonowego efektywnego działania, za pomocą którego wyrażona jest suma statystyczna $Z = \rho \int \mathcal{D}[\eta] e^{-S_{ef}[\eta]}$. Efektywne działanie jest dane równaniem

$$S_{ef}[\eta] = -\frac{1}{g} \sum_q |\eta_q|^2 - \text{Tr} \left\{ \ln \left(-\mathbb{G}^{-1}[\eta] \right) \right\}. \quad (4.10)$$

W celu znalezienia Z nadal musimy obliczyć całkę funkcjonalną po polach bozonowych η , przy czym niemożliwe jest jej analityczne wykonanie. Jednakże uzyskana postać sumy statystycznej jest doskonałym punktem wyjścia do dalszych przybliżeń, które będą omówione w dalszej części tego rozdziału.

4.2 Efektywny potencjał

Naszym celem jest zbadanie w rozważanym układzie przemiany fazowej między fazą nadciekłą, a normalną. Zachodzi ona na skutek kondensacji par Coopera, które w fazie nadciekłej tworzą makroskopowy stan koherentny. Przyjmujemy, że wkład do efektywnego działania odpowiadający $\mathbf{q} = 0$ jest dominujący. Zaczniemy od ewaluacji $S_{ef}[\eta]$ dla jednorodnej konfiguracji pola porządku, tj. $\eta_x = \Delta = \text{const}$. Wkład ten będzie odpowiadał efektywnemu potencjałowi $U(\Delta)$, który jest związany z efektywnym działaniem relacją $\int_x U(\Delta) = S_{ef}[\eta] \Big|_{\eta_x = \Delta = \text{const}}$.

Warto podkreślić, że możliwe jest także rozważenie bardziej ogólnej sytuacji w której parowanie następuje przy niezerowej wartości $\mathbf{Q}$ wektora falowego środka masy pary Coopera. W rezultacie otrzymuje się stan FFLO w którym pole porządku ulega periodycznej modulacji w przestrzeni $\Delta(\mathbf{x}) =$

$\Delta_0 \cos(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x})$ [99,101,179,189,234]. Dotychczasowe badania sugerują jednak, że faza ta jest niestabilna dla $T > 0$ i może reprezentować jedynie stan podstawowy układu [105, 178, 235]. Z tego powodu zaniebujemy możliwość realizacji fazy FFLO w rozważanym układzie. Do tego problemu wrócimy pod koniec kolejnego rozdziału, gdzie przedyskutujemy możliwość otrzymania kwantowego punktu Lifszycy w którym współistnieje jednorodna nadciecz, niejednorodny stan FFLO oraz faza normalna.

W przestrzeni odwrotnej jednorodna konfiguracja pola porządku odpowiada

$$\eta_q = \sqrt{\beta V} \Delta \delta(q). \quad (4.11)$$

Wstawienie η_q do efektywnego działania $S_{ef}[\eta]$ sprawia, że całka funkcjonalna zawiera tylko pojedynczy wkład odpowiadający $\mathbf{q} = \mathbf{q}_m = 0$, czyli

$$Z_0 = \exp \left[-\beta V \left(-\frac{|\Delta|^2}{g} - \frac{1}{\beta V} \text{Tr} \left\{ \ln \left(-\mathbb{G}_\Delta^{-1} \right) \right\} \right) \right], \quad (4.12)$$

przy czym wyrażenie w okrągłych nawiasach odpowiada efektywnemu potencjałowi. Funkcja Greena G_Δ ma postać analogiczną jak w teorii BCS nadprzewodnictwa [1,69,139] i jest dana wyrażeniem

$$[\mathbb{G}_\Delta]_{k+q,k} = \frac{\delta(q)}{\det_\sigma [\mathbb{G}_\Delta^{-1}]} \begin{bmatrix} -G_{0,-}^{-1}(-k) & -\Delta \\ -\Delta^* & G_{0,+}^{-1}(k) \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

gdzie $\det_\sigma [\mathbb{G}_\Delta^{-1}] = \prod_\sigma (ik_n - E_k^\sigma)$. Energie dwóch gałęzi wzbudzeń fermionowych w układzie są dane równaniem

$$E_k^\sigma = \bar{\xi}_k + \sigma E_k = \zeta \xi_k - (h - \zeta \mu) + \sigma E_k, \quad (4.14)$$

przy czym $\bar{\xi}_k = (\xi_k^+ - \xi_k^-)/2$, $\xi_k = (\xi_k^+ + \xi_k^-)/2$ oraz $E_k = \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta|^2}$. Ponadto w powyższym równaniu wprowadzono trzy ważne parametry kontrolne, które będą często pojawiały się w dalszej części tekstu. Pierwszym z nich jest średni potencjał chemiczny

$$\mu = \frac{\mu_+ + \mu_-}{2}. \quad (4.15)$$

Drugim parametrem jest pole Zeemana dane wyrażeniem

$$h = \frac{\mu_+ - \mu_-}{2}, \quad (4.16)$$

a ostatnim jest wielkość mierząca nierównowagę mas składników mieszaniny dana równaniem

$$\zeta = \frac{r - 1}{r + 1}, \quad (4.17)$$

gdzie $r = m_-/m_+$ jest stosunkiem mas składników. Widzimy na podstawie powyższych równań, że widmo wzbudzeń fermionowych posiada przerwę energetyczną związaną z wartością Δ , tj. $\Delta E(k) = E_k^+ - E_k^- = 2E_k$ i jest ona równa 2Δ dla $\xi_k = k^2/2m - \mu = 0$, który odpowiada "średniemu" pędowi Fermiego k_F , gdzie $m = 2m_+m_-/(m_+ + m_-)$ jest podwojoną masą zredukowaną.

Korzystając z tego, że $\text{Tr} [\ln(-\mathbb{G}_\Delta^{-1})] = \sum_k \ln \left(\det_\sigma [-\mathbb{G}_\Delta^{-1}]_{k,k} \right)$ możemy otrzymać postać efektywnego potencjału, która wynosi

$$U(\Delta) = -\frac{|\Delta|^2}{g} - \int_k \sum_\sigma \ln (ik_n - E_k^\sigma), \quad (4.18)$$

gdzie w powyższym wyrażeniu wykonano już przejście do granicy termodynamicznej $\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}}(\cdot) \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{k}}(\cdot) \equiv (2\pi)^{-d} \int d^d \mathbf{k}(\cdot)$ i wprowadzono oznaczenie $\int_{\mathbf{k}}(\cdot) \equiv \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\beta} \sum_n(\cdot)$. W powyższym wyrażeniu możemy wykonać sumy Matsubary o postaci $\frac{1}{\beta} \sum_n g(ik_n)$ poprzez zastąpienie sumy całką konturową

$$I = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} g(z) f(z), \quad (4.19)$$

przy czym $g(\cdot)$ jest pewną funkcją, a $f(\cdot)$ jest rozkładem Fermiego-Diraca. Wybór konturu całkowania C zależy od własności analitycznych funkcji $g(z)$. Szczegółowe obliczenia zostały przedstawione w dodatku A.1. Po ich wykonaniu otrzymujemy

$$U(\Delta) = -\frac{|\Delta|^2}{g} - \frac{1}{\beta} \int_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma} \ln(1 + e^{-\beta E_k^{\sigma}}). \quad (4.20)$$

Efektywny potencjał jest związany z wielkim potencjałem termodynamicznym $\Omega_0 = -T \ln Z_0$ za pomocą relacji $\Omega_0 = V \min_{\Delta} U(\Delta)$. Wartość $\Delta = \Delta_0$ minimalizująca $U(\Delta)$ odpowiada fizycznej wartości parametru porządku i pozwala na wyznaczenie diagramu fazowego w przybliżeniu pola średniego, przy czym pomijamy możliwość występowania stanu FFLO.

4.3 Fluktuacje parowania

Kolejnym krokiem jest uwzględnienie fluktuacji parowania wokół jednorodnej konfiguracji pola porządku. Fluktuacje sprawiają, że należy uwzględnić także przyczynki pochodzące od $\mathbf{q} \neq 0$. Przyjmujemy, że jedynie człony o odpowiednio małych pędach $\mathbf{q}$ będą dawały istotny wkład do całki funkcjonalnej, co pozwala na wykorzystanie rozwinięcia w gradientach pola η_x . W związku z tym przyjmujemy następującą postać

$$\eta_q = \sqrt{\beta V} \Delta \delta(q) + \phi_q, \quad (4.21)$$

przy czym ϕ_q jest polem niewielkich fluktuacji parowania dla których zachodzi $\phi_{q=0} = 0$.

Wykorzystując równanie (4.21) i wstawiając je do wyrażenia na sumę statystyczną otrzymujemy, że

$$Z = \rho Z_0 \int \mathcal{D}[\phi] \exp \left[\sum_q \frac{|\phi_q|^2}{g} + \frac{\sqrt{\beta V}}{g} (\Delta^* \phi_0 + \phi_0^* \Delta) + \text{Tr} \left\{ \ln(1 - \mathbb{G}_{\Delta} \Sigma_{\phi}) \right\} \right], \quad (4.22)$$

gdzie człony w których występuje $\phi_{q=0} \equiv \phi_0 = 0$ znikają, a macierz selfenergii Σ_{ϕ} ma tę samą postać jak Σ w równaniu (4.7), przy czym zastąpiono w nim η_q przez pole ϕ_q . Funkcję Greena $\mathbb{G}_{\Delta}$ daną równaniem (4.13) można zapisać w wygodniejszej formie poprzez sprowadzenie propagatorów do odpowiednich ułamków prostych, co prowadzi do równania

$$[\mathbb{G}_{\Delta}]_{k+q,k} = \delta(q) \begin{bmatrix} \mathcal{G}_k^+ & \mathcal{F}_k \\ \mathcal{F}_k^* & -\mathcal{G}_{-k}^- \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

gdzie diagonalna część funkcji Greena jest związana z normalnymi funkcjami Greena typu BCS o postaci

$$\mathcal{G}_k^+ = \frac{|u_k|^2}{ik_n - E_k^+} + \frac{|v_k|^2}{ik_n - E_k^-} \quad (4.24)$$

oraz

$$-\mathcal{G}_{-k}^{-} = \frac{|v_k|^2}{ik_n - E_k^+} + \frac{|u_k|^2}{ik_n - E_k^-}, \quad (4.25)$$

gdzie $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$ oraz $|u_k|^2 = \frac{1}{2}(1 + \xi_k/E_k)$. Czynniki u_k i v_k są czynnikami koherencji, które występują w transformacji Bogoliubowa-Valatina pól fermionowych pozwalającej na diagonalizację macierzy $\mathbb{G}^{-1}$ w równaniu (4.6), przy założeniu, że uwzględnia się tylko wkład jednorodny, tj. $q = 0$. Część pozadiagonalna jest związana z anomalną funkcją Greena o postaci

$$\mathcal{F}_k = u_k v_k^* \left(\frac{1}{ik_n - E_k^-} - \frac{1}{ik_n - E_k^+} \right), \quad (4.26)$$

gdzie $u_k v_k^* = \Delta/2E_k$ [1, 69, 139]. W dalszej części dysertacji będziemy przyjmować, że $\Delta \in \mathbb{R}$, a co za tym idzie $|u_k|^2 = u_k^2$, $|v_k|^2 = v_k^2$ oraz $u_k v_k^* = u_k^* v_k = u_k v_k$.

Możemy przybliżyć równanie (4.22) biorąc pod uwagę tylko fluktuacje gaussowskie pola parowania ϕ_q . Zrobimy to rozwijając logarytm i pozostawiając tylko wyrazy rzędu Σ_ϕ^2 , tj. $\ln(1 - \mathbb{G}_\Delta \Sigma_\phi) = -\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} [\mathbb{G}_\Delta \Sigma_\phi]^n \approx -\mathbb{G}_\Delta \Sigma_\phi - \frac{1}{2} [\mathbb{G}_\Delta \Sigma_\phi]^2$. Ponadto korzystając z tego, że $\text{Tr}(\cdot) = \sum_{k,q} \text{tr}_\sigma(\cdot)$ pozwala to na otrzymanie sumy statystycznej uwzględniającej gaussowskie fluktuacje parowania wynoszącej

$$Z \approx \rho Z_0 Z_G = \rho Z_0 \int \mathcal{D}[\phi] \exp \left[-\frac{\beta V}{2} \int_q \Phi_q^* \mathbb{F}_q^{-1} \Phi_q \right], \quad (4.27)$$

gdzie $\Phi_q^* = [\phi_q^*, \phi_{-q}]$ i $\Phi_q = [\phi_q, \phi_{-q}^*]^T$ są odpowiednimi spinorami Nambu dla pól ϕ_q . W powyższym równaniu dokonano przejścia do granicy termodynamicznej i skorzystano z tego, że $\text{Tr}(\mathbb{G}_\Delta \Sigma_\phi) = 0$, bo $\phi_0 = 0$. Macierz $\mathbb{F}_q$ jest propagatorem fluktuacji parowania i odpowiada macierzy funkcji Greena dla bozonowych stopni swobody w układzie. Elementy macierzowe odwrotnego propagatora fluktuacji parowania $\mathbb{F}_q^{-1}$ są dane równaniem

$$\begin{aligned} [\mathbb{F}_q^{-1}]_{11} &= [\mathbb{F}_{-q}^{-1}]_{22} = -\frac{1}{g} - \int_k \mathcal{G}_{k+q}^+ \mathcal{G}_{-k}^-, \\ [\mathbb{F}_q^{-1}]_{12} &= [\mathbb{F}_q^{-1}]_{21}^* = \int_k \mathcal{F}_{k+q} \mathcal{F}_{-k}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Warto podkreślić, że ograniczając się tylko do wkładów kwadratowych w polach ϕ możemy wykonać analitycznie całkę funkcjonalną po konfiguracjach pola ϕ , co prowadzi do gaussowskiej poprawki do wielkiego potencjału termodynamicznego wynoszącej $\Omega_G = \frac{V}{2} \int_q \ln [\det_\sigma \{\mathbb{F}_q^{-1}(\Delta_0)\} / \pi^4]$.

Otrzymane w tym przypadku równania są równoważne przybliżeniu fazy losowej (RPA) w którym wysumowuje się nieskończoną podklasę diagramów drabinkowych podobnie jak dla teorii NSR (patrz równanie (2.31) i rys. 2.5(c)). Jednak w tym przypadku uzyskane wyrażenia są poprawne również w fazie uporządkowanej, a także są uogólnione na przypadek nierównych mas i populacji atomów tworzących mieszaninę. Widzimy, że macierz $\mathbb{F}_q^{-1}$ możemy podzielić na dwa wkłady. Pierwszy związany z odwrotnością stałej oddziaływania kontaktowego $-g^{-1}\mathbb{1}$, a drugi związany z macierzą funkcji korelacji par $-\mathbb{I}_q$, tj. $\mathbb{F}_q^{-1} = -g^{-1} - \mathbb{I}_q \Rightarrow \mathbb{F}_q = -g(\mathbb{1} + g\mathbb{I}_q)^{-1}$ (porównaj z równaniem (2.31)).

W funkcji korelacji par $\mathbb{F}_q$ występują fermionowe sumy Matsubary, które mają postać

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta} \sum_n \frac{1}{ik_n + iq_m - E_{k+q}^\sigma} \cdot \frac{1}{ik_n - E_k^{\sigma'}} = \\ & = \frac{1}{iq_m + E_k^{\sigma'} - E_{k+q}^\sigma} \cdot \frac{1}{\beta} \sum_n \left[\frac{1}{ik_n - E_k^{\sigma'}} - \frac{1}{iq_m + ik_n - E_{k+q}^\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Można je wykonać zamieniając sumę na całkę podobnie jak to było pokazane w przypadku efektywnego potencjału, a następnie korzystając z twierdzenia o residuach można otrzymać wynik sumowania. Szczegółowe obliczenia znajdują się w dodatku A.2. Po ich wykonaniu otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} [\mathbb{F}_q^{-1}]_{11} &= -\frac{1}{g} + \int_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma, \sigma'} \mathcal{C}_{k,q}^{\sigma, \sigma'} \frac{f_{k,q}^{\sigma, \sigma'}}{iq_m - E_{k,q}^{\sigma, \sigma'}}, \\ [\mathbb{F}_q^{-1}]_{12} &= \int_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma, \sigma'} \mathcal{D}_{k,q}^{\sigma, \sigma'} \frac{f_{k,q}^{\sigma, \sigma'}}{iq_m - E_{k,q}^{\sigma, \sigma'}}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

gdzie zostały wprowadzone skrócone oznaczenia $f_{k,q}^{\sigma, \sigma'} = f(E_k^\sigma) - f(E_{k+q}^{\sigma'})$, $E_{k,q}^{\sigma, \sigma'} = -(E_k^\sigma - E_{k+q}^{\sigma'})$, $\mathcal{D}_{k,q}^{\sigma, \sigma'} = \sigma \sigma' u_k v_k u_{k+q} v_{k+q}$, a także

$$\mathcal{C}_{k,q}^{\sigma, \sigma'} = \begin{cases} u_{k+q}^2 v_k^2, & \text{gdy } \sigma = + \text{ oraz } \sigma' = +, \\ u_{k+q}^2 u_k^2, & \text{gdy } \sigma = - \text{ oraz } \sigma' = +, \\ v_{k+q}^2 v_k^2, & \text{gdy } \sigma = + \text{ oraz } \sigma' = -, \\ v_{k+q}^2 u_k^2, & \text{gdy } \sigma = - \text{ oraz } \sigma' = -. \end{cases} \quad (4.31)$$

Strukturę elementów macierzowych $\mathbb{F}_q^{-1}$ danych równaniem (4.30) można lepiej zrozumieć bliżej przyglądając się własnościom funkcji Greena $\mathcal{G}_k^\sigma$ oraz $\mathcal{F}_k$.

Zacniemy od znalezienia funkcji spektralnej odpowiadającej funkcji Greena $\mathcal{G}_k^+$, która jest zdefiniowana jako $A(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im } G_{ret}^+(\mathbf{k}, \omega) = u_k^2 \delta(\omega - E_k^+) + v_k^2 \delta(\omega - E_k^-)$, gdzie $G_{ret}^+(\mathbf{k}, \omega) \equiv \mathcal{G}^+(\mathbf{k}, ik_n \rightarrow \omega + i0^+)$ to retardowana funkcja Greena. Widzimy, że funkcja spektralna posiada dwa piki zlokalizowane dla energii wzbudzeń E_k^σ . Pierwszy pik odpowiada energii atomu o pseudospinie σ , którego wprowadza się do układu powyżej "średniej" powierzchni Fermiego k_F zdefiniowanej równaniem $\xi_{k_F} = 0$. Z kolei drugi pik odpowiada energii atomu o przeciwnym pseudospinie $\bar{\sigma} \equiv -\sigma$ usuwanego poniżej k_F . Oznacza to, że czynnik u_k^2 zawiera informację o amplitudzie prawdopodobieństwa wytworzenia wzbudzenia kwazicząstkowego, a czynnik v_k^2 o amplitudzie prawdopodobieństwa wytworzenia stanu kwazidziurowego. W przypadku funkcji Greena $\mathcal{G}_k^-$ atomy o spinie σ i $\bar{\sigma}$ zamieniają się rolami. Wzbudzenia fermionowe występujące w układzie są zatem dane przez superpozycję stanów kwazicząstkowych i kwazidziurowych tak jak ma to miejsce w typowych nadprzewodnikach. Warto zauważyć, że gdy $\Delta \rightarrow 0$, wtedy u_k^2 dąży do jedności, a v_k^2 dąży do zera. Oznacza to, że znikanie przerwy energetycznej w układzie na "średniej" powierzchni Fermiego k_F jest związane z tym, że wzbudzenia elementarne przestają być superpozycjami. Co więcej

przedstawiona wyżej funkcja spektralna $A(\mathbf{k}, \omega)$ spełnia regułę sum $\int d\omega A(\mathbf{k}, \omega) = 1$. W analogiczny sposób możemy znaleźć funkcję spektralną dla anomalnego komponentu $\mathcal{F}_k$, która wynosi $B(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} F_{ret}(\mathbf{k}, \omega) = u_k v_k [\delta(\omega - E_k^-) - \delta(\omega - E_k^+)]$. W tym przypadku spełnione są nieco inne reguły sum o postaci $\int d\omega B(\mathbf{k}, \omega) = 0$ oraz $\int d\omega \omega B(\mathbf{k}, \omega) = -\Delta$. Warto zauważyć, że część anomalna funkcji Greena $\mathbb{G}_\Delta$ jest obecna tylko w fazie złamanej, tj. gdy $\Delta \neq 0$.

Przedstawiona powyżej dyskusja pozwala na zinterpretowanie elementów macierzowych $\mathbb{F}_q^{-1}$ danych równaniem (4.30). Wkłady pochodzące od członów dla których $\sigma' \neq \sigma$ odpowiadają diagramom pęcherzykowym typu cząstka-cząstka. Z kolei wkłady dla których $\sigma' = \sigma$ pochodzą od diagramów typu cząstka-dziura. Przy przejściu do granicy $\Delta \rightarrow 0$ okazuje się, że mogą przetrwać tylko wkłady typu cząstka-cząstka, co będzie miało konsekwencje związane ze zmianą zachowania wzbudzeń kolektywnych przy przejściu między fazą normalną i nadciekłą. Uzyskane w tym rozdziale wyrażenia stanowią podstawę do dalszych rozważań.

Rozdział 5

Diagram fazowy i kwantowe przemiany fazowe

Interesującym zagadnieniem dotyczącym spolaryzowanych mieszanin atomów fermionowych o nierównych masach jest pytanie o charakter przemiany fazowej między fazą nadciekłą, a normalną w granicy $T \rightarrow 0$. Przemiana taka może być osiągana na przykład poprzez zmianę koncentracji różnych typów atomów występujących w mieszaninie. W przypadku mieszanin o dwóch różnych powierzchniach Fermiego badania wykorzystujące przybliżenie średniego pola [12, 34, 66, 84, 117, 123, 163, 189, 226] wskazują, że przemiana fazowa jest generycznie I rodzaju i staje się ciągła powyżej temperatury trójkrytycznej T_{tri} . Jednakże zgodnie z rezultatami otrzymanymi w pracy [164] dla mieszanin w których stosunek mas $r = m_-/m_+$ jest odpowiednio duży możliwe jest otrzymanie QCP, a także kwantowego punktu trójkrytycznego na poziomie MFT.

Problem dotyczący faktycznego rzędu kwantowej przemiany fazowej jest interesujący, gdyż występowanie QCP na diagramie fazowym jest związane ze wzmocnieniem fluktuacji parametru porządku, które sprzęgają się z fermionowymi stopniami swobody (patrz np. [20, 138]). W efekcie prowadzi to do modyfikacji selfenergii fermionowych, które doprowadzić może do załamania się teorii Landaua dla cieczy Fermiego, co objawia się brakiem występowania typowych kwazicząstek w układzie. Ponadto obserwowane jest pojawianie się anomalnych obszarów na diagramie fazowym zarówno w fazie normalnej jak i nadcieklej. Zagadnienie to nie zostało jeszcze w tym kontekście w pełni zbadane.

Sprawia to, że zrozumienie warunków dla których w rozważanym układzie można wygenerować QCP jest interesujące. Większość badań prowadzonych wcześniej nad tym tematem opierała się na numerycznej ekstrakcji średniopolowych profili energii swobodnej za pomocą, których można otrzymać diagramy fazowe. W tym rozdziale zostanie sformułowane analityczne podejście do tego problemu odwołujące się do rozwinięcia Landaua-Ginzburga dla efektywnego potencjału $U(\Delta)$. Wyniki omawiane w tym rozdziale stanowią oryginalny wkład autora dysertacji i zostały opublikowane w artykułach [248, 250].

Struktura tego rozdziału jest następująca:

Podrozdział 3.1. Zaczniemy od przedstawienia typowych średniopolowych diagramów fazowych

otrzymywanych dla mieszanin Fermiego. Przedyskutujemy także w jaki sposób wyglądają profile koncentracji atomów w mieszaninie w zależności od wartości pola Zeemana $h = (\mu_+ - \mu_-)/2$.

Podrozdział 3.2. Wychodząc z efektywnego potencjału $U(\Delta)$, otrzymanego w poprzednim rozdziale, wyprowadzimy współczynniki rozwinięcia Landaua dla potencjału termodynamicznego w zerowej temperaturze. Pokażemy, że rozwinięcie Landaua jest osobliwe, gdy powierzchnie Fermiego atomów tworzących mieszaninę pokrywają się.

Podrozdział 3.3. Rozwinięcie Landaua posłuży nam do zbadania możliwości wygenerowania QCP na poziomie MFT w dwóch i trzech wymiarach. Wykażemy przy tym, że dla $d = 2$ nie jest możliwe otrzymanie QCP, ale dla $d = 3$ w przypadku odpowiednio dużych stosunków mas r atomów tworzących mieszaninę można go zaobserwować na diagramie fazowym. Wykorzystując rozwinięcie Sommerfelda opiszemy asymptotyczny kształt linii krytycznej $T_c(h)$ w pobliżu QCP.

Podrozdział 3.4. Na koniec uwzględnimy fluktuacje gaussowskie parametru porządku przy podchodzeniu od strony fazy normalnej do przemiany fazowej. Przy ich pomocy wyprowadzimy współczynniki rozwinięcia gradientowego efektywnego działania w fazie normalnej dla $T = 0$. Badając znak współczynnika stojącego przy wyrazie $|\nabla\phi|^2$ wskażemy na możliwość otrzymania kwantowego punktu Lifszycy w tym przypadku.

5.1 Średniopolowy diagram fazowy

Termodynamiczne własności rozważanej mieszaniny są opisane przy pomocy gęstości wielkiego potencjału termodynamicznego $\tilde{\omega}(T, \mu, h, r) = \Omega(V, T, \mu, h, r)/V$, która jest dana równaniem

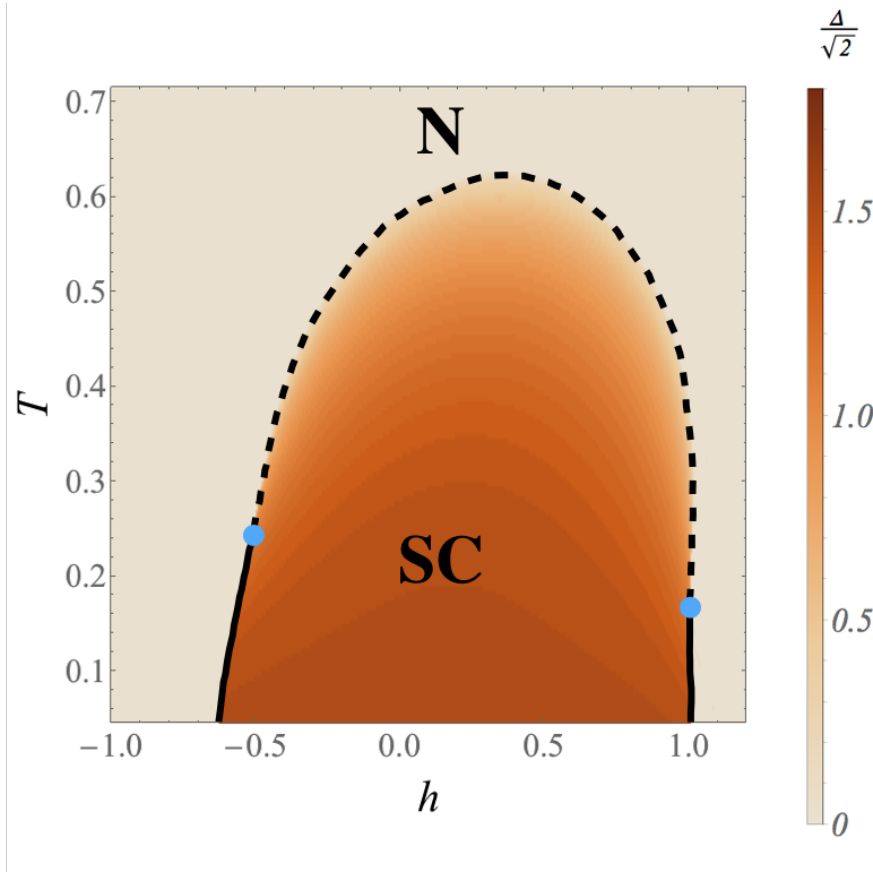
$$\tilde{\omega}(T, \mu, h, r) = \min_{\Delta} U(\Delta) = \min_{\Delta} \left[-\frac{\Delta^2}{g} - \frac{1}{\beta} \int_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma} \ln \left(1 + e^{-\beta E_k^{\sigma}} \right) \right]. \quad (5.1)$$

Warunek minimalizacji można przekształcić do postaci równania przerwy energetycznej poprzez obliczenie $\frac{\partial U(\Delta)}{\partial(\Delta^2)} \Big|_{\Delta=\Delta_0} = 0$, co prowadzi do

$$\frac{1}{g} = \int_{\mathbf{k}} \frac{f(E_k^+) - f(E_k^-)}{2E_k}. \quad (5.2)$$

Równanie to pozwala wyznaczyć wartość przerwy energetycznej Δ_0 w funkcji pozostałych parametrów układu. Gdy $\Delta_0 \neq 0$, wtedy na poziomie pola średniego otrzymujemy jednorodną fazę nadciekłą. W przeciwnym przypadku, tj. gdy $\Delta_0 = 0$, znajdujemy się w fazie normalnej.

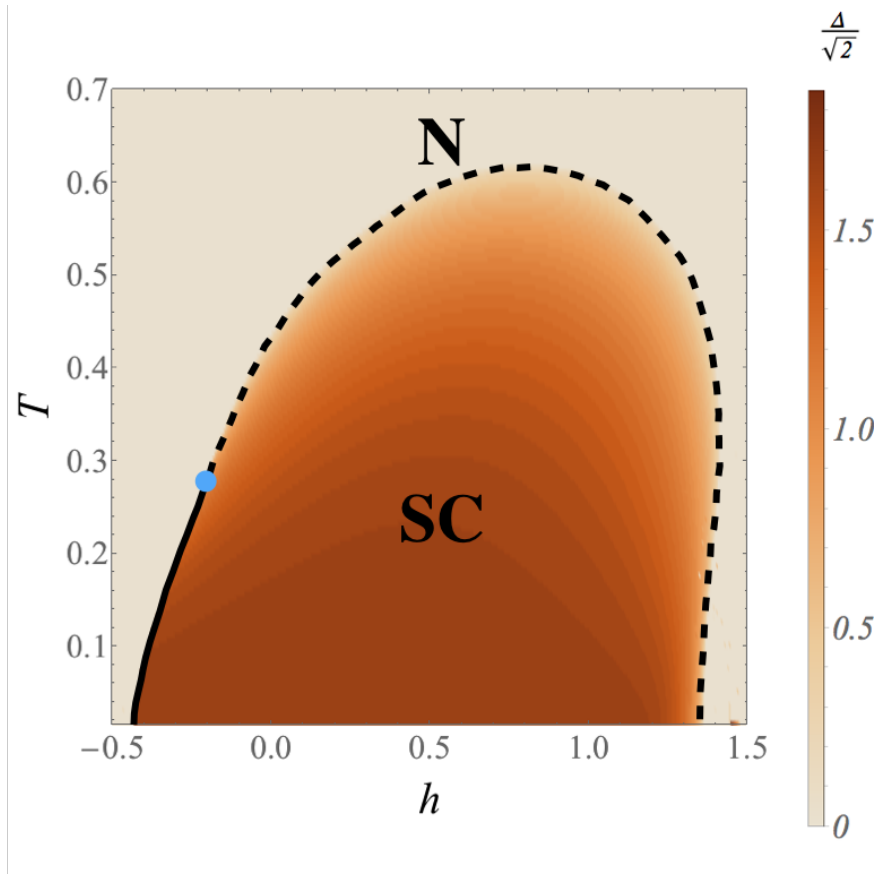
Zwiększanie wartości pola Zeemana h , które opisuje stopień spolaryzowania mieszaniny, powoduje wzrost niedopasowania powierzchni Fermiego dla poszczególnych gatunków atomów znajdujących się w mieszaninie. Towarzyszy temu zmniejszenie obszaru na diagramie fazowym w którym występuje faza nadciekła. Pole h jest zatem naturalnym nietermicznym parametrem kontroli pozwalającym na dostrojenie mieszaniny do kwantowej przemiany fazowej między stanem nadciekłym, a normalnym. Średniopolowy diagram fazowy tego układu był wielokrotnie badany w ciągu ostatnich kilku lat. Poza jednorodną fazą nadciekłą oraz fazą normalną możliwe jest występowanie



Rys. 5.1: Typowy średniopółowy diagram fazowy dla $d = 3$. Faza nadciężła w niskich temperaturach jest odseparowana od fazy normalnej przemianą fazową I rodzaju (ciągła linia). Dla $T > T_{tri}$ przemiana ta staje się ciągłą (przerywana linia). Niebieskie kropki na diagramie wskazują położenie punktów trójkrytycznych. Kolor tła na diagramie fazowym odpowiada wartości parametru porządku (Δ). Parametry diagramu są następujące $r = m_-/m_+ = 2$, $\mu = 0.1$, $g = -1.7$ oraz $\Lambda = 10$, przy czym Λ jest wartością obcięcia ultrafioletowego.

nadciężłości typu FFLO, która powinna być obecna w niewielkim obszarze pomiędzy nimi dla odpowiednio niskich temperatur. Faza ta jest niezwykle krucha ze względu na fluktuacje termiczne. Obecność modów Goldstone'a (w tym związanych z łamaniem symetrii translacyjnej) sprawia, że staje się niestabilna dla $T > 0$ i może występować jedynie jako faza uporządkowana algebraicznie (także w trzech wymiarach) [178, 180, 197, 206, 245]. Ponadto uwzględnienie fluktuacji parowania [235] i analiza wykorzystująca nieperturbacyjną grupę renormalizacji [105] także wskazuje na niestabilność fazy FFLO dla skończonych temperatur w dwóch i trzech wymiarach. Jedynie w stanie podstawowym układ może posiadać stabilną niejednorodną fazę typu FFLO. Z tego powodu w większości tej dysertacji będziemy pomijali możliwość występowania niejednorodnej nadcięży przyjmując, że parowanie zachodzi jedynie dla wektora falowego $\mathbf{q} = 0$. Powrócimy do tego zagadnienia w podrozdziale 5.4., gdzie uwzględniając fluktuacje gaussowskie zbadamy możliwość wygenerowania kwantowego punktu Lifszycza dla spolaryzowanych mieszanin Fermiego.

Typowy diagram fazowy w zmiennych (h, T) w sytuacji o równych masach jest symetryczny względem linii $h = 0$ i dla odpowiednio niskich temperatur (poniżej T_{tri}) obszar nadciężły jest ogra-



Rys. 5.2: Przykładowy średniopolowy diagram fazowy dla $d = 3$ na którym występuje QCP. Kolor tła diagramu odpowiada wartości parametru porządku (Δ). Ciągła linia oznacza przemianę fazową I rodzaju, a linia przerywana oznacza przemianę II rodzaju. Niebieska kropka wskazuje na położeniu punktu trójkrytycznego. Warto zauważyć, że faza uporządkowana rozciąga się ponad QCP. Parametry tego wykresu są następujące $r = m_-/m_+ = 5$, $\mu = 0.1$, $g = -1.4$ oraz $\Lambda = 10$.

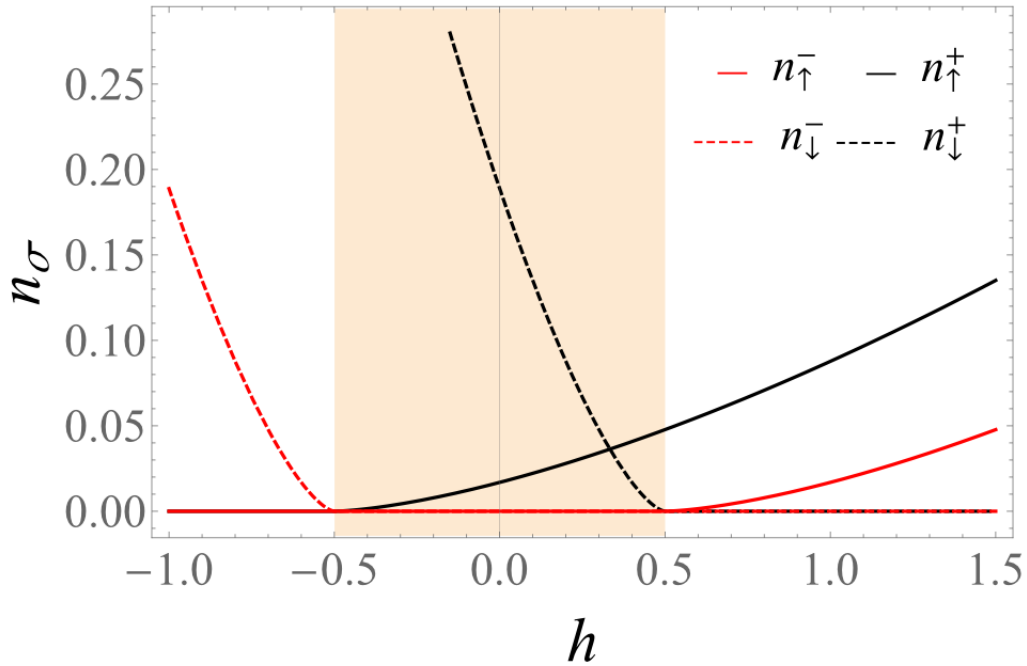
niczony linią nieciągłej przemiany fazowej. Powyżej punktu trójkrytycznego T_{tri} przemiana staje się ciągłą i obszar nadciekły zanika dla odpowiednio wysokich temperatur [163]. Szczegółowa analiza własności przejścia BEC-BCS dla mieszanin o równych masach, a także własności stanów rezonansowych w tym przypadku została zaprezentowana w pracy [87]. W przypadku niewielkiej różnicy mas atomów tworzących ultrazimną mieszaninę diagram fazowy posiada podobne charakterystyczne cechy jak dla przypadku o równych masach, tj. na "skrzydłach" obszaru nadciekłego występuje przemiana fazowa I rodzaju dla $T < T_{tri}$, a dla "kopuły" obszaru nadciekłego powyżej $T > T_{tri}$ zachodzi ciągła przemiana fazowa. W tym przypadku zostaje jednak zburzona symetria diagramu ze względu na linię $h = 0$. Gdy $r > 1$ punkt odpowiadający maksymalnej wartości temperatury krytycznej T_c^{max} przesuwa się w kierunku większych wartości h . Z kolei punkty trójkrytyczne są rozmieszczone niesymetrycznie dla lewej i prawej strony diagramu, przy czym punkt leżący dla $h > 0$ i $r > 1$ pojawia się w niższych temperaturach. Przykładowy diagram fazowy przedstawiający tę sytuację został przedstawiony na rys. 5.1.

Zwiększenie stosunku mas r składników mieszaniny może doprowadzić do zmiany charakterystyki diagramu fazowego [164]. W szczególności możliwe jest dla odpowiednio dużych wartości r

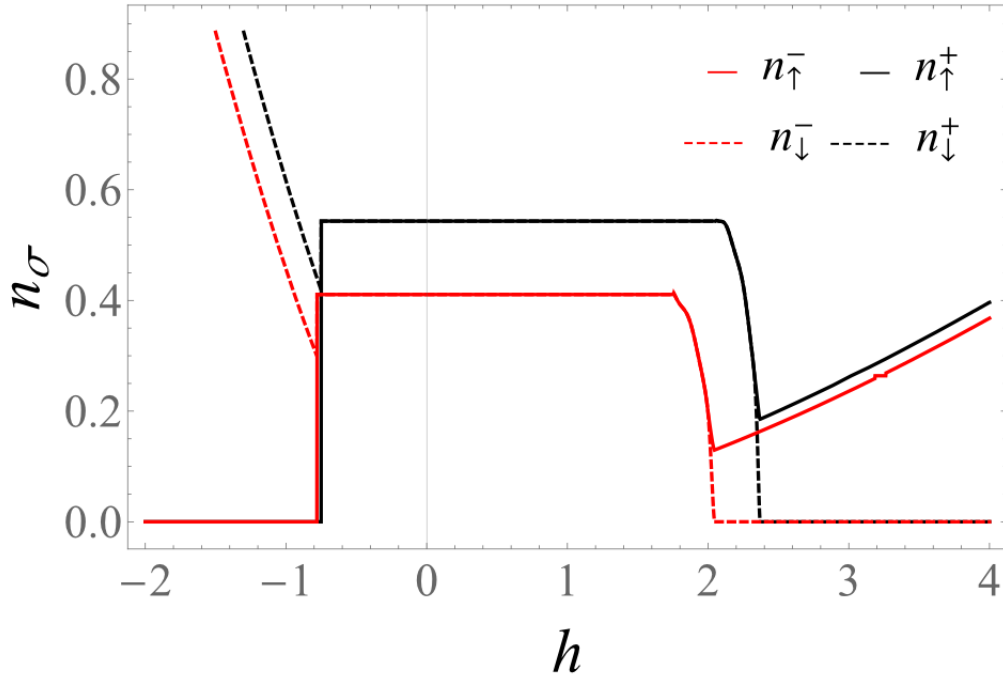
sprowadzenie punktu trójkrytycznego leżącego po prawej stronie obszaru nadciekłego do zerowej temperatury. Pozwala to na realizację kwantowego punktu trójkrytycznego oraz QCP dla mieszanin fermionowych o nierównych masach, a tym samym przemiana fazowa na jednym ze "skrzydeł" jest ciągła dla $T \rightarrow 0$. Przykładowy diagram fazowy ilustrujący tę sytuację został przedstawiony na rys. 5.2. Warto zwrócić uwagę, że obecność QCP na diagramie fazowym powoduje, że faza nadciekła staje się obszarem wklęsłym (ang. *reentrant phase behaviour*). Oznacza to, że faza nadciekła w temperaturach $T > 0$ rozciąga się ponad QCP.

5.1.1 Koncentracje atomów w mieszaninie

W celu głębszego zrozumienia charakteru kwantowej przemiany fazowej zachodzącej w rozważanym układzie zajmiemy się w tej części zbadaniem związku między koncentracjami atomów w mieszaninie n_σ , a wartościami ich potencjałów chemicznych μ_σ . Korzystamy przy tym z relacji $\mu_\sigma = \mu + \sigma h$. Koncentracje atomów można, wtedy otrzymać z gęstości wielkiego potencjału termodynamicznego $\tilde{\omega}(T, \mu, h, r)$ za pomocą relacji $n_\sigma = -\left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \mu_\sigma}\right)_{T, r, \mu_\sigma}$, przy czym wartość Δ w funkcji μ_σ wyznaczamy przy pomocy równania (5.2).



Rys. 5.3: Koncentracje atomów n_σ dla nieoddziałującej ($g = 0$) dwuskładnikowej mieszaniny Fermiego w funkcji h dla $d = 3$. W tym przypadku $T = 0$ oraz $r = 5$. Na wykresie czarne linie n_σ^+ odpowiadają wartości $\mu = 0.5$. Z kolei czerwone linie n_σ^- zostały sporządzone dla $\mu = -0.5$. W obszarze zacienionym oba gatunki atomów są obecne dla $\mu = 0.5$. Gdy $\mu = -0.5$, wtedy w obszarze zacienionym nieobecne są żadne cząstki.



Rys. 5.4: Koncentracje atomów n_σ wyznaczone w funkcji h dla $d = 3$, przy czym ustalono wartości $T = 0$, $r = 5$ oraz $g = -1.5$. Czarne linie n_σ^+ odpowiadają wartości $\mu = 0.1$, a czerwone linie n_σ^- wartości $\mu = -0.1$. Dla obu wartości μ obserwuje się przemianę fazową I rodzaju dla $h \approx -1$ oraz przemianę II rodzaju dla $h \approx 2$, przy czym n_- w ciągły sposób dąży w tym przypadku do zera. W fazie normalnej koncentracje n_σ są dane prawem potęgowym przedstawionym w równaniu (5.3).

Zacniemy od rozważenia sytuacji odniesienia dla której $\Delta = 0$ dla wszystkich możliwych wartości μ oraz h , co odpowiada nieoddziałującej dwuskładnikowej mieszaninie Fermiego ($g = 0$). Związek między n_σ oraz μ_σ jest w tym przypadku dla $T = 0$ dany równaniem

$$n_\sigma = \frac{(m_\sigma \mu_\sigma)^{d/2} \theta(\mu_\sigma)}{(2\pi)^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2} + 1)}, \quad (5.3)$$

gdzie $\theta(\cdot)$ to funkcja schodkowa Heaviside'a, a $\Gamma(\cdot)$ to funkcja Γ Eulera. Wykres przedstawiający tę zależność jest pokazany na rys. 5.3 dla $\mu > 0$ oraz $\mu < 0$. Oczywiście atomy o pseudospinie σ nie są obecne w układzie, gdy $\mu_\sigma < 0$.

W przypadku, gdy $g < 0$ możliwe jest parowanie się atomów o przeciwnych pseudospinach, co dla pewnego zakresu parametrów prowadzi do niezerowej wartości Δ i jest związane z występowaniem fazy nadciekłej na poziomie MFT. Koncentracja gatunku atomów o pseudospinie σ wynosi

$$n_\sigma = \int_{\mathbf{k}} \left[u_k^2 f(\sigma E_k^\sigma) + v_k^2 (1 - f(\bar{\sigma} E_k^{\bar{\sigma}})) \right], \quad (5.4)$$

gdzie u_k^2 oraz v_k^2 są czynnikami BCS wprowadzonymi w równaniu (4.23). Po pierwsze można zaobserwować, że dla $\Delta = 0$ oraz $T = 0$ równanie (5.4) redukuje się do wyniku otrzymanego w przypadku

nieoddziałującym (patrz równanie (5.3)). Implikuje to, że ewentualna kwantowa przemiana fazowa zachodząca dla $\mu_+ < 0$ lub $\mu_- < 0$ ma miejsce pomiędzy fazą nadciekłą, a całkowicie spolaryzowanym gazem. Generycznie występowanie $\Delta > 0$ oznacza występowanie obu składników mieszaniny w układzie jak zostało to zaprezentowane na rys. 5.4. W konsekwencji kwantowa przemiana fazowa dla $\mu_+ < 0$ (lub $\mu_- < 0$) wymaga, aby wartość koncentracji tego gatunku atomów zwiększyła się od zerowej do pewnej skończonej wartości. Zmiana wartości koncentracji może następować skokowo lub w sposób ciągły w zależności od tego jaki jest rodzaj zachodzącej przemiany fazowej. Parametry na rys. 5.4 zostały dobrane tak, aby dla $h < 0$ występowała przemiana fazowa I rodzaju, a dla $h > 0$ przemiana fazowa II rodzaju.

5.2 Rozwinięcie Landaua

Teoria przemian fazowych Landaua postuluje istnienie analitycznego rozwinięcia efektywnego potencjału $U(\Delta)$ w potęgach parametru porządku Δ danego równaniem

$$U(\Delta) = U_0 + a_2|\Delta|^2 + a_4|\Delta|^4 + a_6|\Delta|^6 + \dots, \quad (5.5)$$

przy czym uwzględniamy tylko parzyste potęgi parametru porządku ze względu na niezmienniczość efektywnego działania $U(\Delta)$ ze względu na symetrię $U(1)$. Współczynniki Landaua a_i są funkcjami parametrów termodynamicznych układu. W rozważanym przypadku możliwe jest wyprowadzenie ich postaci poprzez kolejne obliczenie pochodnych $U(\Delta)$ danego równaniem (4.20) względem Δ , a następnie położenie $\Delta = 0$. W rezultacie otrzymujemy, że współczynnik a_2 ma postać

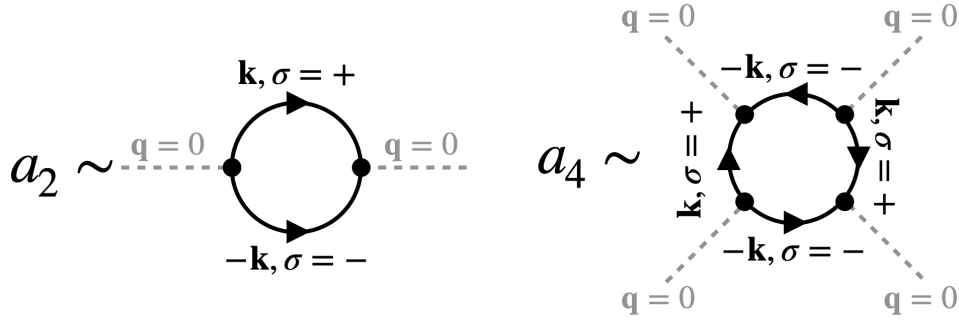
$$a_2 = \left(\frac{\partial U}{\partial |\Delta|^2} \right)_{|\Delta|^2=0} = -\frac{1}{g} - \frac{1}{4} \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\xi_{\mathbf{k}}} \sum_{\sigma} \operatorname{tgh} \left(\frac{\beta \xi_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{2} \right), \quad (5.6)$$

z kolei współczynnik a_4 jest dany równaniem

$$a_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial (|\Delta|^2)^2} \right)_{|\Delta|^2=0} = \frac{1}{16} \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\xi_{\mathbf{k}}^3} \sum_{\sigma} \left[\operatorname{tgh} \left(\frac{\beta \xi_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{2} \right) - \frac{\beta \xi_{\mathbf{k}}}{2} \cosh^{-2} \left(\frac{\beta \xi_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{2} \right) \right]. \quad (5.7)$$

Współczynniki wyższego rzędu można wyprowadzić w analogiczny sposób poprzez dalsze różniczkowanie równania (4.20).

Współczynnik Landaua a_{ℓ} może zostać zinterpretowany jako pętla fermionowa posiadająca ℓ zewnętrznych bozonowych linii, która została ewaluowana dla zewnętrznych pędów równych zero. Diagramy Feynmana odpowiadające współczynnikowi a_2 oraz a_4 zostały przedstawione na rys. 5.5. Propagatory fermionów $G_{0,\sigma}(k) = (ik_n - \xi_{\mathbf{k}}^{\sigma})^{-1}$ posiadają przerwę ze względu na wartości częstości Matsubary $k_n = \pi T(2n + 1)$ położone najbliżej zera, która znika w granicy $T \rightarrow 0$. Oznacza to, że nie jest klarowne pod jakimi warunkami diagramy pętlowe w rozważanym problemie są zbieżne w granicy $T \rightarrow 0$, tj. wyrażenia dane równaniami (5.6) oraz (5.7) pozostają skończone przy temperaturze dążącej do zera. Na przykład ograniczając się do przypadku zbilansowanego dla którego $\xi_{\mathbf{k}}^+ = \xi_{\mathbf{k}}^- = \xi_{\mathbf{k}}$ możemy zauważyć, że współczynnik a_2 (dany równaniem (5.6)) zawiera rozbieżny



Rys. 5.5: Diagramatyczna interpretacja dwóch pierwszych współczynników Landaua jako pętli fermionowych typu cząstka-cząstka. Linia ciągła odpowiada swobodnej funkcji Greena $G_{0,\sigma}(k) = (ik_n - \xi_k^\sigma)^{-1}$, a linia przerywana odpowiada "amputowanej" linii bozonowej wykonywanej dla pędu $q = 0$.

wkład, gdy $\beta \rightarrow \infty$. Wskazuje to na załamanie się rozwinięcia Landaua w przypadku zbilansowanym. Warto zauważyć, że w tym przypadku powierzchnie Fermiego składników mieszaniny pokrywają się. Okazuje się, że występowanie niepokrywających się powierzchni Fermiego różnych gatunków atomów w mieszaninie prowadzi do regularyzacji współczynnika a_2 , co pozwala na otrzymanie skończonego wyrażenia w sytuacji niezbilansowanej w zerowej temperaturze.

Analiza zbieżności współczynnika a_4 (patrz równanie (5.7)) jest nieco bardziej złożona. Osobliwa część tego wyrażenia jest związana z otoczeniem $\xi_k = 0$. Korzystając z tego, że $\xi_k^- = 2\xi_k - \xi_k^+$ i rozwijając wyrażenie podcałkowe w a_4 względem ξ_k otrzymujemy, że

$$a_4 \propto -\beta^3 \int_0^\Lambda dk k^{d-1} [\cosh(\beta \xi_k^+) - 2] \cosh^{-4} \left(\frac{\beta \xi_k^+}{2} \right) + \dots \quad (5.8)$$

Dokonując zamiany zmiennych tak, aby nową zmienną całkowania było $x = \xi_k$ i wyodrębniając część osobliwą a_4^{singul} wyrażenia (5.8) odpowiadającą przedziałowi całkowania $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, gdzie ε jest dodatnią i niewielką stałą, otrzymuje się

$$a_4^{singul} \propto -\beta^3 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx |2m(x + \mu)|^{\frac{d}{2}-1} [\cosh(\beta(mx - \eta)) - 2] \cosh^{-4} \left(\frac{\beta(mx - \eta)}{2} \right), \quad (5.9)$$

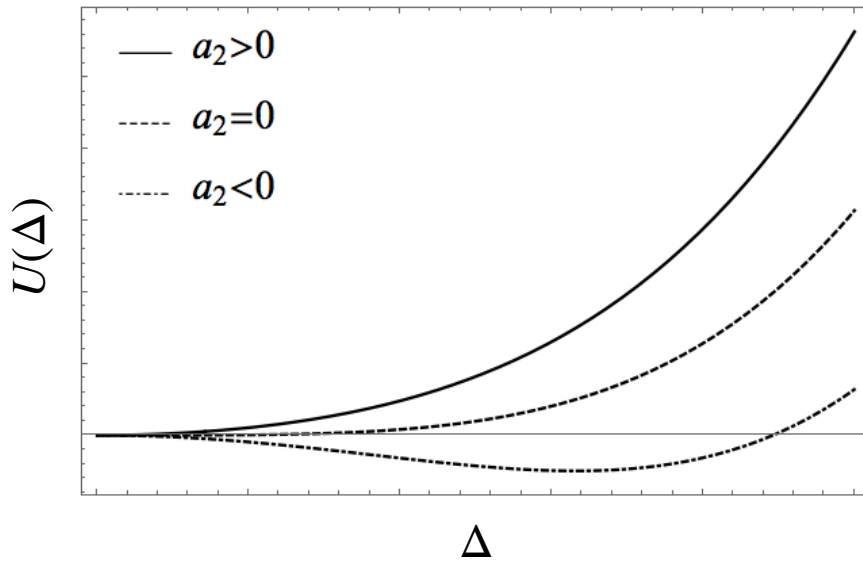
gdzie $\eta = (1 - m)\mu + h$. Następnie zamieniając zmienne tak, aby $y = \beta(mx - \eta)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_4^{singul} &\propto -\frac{\beta^{3-\frac{d}{2}}}{m} \int_{-m\beta\varepsilon-\beta\eta}^{m\beta\varepsilon-\beta\eta} dy |y + \beta\mu_+|^{\frac{d}{2}-1} [\cosh(y) - 2] \cosh^{-4} \left(\frac{y}{2} \right) \approx \\ &\approx -\frac{\beta^{3-\frac{d}{2}}}{m} \int_{-m\beta\varepsilon-\beta\eta}^{m\beta\varepsilon-\beta\eta} dy |y + \beta\mu_+|^{\frac{d}{2}-1} [\cosh(\beta\eta) - 2] \cosh^{-4} \left(\frac{\beta\eta}{2} \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Gdy $\eta \neq 0$ w granicy $\beta \rightarrow \infty$ osobliwa część a_4^{singul} dąży do zera dzięki temu, że $\cosh^{-4} \left(\frac{\beta\eta}{2} \right)$ dąży eksponencjalnie do 0 w tej granicy. Tym samym współczynnik a_4 jest zbieżny. Gdy jednak $\eta = 0$, wtedy część osobliwa nie jest regularyzowana i wyrażenie rozbiega. Warunek $\eta \neq 0$ można przedstawić w postaci

$$\mu \neq \frac{r+1}{r-1} h = \zeta^{-1} h. \quad (5.11)$$

Warunek regularności rozwinięcia Landaua dany równaniem (5.11) jest spełniony, gdy powierzchnie Fermiego składników mieszaniny nie pokrywają się, tj. $k_F^+ \neq k_F^-$. Równanie $h = \zeta\mu$ wyznacza jednowymiarowy podzbiór diagramu fazowego w zmiennych (μ, h) w zerowych temperaturach dla którego rozwinięcie Landaua nie jest dobrze zdefiniowane z powodu osobliwości związanych z nakładaniem się powierzchni Fermiego atomów. Gdy $r \rightarrow 1^+$ nachylenie linii $\mu = \zeta^{-1}h$ rozbiega, co odpowiada sytuacji mieszaniny o równych masach. Ponadto wzdłuż linii $h = 0$ i $r = 1$ dla $\mu > 0$ rozwinięcie Landaua nie istnieje i przypadek ten odpowiada sytuacji zbilansowanej dla której $\xi_k = \xi_k^+ = \xi_k^-$. Analogiczne rozumowanie dla współczynników wyższego rzędu prowadzi do tych samych wniosków. Uzyskany warunek jest spełniony zarówno w dwóch i trzech wymiarach.



Rys. 5.6: Schematyczna ilustracja efektywnego potencjału $U(\Delta)$ dla dodatnich wartości współczynnika a_4 . W tym przypadku $a_2 > 0$ odpowiada fazie normalnej, $a_2 < 0$ jest wewnątrz fazy nadkierłej, a $a_2 = 0$ dla przemiany fazowej II rodzaju.

Korzystając z współczynników Landaua możemy określić położenie oraz charakter przemiany fazowej na poziomie MFT. Pod warunkiem, że istnieje rozwinięcie efektywnego potencjału dane równaniem (5.5) warunek występowania przemiany fazowej II rodzaju jest dany

$$a_2 = 0, \quad a_4 > 0. \quad (5.12)$$

Z kolei punktu trójkrytyczny jest obecny na diagramie fazowym, gdy

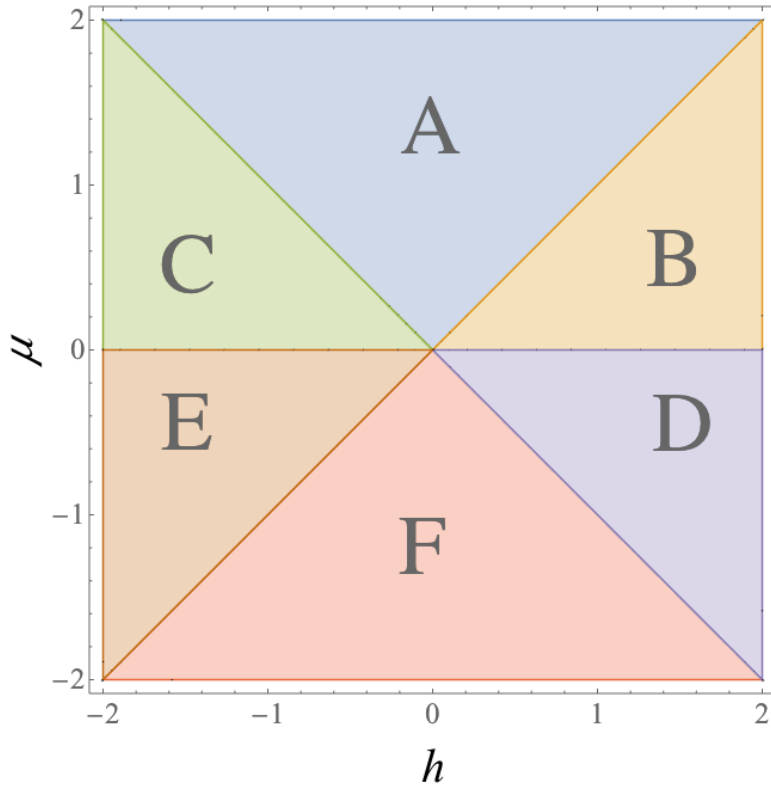
$$a_2 = 0, \quad a_4 = 0 \text{ oraz } a_6 > 0. \quad (5.13)$$

Warto zwrócić uwagę, że warunek $a_2 = 0$ jest równoważny równaniu (5.2) w którym kładzie się $\Delta = 0$ i tym samym może być on wykorzystany do otrzymania położenia przemiany fazowej na

poziomie pola średniego. Schematyczny wykres przedstawiający kształt efektywnego potencjału w zależności od znaku a_2 jest przedstawiony na rys. 5.6 przy założeniu, że $a_4 > 0$.

W dalszej części dysertacji będziemy zakładać, że $m_- > m_+$, czyli $r \geq 1$. Okazuje się, że sytuacja w której $0 \leq r \leq 1$ prowadzi do tych samych rezultatów, przy czym należy dokonać transformacji $h \leftrightarrow -h$.

5.2.1 Zerowa temperatura



Rys. 5.7: Wyróżnione obszary diagramu fazowego dla $T = 0$. Gdy średni potencjał chemiczny $\mu > 0$, wtedy płaszczyznę (h, μ) dzielimy na obszary: **(A)** $\mu_+ > 0, \mu_- > 0$; **(B)** $\mu_+ > 0, \mu_- < 0$; **(C)** $\mu_+ < 0, \mu_- > 0$. Gdy $\mu < 0$, wtedy diagram dzielimy także na trzy podzbiory: **(D)** $\mu_+ > 0, \mu_- < 0$; **(E)** $\mu_+ < 0, \mu_- > 0$; **(F)** $\mu_+ < 0, \mu_- < 0$.

Warunki przedstawione wyżej mówiące o charakterze przemiany fazowej można także zastosować w zerowej temperaturze. W celu ustalenia warunków występowania QCP na diagramie fazowym musimy przyjrzeć się jaką graniczną postać mają współczynniki Landaua (patrz równania (5.6) oraz (5.7)) dla $T \rightarrow 0$. Korzystając z tego, że $\tanh\left(\frac{\beta \xi_k^\sigma}{2}\right) = 1 - 2f(\xi_k^\sigma)$ otrzymujemy

$$a_2^{(0)} = \lim_{T \rightarrow 0} a_2 = -\frac{1}{g} - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\xi_k} \left[1 - \sum_{\sigma} \theta(-\xi_k^\sigma) \right]. \quad (5.14)$$

Podobnie możemy postąpić dla współczynnika a_4 wykorzystując relację $\frac{d}{d\xi_k^\sigma} \tanh\left(\frac{\beta \xi_k^\sigma}{2}\right) = \frac{\beta}{2} \cosh^{-2}\left(\frac{\beta \xi_k^\sigma}{2}\right)$.

W rezultacie otrzymujemy

$$a_4^{(0)} = \lim_{T \rightarrow 0} a_4 = \frac{1}{8} \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\xi_k^3} \left[1 - \sum_{\sigma} \left(\theta(-\xi_k^{\sigma}) + \xi_k \delta(\xi_k^{\sigma}) \right) \right], \quad (5.15)$$

przy czym $\delta(\cdot)$ jest deltą Diraca. Całkowanie przedstawione w powyższych wyrażeniach można wykonać analitycznie, ale ich końcowa postać będzie zależała od wymiarowości d układu. W dalszej części zostaną przedyskutowane dwa najbardziej fizycznie istotne przypadki, czyli $d = 2$ oraz $d = 3$.

Dalsza analiza równań (5.14) oraz (5.15) wymaga podziału płaszczyzny (h, μ) dla $T = 0$ na kilka podzbiorów, które zostały przedstawione na rys. 5.7. Komplikacja ta jest związana z umiejscowieniem zer funkcji schodkowej Heaviside'a oraz delty Diraca występujących w równaniach (5.14) i (5.15), które mogą leżeć wewnątrz przedziału całkowania po $|\mathbf{k}| \in [0, \Lambda]$ lub poza nim w zależności od znaku odpowiedniego potencjału chemicznego atomu o pseudospinie σ . W efekcie należy wyróżnić sześć różnych obszarów na diagramie fazowym w zmiennych (h, μ) .

5.3 Kwantowy punkt krytyczny

5.3.1 Przypadek $d = 2$

W dwóch wymiarach współczynnik $a_2^{(0)}$ w obszarach przedstawionych na rys. 5.7 będzie posiadał różną postać. Wykonując całkowanie w równaniu (5.14) w reżimie (A), otrzymujemy następujące wyrażenie

$$a_2^{(A)} = -\frac{1}{g} - \frac{m}{4\pi} \ln \left[\frac{|\Lambda^2 - 2m\mu| \cdot 2m\mu}{\prod_{\sigma} |k_{F,\sigma}^2 - 2m\mu|} \right], \quad (5.16)$$

gdzie $k_{F,\sigma} = k_F^{\sigma} = \sqrt{2m_{\sigma}\mu_{\sigma}}$ jest pędem Fermiego atomu o pseudospinie σ . Postępując podobnie dla obszarów (B)-(E) otrzymujemy

$$a_2^{(B-E)} = -\frac{1}{g} - \frac{m}{4\pi} \ln \left[\frac{|\Lambda^2 - 2m\mu|}{|k_{F,\sigma}^2 - 2m\mu|} \right], \quad (5.17)$$

gdzie $\sigma = +$ w obszarach (B) i (D), a $\sigma = -$ w reżimach (C) oraz (E). Natomiast w obszarze (F) dostajemy, że

$$a_2^{(F)} = -\frac{1}{g} - \frac{m}{4\pi} \ln \left[\frac{|\Lambda^2 - 2m\mu|}{|2m\mu|} \right]. \quad (5.18)$$

Warto zauważyć, że gdy średni potencjał chemiczny $\mu > 0$, wtedy możemy wprowadzić "średni" pęd Fermiego zdefiniowany równaniem $\xi_{k_F} = 0$, co prowadzi do $k_F = \sqrt{2m\mu}$.

Współczynnik $a_2^{(0)}$ musi zniknąć dla QCP zgodnie z warunkiem (5.12). W równaniach (5.16)-(5.18) wkład zawierający logarytm jest ujemny (pod warunkiem, że obcięcie ultrafioletowe Λ jest odpowiednio duże). Ze względu na możliwość dostrajania przyciągającego oddziaływania między atomami o przeciwnych pseudospinach $g < 0$ współczynnik Landaua $a_2^{(0)}$ zawsze można sprowadzić do zera. W warunkach eksperymentalnych można tego dokonać wykorzystując rezonans Feshbacha. Oznacza to, że o istnieniu QCP w $d = 2$ decyduje znak współczynnika $a_4^{(0)}$. Warto zauważyć, że $a_4^{(0)}$ jest niezależny od g . Dzięki temu współczynnik $a_2^{(0)}$ można stroić bez wpływu na znak $a_4^{(0)}$.

W analogii do powyższej analizy współczynnika $a_2^{(0)}$ rozważamy reżimy w przestrzeni parametrów pokazanej na rys. 5.7 i wykonujemy całkowanie w równaniu (5.15) dla współczynnika $a_4^{(0)}$ w przypadku dwuwymiarowym. Dla obszaru (A) otrzymujemy

$$a_4^{(A)} = -\frac{m^3}{8\pi} \left[\frac{1}{(\Lambda^2 - 2\mu m)^2} + \frac{1}{(2\mu m)^2} + \sum_{\sigma} \frac{(m_{\sigma}/m_{\bar{\sigma}})}{(k_{F,\sigma}^2 - 2\mu m)^2} \right], \quad (5.19)$$

przy czym $\bar{\sigma} = -\sigma$. W podobny sposób dla podzbiorów B-E otrzymujemy, że

$$a_4^{(B-E)} = -\frac{m^3}{8\pi} \left[\frac{1}{(\Lambda^2 - 2\mu m)^2} + \frac{(m_{\sigma}/m_{\bar{\sigma}})}{(k_{F,\sigma}^2 - 2\mu m)^2} \right], \quad (5.20)$$

gdzie $\sigma = +$ w obszarze (B) i (D), a $\sigma = -$ w reżimie (C) i (E). Natomiast w obszarze (F) otrzymujemy

$$a_4^{(F)} = -\frac{m^3}{8\pi} \left[\frac{1}{(\Lambda^2 - 2\mu m)^2} - \frac{1}{(2\mu m)^2} \right]. \quad (5.21)$$

Z wyjątkiem równania (5.21) powyższe wyrażenia są w sposób oczywisty ujemne. W reżimie (F) można zauważyć, że wyrażenia dla $a_2^{(F)}$ oraz $a_4^{(F)}$ nie zależą od h , a w konsekwencji Δ pozostaje stałe przy zmienianiu h (przy stałym μ) w tym obszarze. Oznacza to, że w obszarze (F) nie zachodzi żadna przemiana fazowa (niezależnie od jej rodzaju). Warunek (5.12) nigdy nie jest spełniony dla $d = 2$.

5.3.2 Przypadek $d = 3$

Analiza dotycząca przypadku trójwymiarowego jest analogiczna do powyższych rozważań dla $d = 2$. Znowu należy podzielić przestrzeń parametrów na podzbiory przedstawione na rys. 5.7. Wykonując odpowiednie całki w równaniach (5.14) oraz (5.15) otrzymujemy analityczną postać współczynników Landaua $a_2^{(0)}$ i $a_4^{(0)}$, które posłużą nam do sprawdzenia czy możliwe jest występowanie QCP w tym przypadku.

Współczynnik $a_2^{(0)}$ w obszarze (A), gdzie $\mu_+ > 0$ oraz $\mu_- > 0$, ma postać

$$a_2^{(A)} = -\frac{1}{g} - \frac{m}{2\pi^2} \left[\Lambda + \frac{\sqrt{2m\bar{\mu}}}{2} \ln \left(\frac{|\Lambda - \sqrt{2m\bar{\mu}}|}{|\Lambda + \sqrt{2m\bar{\mu}}|} \right) + \right. \\ \left. - \sum_{\sigma} \left\{ k_{F,\sigma} + \frac{\sqrt{2m\bar{\mu}}}{2} \ln \left(\frac{|k_{F,\sigma} - \sqrt{2m\bar{\mu}}|}{|k_{F,\sigma} + \sqrt{2m\bar{\mu}}|} \right) \right\} \right]. \quad (5.22)$$

Dla obszarów (B) oraz (C), gdzie $\mu > 0$, $\mu_{\sigma} > 0$ oraz $\mu_{\bar{\sigma}} < 0$, otrzymujemy

$$a_2^{(B,C)} = -\frac{1}{g} - \frac{m}{2\pi^2} \left[\Lambda + \frac{\sqrt{2m\bar{\mu}}}{2} \ln \left(\frac{|\Lambda - \sqrt{2m\bar{\mu}}|}{|\Lambda + \sqrt{2m\bar{\mu}}|} \right) + \right. \\ \left. - k_{F,\sigma} - \frac{\sqrt{2m\bar{\mu}}}{2} \ln \left(\frac{|k_{F,\sigma} - \sqrt{2m\bar{\mu}}|}{|k_{F,\sigma} + \sqrt{2m\bar{\mu}}|} \right) \right]. \quad (5.23)$$

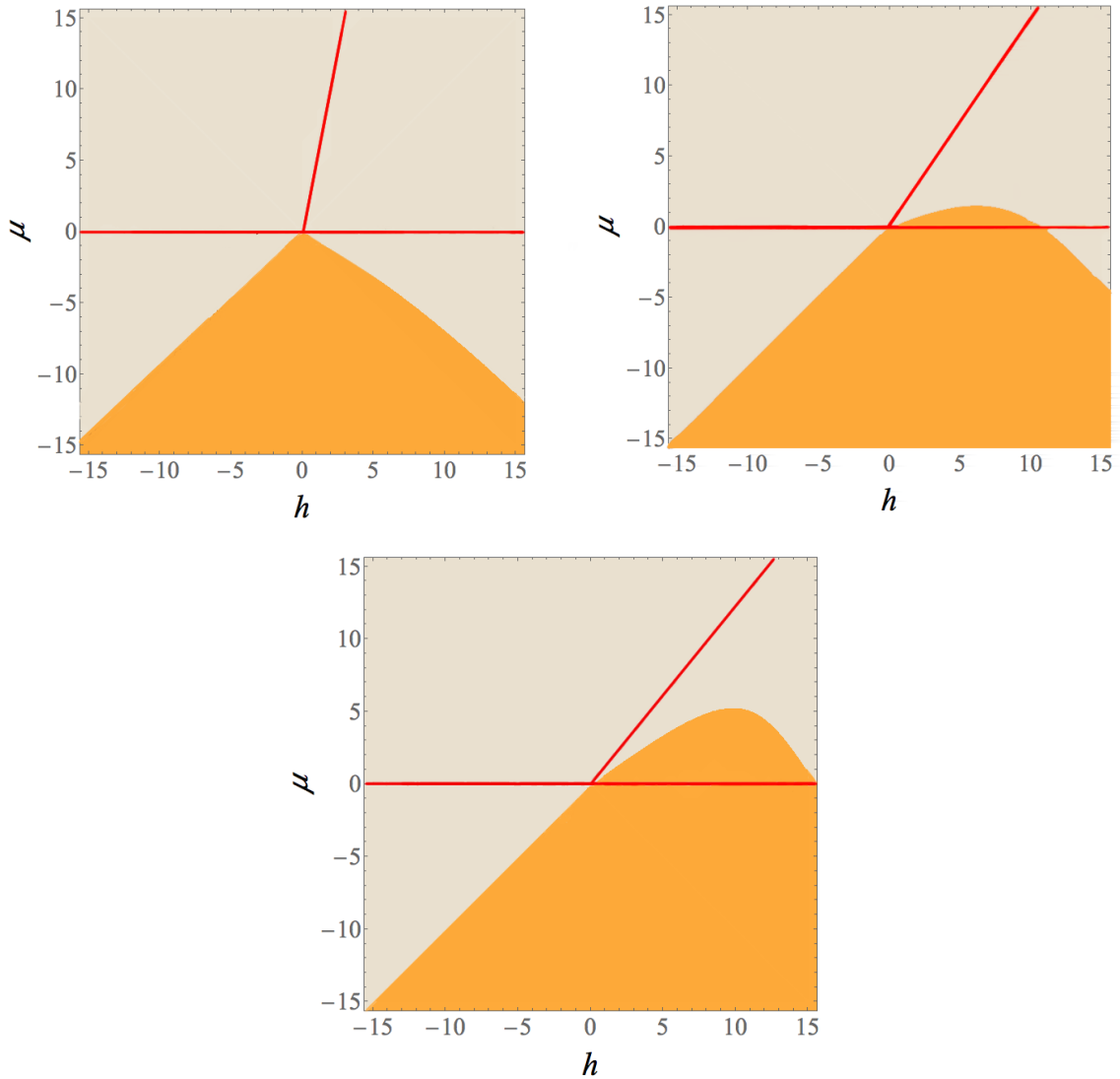
W reżimie (D) oraz (E) dla których $\bar{\mu} = -\mu > 0$, $\mu_{\sigma} > 0$ oraz $\mu_{\bar{\sigma}} < 0$ dostajemy

$$a_2^{(D,E)} = -\frac{1}{g} - \frac{m}{2\pi^2} \left[\Lambda - \sqrt{2m\bar{\mu}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2m\bar{\mu}}} \right) + \right. \\ \left. - k_{F,\sigma} + \sqrt{2m\bar{\mu}} \operatorname{arctg} \left(\frac{k_{F,\sigma}}{\sqrt{2m\bar{\mu}}} \right) \right]. \quad (5.24)$$

Wreszcie dla podzbioru (F), gdzie $\mu_+ < 0$ oraz $\mu_- < 0$, współczynnik $a_2^{(0)}$ ma postać

$$a_2^{(F)} = -\frac{1}{g} - \frac{m}{2\pi^2} \left[\Lambda - \sqrt{2m\bar{\mu}} \arctg \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2m\bar{\mu}}} \right) \right]. \quad (5.25)$$

Podobnie jak w przypadku dwuwymiarowym współczynnik $a_2^{(0)}$ zawiera dodatni wkład związany ze stałą sprzężenia g oraz wkład ujemny pochodzący od wyrażenia w nawiasie kwadratowym. W rezultacie modyfikując wartość g można dostroić wartość $a_2^{(0)}$ do zera, co odpowiada występowaniu przemiany fazowej. Warto podkreślić, że podobnie jak poprzednio współczynnik $a_4^{(0)}$ jest niezależny od g i to znak tego współczynnika Landaua decyduje o rodzaju przemiany.



Rys. 5.8: Ewolucja podzbioru na płaszczyźnie (h, μ) dla którego $a_4^{(0)} > 0$ dla różnych wartości stosunku mas składników mieszaniny r . Beżowy obszar odpowiada ujemnym wartościom współczynnika $a_4^{(0)}$, podczas gdy podzbiór pomarańczowy odpowiada $a_4^{(0)} > 0$. Współczynnik Landaua $a_4^{(0)}$ jest osobiwy wzdłuż czerwonych prostych na wykresie. Pierwszy diagram odpowiada $r = 1.5$, drugi odpowiada $r = 5$, a ostatni $r = 10$. W granicy $r \rightarrow \infty$ obszar pomarańczowy pokrywa połowę płaszczyzny (h, μ) zlokalizowaną poniżej przekątnej wykresu.

Teraz przejdziemy do omówienia współczynnika $a_4^{(0)}$. W obszarze (A) ma on postać

$$a_4^{(A)} = -\frac{m^2}{32\pi^2} \left[\frac{\Lambda(\Lambda^2 + 2m\mu)}{\mu(\Lambda^2 - 2m\mu)^2} + \frac{m}{(2m\mu)^{3/2}} \ln \left(\frac{|\Lambda - \sqrt{2m\mu}|}{|\Lambda + \sqrt{2m\mu}|} \right) + \right. \\ \left. - \sum_{\sigma} \left\{ \frac{k_{F,\sigma}(k_{F,\sigma}^2 + 2m\mu)}{\mu(k_{F,\sigma}^2 - 2m\mu)^2} + \frac{m}{(2m\mu)^{3/2}} \ln \left(\frac{|k_{F,\sigma} - \sqrt{2m\mu}|}{|k_{F,\sigma} + \sqrt{2m\mu}|} \right) - \frac{8m_{\sigma}k_{F,\sigma}}{(k_{F,\sigma}^2 - 2m\mu)^2} \right\} \right]. \quad (5.26)$$

Dla reżimu (B) i (C) otrzymujemy

$$a_4^{(B,C)} = -\frac{m^2}{32\pi^2} \left[\frac{\Lambda(\Lambda^2 + 2m\mu)}{\mu(\Lambda^2 - 2m\mu)^2} + \frac{m}{(2m\mu)^{3/2}} \ln \left(\frac{|\Lambda - \sqrt{2m\mu}|}{|\Lambda + \sqrt{2m\mu}|} \right) + \right. \\ \left. - \left\{ \frac{k_{F,\sigma}(k_{F,\sigma}^2 + 2m\mu)}{\mu(k_{F,\sigma}^2 - 2m\mu)^2} + \frac{m}{(2m\mu)^{3/2}} \ln \left(\frac{|k_{F,\sigma} - \sqrt{2m\mu}|}{|k_{F,\sigma} + \sqrt{2m\mu}|} \right) - \frac{8m_{\sigma}k_{F,\sigma}}{(k_{F,\sigma}^2 - 2m\mu)^2} \right\} \right]. \quad (5.27)$$

W podzbiorach (D) i (E) dostajemy

$$a_4^{(D,E)} = \frac{m^2}{32\pi^2} \left[\frac{\Lambda(\Lambda^2 + 2m\bar{\mu})}{\bar{\mu}(\Lambda^2 - 2m\bar{\mu})^2} + \frac{2m}{(2m\bar{\mu})^{3/2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2m\bar{\mu}}} \right) + \right. \\ \left. - \left\{ \frac{k_{F,\sigma}(k_{F,\sigma}^2 + 2m\bar{\mu})}{\bar{\mu}(k_{F,\sigma}^2 - 2m\bar{\mu})^2} + \frac{2m}{(2m\bar{\mu})^{3/2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{k_{F,\sigma}}{\sqrt{2m\bar{\mu}}} \right) + \frac{8m_{\sigma}k_{F,\sigma}}{(k_{F,\sigma}^2 - 2m\bar{\mu})^2} \right\} \right]. \quad (5.28)$$

Natomiast w obszarze (F) mamy

$$a_4^{(F)} = \frac{m^2}{32\pi^2} \left[\frac{\Lambda(\Lambda^2 + 2m\bar{\mu})}{\bar{\mu}(\Lambda^2 - 2m\bar{\mu})^2} + \frac{2m}{(2m\bar{\mu})^{3/2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2m\bar{\mu}}} \right) \right]. \quad (5.29)$$

Można zwrócić uwagę, że podobnie jak w przypadku $d = 2$ współczynniki Landaua $a_2^{(0)}$ oraz $a_4^{(0)}$ w obszarze (F) nie zależą od h , co wyklucza możliwość zachodzenia tam przemiany fazowej.

Zgodnie z kryterium (5.12) znak współczynnika $a_4^{(0)}$ decyduje o rodzaju przemiany fazowej zachodzącej w $T = 0$. Gdy $a_4^{(0)} > 0$ przemiana fazowa jest II rodzaju. Posługując się wyrażeniami (5.26)-(5.29) można naszkicować diagramy przedstawiające znak współczynnika $a_4^{(0)}$ na płaszczyźnie (h, μ) dla różnych wartości stosunku mas atomów r tak jak to zostało zaprezentowane na rys. 5.8.

Dla niewielkiego niezrównoważenia mas, tj. $r \approx 1$, obszar odpowiadający $a_4^{(0)} > 0$ zajmuje podzbiór (F) oraz niewielkie fragmenty podzbiorów (D) oraz (E) przylegające do niego (w zależności od tego czy $r > 1$, czy też $r < 1$). Dalsze zwiększanie r powoduje, że obszar w którym znak $a_4^{(0)}$ jest dodatni pokrywa coraz większą część reżimu (D), a gdy $r > r_c = 3.01$ obszar ten wdziera się do reżimu (B). W granicy $r \rightarrow \infty$ obszar dla którego może zachodzić ciągła przemiana fazowa pokrywa w całości obszary (F), (D) oraz (B). Zachowanie to zostało zilustrowane na rys. 5.8, przy czym warto zauważyć, że współczynnik $a_4^{(0)}$ jest osobliwy dla $\mu = 0$ oraz gdy spełniony jest warunek $h = \zeta\mu$ jak zostało uzasadnione wcześniej.

Obraz pojawiający się na skutek powyższej analizy diametralnie różni się od przypadku $d = 2$, gdzie występowanie QCP było całkowicie wykluczone (na poziomie MFT). Dla $d = 3$ możliwość wygenerowania ciągłej przemiany fazowej na diagramie fazowym dla $T = 0$ jest ograniczona do sytuacji, gdy tylko jeden z potencjałów chemicznych składników mieszaniny jest dodatni, tj. $\mu_{\sigma} > 0$

oraz $\mu_{\bar{\sigma}} < 0$. Co więcej korzystając z diagramów koncentracji atomów w mieszaninie przedstawionych na rys. 5.4 można wciągnąć wniosek, że QCP w $d = 3$ występuje między fazą nadciekłą, a całkowicie spolaryzowanym gazem o czym świadczy to, że potencjał chemiczny tylko jednego ze składników mieszaniny jest dodatni. Warto też podkreślić, że na skutek efektów związanych z oddziaływaniami ($\Delta > 0$) dodatnie koncentracje cząstek można otrzymać także dla ujemnych wartości potencjałów chemicznych (patrz rys. 5.4). Warto tu dodać, że możliwe jest otrzymanie QCP także w sytuacji zrównoważonej ($r = 1$) po stronie BEC dla przejścia BEC-BCS [87].

5.3.3 Asymptotyczny kształt linii krytycznej $T_c(h)$

Numerycznie otrzymany średniopolowy diagram fazowy (patrz rys. 5.2) pokazuje, że faza uporządkowana rozciąga się ponad QCP dla skończonych temperatur. Oznacza to, że nachylenie linii krytycznej $T_c(h)$ jest dodatnie dla dostatecznie niskich temperatur.

Zbadamy asymptotyczny kształt linii krytycznej wykorzystując w tym celu rozwinięcie Sommerfelda [10] dla współczynnika Landaua a_2 w obszarze (B) dla którego $\mu_+ > 0$ oraz $\mu_- < 0$. W reżimie tym, zgodnie z analizą znaku $a_4^{(0)}$, znajduje się QCP z rys. 5.2. Rozwinięcie niskotemperaturowe ma w tym przypadku postać

$$\int_0^{\frac{\Lambda^2}{2m_{\sigma}}} d\varepsilon_{\sigma} g(\varepsilon_{\sigma}) f(\varepsilon_{\sigma} - \mu_{\sigma}) = \int_0^{\mu_{\sigma}} d\varepsilon_{\sigma} g(\varepsilon_{\sigma}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 - \frac{1}{2^{2(n-1)}}\right) \zeta(2n) \beta^{-2n} \left[\frac{d^{2n-1} g(\varepsilon_{\sigma})}{d\varepsilon_{\sigma}^{2n-1}} \right]_{\varepsilon_{\sigma}=\mu_{\sigma}}, \quad (5.30)$$

gdzie $\varepsilon_{\sigma} = k^2/2m_{\sigma}$, $g(\cdot)$ to pewna funkcja, $\zeta(2n) = 2^{2n-1} \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} B_n$, a B_n to liczby Bernoulliego. Ustalając μ oraz r i korzystając z wyrażenia (5.6) otrzymujemy

$$a_2(T, h) = a_2^{(0)} - \alpha(h)T^2 + \dots, \quad (5.31)$$

gdzie współczynnik $\alpha(h)$ jest dany równaniem

$$\alpha(h) = \frac{mm_+^2(k_{F,+}^2 + 2m\mu)}{12k_{F,+}(k_{F,+}^2 - 2m\mu)^2}. \quad (5.32)$$

Pierwszy człon w rozwinięciu Sommerfelda odpowiada współczynnikowi Landaua dla $T = 0$ danego równaniem (5.22), a drugi wkład odpowiada niskotemperaturowej poprawce. Rozwijamy $a_2^{(0)}$ wokół krytycznej wartości h_c dla $T = 0$. Prowadzi to do następującego wyniku

$$T_c(h_c + \delta h) \approx \sqrt{\frac{\partial_h a_2^{(0)}|_{h=h_c} \delta h}{\alpha(h_c)}} \propto \sqrt{h - h_c}, \quad (5.33)$$

gdzie δh jest niewielkim odchyleniem od h_c . Średniopolowa linia krytyczna $T_c(h)$ jest opisywana przez prawo potęgowe o wykładniku $1/2$, który jest typową wartością dla układów fermionowych. Warto zauważyć, że δh jest dodatnie w zgodzie z wynikami numerycznymi przedstawionymi na rys. 5.2.

5.4 Kwantowy punkt Lifszycy

Jednym z interesujących i jak dotąd niezbadanych w pełni aspektów diagramów fazowych dla mieszanin ultrazimnych fermionów są zjawiska multikrytyczne. Jak to zostało wcześniej wspomniane, w typowej sytuacji przemiana fazowa zachodząca między jednorodną nadcieczą, a fazą normalną jest I rodzaju dla odpowiednio niskich temperatur i staje się ciągła powyżej temperatury trójkrytycznej T_{tri} . Wyniki badań omówione do tej pory w tym rozdziale wskazują ponadto na możliwość sprowadzenia T_{tri} do zera dla odpowiednio dużego niezrównoważenia mas składników mieszaniny, co prowadzi do występowania QCP na diagramie fazowym. Zgodnie z badaniami wykorzystującymi przybliżenie średniego pola możliwe jest zaobserwowanie także całkowicie innego typu zjawiska multikrytycznego występującego dla $T > 0$ związanego z występowaniem tzw. punktu Lifszycy [12, 83]. W tym przypadku dwie fazy uporządkowane (jednorodna oraz niejednorodna nadciecz) współistnieją z fazą normalną. Uniwersalne krytyczne osobliwości występujące dla klasycznego ($T > 0$) punktu Lifszycy są zupełnie inne od tych kontrolujących punkty krytyczne oraz trójkrytyczne [55, 56, 247]. W szczególności górny wymiar krytyczny d_c^+ dla przemiany trójkrytycznej jest równy 3, tymczasem jest on znacznie wyższy (wynosi przynajmniej 9/2) dla punktu Lifszycy [55, 64, 246]. Z tego powodu standardowe metody stosowane do opisu zjawisk krytycznych w układach o wymiarowości $d = 3$ wykorzystujące rozwinięcie $\epsilon = d_c^+ - d$ stają się problematyczne. Dodatkowo występowanie punktu Lifszycy prowadzi do bogatych i interesujących zjawisk takich jak ciągłe przejścia pomiędzy różnymi reżimami (ang. *crossover phenomena*) [55].

W punkcie przemiany $T = T_c(h)$ w przypadku mieszanin Fermiego punkt Lifszycy na poziomie MFT można wyznaczyć z warunku znikania wyrazu $|\nabla\phi|^2$ występującego w rozwinięciu gradientowym efektywnego działania. Warunek ten oznacza, że w punkcie Lifszycy współistnieją ze sobą jednorodna nadciecz, niejednorodny stan typu FFLO oraz faza normalna. Wyraz stojący przy $|\nabla\phi|^2$ ma interpretację kosztu energetycznego związanego z powstaniem przestrzennej modulacji pola porządku i gdy zmienia on swój znak na ujemny układ wykazuje tendencję do wytworzenia niejednorodnej konfiguracji parametru porządku.

Przemiany fazowe w $T > 0$ oraz $T = 0$ są odpowiednio wywoływane przez fluktuacje klasyczne oraz kwantowe. Naturalnym pytaniem dotyczącym fizyki niezrównoważonych mieszanin Fermiego jest to czy istnieje możliwość sprowadzenia punktu Lifszycy do zerowej temperatury podobnie jak można było tego dokonać dla punktu trójkrytycznego. W tym przypadku punkt Lifszycy powstawałby na skutek jedynie kwantowych fluktuacji. W tym podrozdziale postaramy się odpowiedzieć na to pytanie poprzez wyprowadzenie średniopoleowego analitycznego kryterium przewidującego występowanie takiego kwantowego punktu Lifszycy (QLP). Zaproponujemy także możliwe doświadczalne realizacje QLP w mieszaninach, które są aktualnie wykorzystywane w badaniach eksperymentalnych.

5.4.1 Propagator fluktuacji parowania w fazie normalnej

Zacniemy od przyjrzenia się strukturze propagatora fluktuacji parowania w fazie normalnej. Skupimy się na przypadku o wymiarowości $d = 3$ oraz na sytuacji w której (na poziomie MFT) przemiana fazowa jest ciągła także w temperaturze $T = 0$. Jak pokazane zostało to we wcześniejszej części tego rozdziału może być to osiągnięte dla mieszaniny, której stosunek mas $r > r_c \approx 3$. Zachowanie układu w $d = 2$ nie pozwala na otrzymanie QCP na średniopolowym diagramie fazowym, ale przemiana fazowa może stać się II rodzaju na skutek efektów związanych z fluktuacjami parametru porządku [219]. Układ pozostaje nieuporządkowany dla $h > h_c$, gdzie h_c możemy wyrazić poprzez mikroskopowe parametry korzystając z tego, że na poziomie MFT zachodzi $a_2^{(0)}(h_c) = 0$ dla $T = 0$. Występowanie niestabilności w kierunku niejednorodnej cieczy typu FFLO manifestuje się przez ujemną wartość współczynnika rozwinięcia gradientowego Z , którego postać będziemy chcieli wyprowadzić w tym podrozdziale. Skupimy się na sytuacji, gdy znajdujemy się w zakresie parametrów odpowiadającym reżimowi (B) przedstawionemu na rys. 5.7.

Propagator fluktuacji parowania wyznaczmy posługując się metodą NSR [158] skupiając się na zerowej temperaturze oraz otoczeniu przemiany fazowej, przy czym będziemy się do niej zbliżać od strony fazy normalnej [136]. Obliczamy odwrotny propagator fluktuacji parowania $F_0^{-1}(q)$ poprzez ewaluację diagramu pęcherzykowego typu cząstka-cząstka [220] (porównaj z równaniem (2.31))

$$F_0^{-1}(q) = -\frac{1}{g} - \int_k G_{0,+}(k+q)G_{0,-}(-k) = -\frac{m}{4\pi a_F} + \int_k \left[\frac{\partial_{kq}^T}{iq_0 - \xi_{kq}} + \frac{m}{\mathbf{k}^2} \right], \quad (5.34)$$

gdzie $\xi_{kq} = \xi_k^- + \xi_{k+q}^+$, $\partial_{kq}^T = 1 - f(\xi_k^-) - f(\xi_{k+q}^+)$, a_F to fermionowa długość rozpraszania, a $q_0 = 2\pi T\ell$ ($\ell \in \mathbb{Z}$) jest bozonową częstością Matsubary. W powyższym wyrażeniu zastosowano regularyzację całki przy wykorzystaniu równania Lippmanna-Schwingera [217] (porównaj z równaniem (2.22))

$$\frac{1}{g} = \frac{m}{4\pi a_F} - \int_k \frac{1}{2\varepsilon_k}, \quad (5.35)$$

gdzie $\varepsilon_k = k^2/2m$, a także całka jest obcięta dla pędów większych niż Λ . Powyższa procedura pozwala na usunięcie rozbieżności ultrafioletowych w granicy $g \rightarrow 0^-$ oraz $\Lambda \rightarrow \infty$ przy jednoczesnym utrzymywaniu stałej wartości a_F .

Wykonując przedłużenie analityczne ($iq_0 \mapsto \omega + i0^+$) równania (5.34) możemy rozdzielić otrzymaną retardowaną funkcję $F_{0,ret.}^{-1}(\omega, \mathbf{q})$ na część rzeczywistą oraz urojoną przy wykorzystaniu tożsamości Sochockiego $\frac{1}{x \pm i0^+} = \mathcal{P} \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x)$, gdzie $\mathcal{P}$ jest częścią główną Cauchy'ego. W rezultacie otrzymujemy

$$\text{Re}F_{0,ret.}^{-1}(\omega, \mathbf{q}) = -\frac{m}{4\pi a_F} + \int_k \left[\mathcal{P} \frac{\partial_{kq}^T}{\omega - \xi_{kq}} + \frac{m}{\mathbf{k}^2} \right] \quad (5.36)$$

oraz

$$\text{Im}F_{0,ret.}^{-1}(\omega, \mathbf{q}) = -\pi \int_k \partial_{kq}^T \delta(\xi_{kq} - \omega). \quad (5.37)$$

W następnym podrozdziale skupimy się na analizie rozwinięcia gradientowego $\text{Re}F_{0,ret.}^{-1}$ dla $T = 0$. Z kolei części urojonej przyjrzymy się dokładniej w następnym rozdziale.

Przedstawione tutaj postępowanie jest w pewnym sensie analogiczne do opisu teoretycznego plazmonów w jednorodnym gazie elektronowym przy wykorzystaniu przybliżenia RPA [109]. Jednak propagator bozonowy dla plazmonów jest zadany diagramem pęcherzykowym typu cząstka-dziura, a nie typu cząstka-cząstka jak to ma miejsce w rozważanym przypadku.

5.4.2 Rozwinięcie gradientowe

Skupiając się na przypadku $T = 0$ wykonujemy rozwinięcie $\text{Re}F_{0,ret.}^{-1}(\omega, \mathbf{q})$ dla niewielkich wartości częstości oraz pędów. Uwzględniamy w nim człony do drugiego rzędu w ω i $\mathbf{q}$. Prowadzi to do następującego wyrażenia

$$\text{Re}F_{0,ret.}^{-1}(\omega, \mathbf{q}) = a_2^{(0)} + Z\mathbf{q}^2 - W\omega - Z_0\omega^2 + \dots \quad (5.38)$$

Postać analityczną współczynników gradientowych $\{Z, Z_0, W\}$, a także współczynnika $a_2^{(0)}$ można otrzymać w granicy $T \rightarrow 0$ korzystając z tego, że wtedy $f(x) \rightarrow \theta(-x)$, co prowadzi do całek tego samego typu jak w przypadku współczynników $a_2^{(0)}$ oraz $a_4^{(0)}$ w rozwinięciu Landaua.

Stały wkład $\text{Re}F_{0,ret.}^{-1}(0, 0)$ odpowiada współczynnikowi Landaua stojącemu przy $|\Delta|^2$ i jest dany równaniem

$$a_2^{(0)} = -\frac{m}{4\pi a_F} + \frac{m}{2\pi^2} \left[k_{F,+} + \frac{k_F}{2} \ln \left(\frac{|k_{F,+} - k_F|}{|k_{F,+} + k_F|} \right) \right], \quad (5.39)$$

gdzie $k_F = \sqrt{2m\mu}$ to "średni" pęd Fermiego. Warto zwrócić uwagę, że powyższe wyrażenie jest zregularyzowaną postacią równania (5.23) dla $\mu_+ > 0$, przy czym wprowadzenie a_F pozwoliło na przejście do granicy $\Lambda \rightarrow \infty$. W fazie normalnej $a_2^{(0)} > 0$. Natomiast przemiana fazowa zachodzi, gdy $a_2^{(0)}(h = h_c) = 0$. W fazie nadkiernej należy posługiwać się wyrażeniami uwzględniającymi self-energię typu BCS związaną z występowaniem parowania w układzie, która prowadzi do pojawienia się anomalnej części fermionowych funkcji Greena. Stosowne wyrażenia zostały wyprowadzone w poprzednim rozdziale i są dane równaniem (4.30).

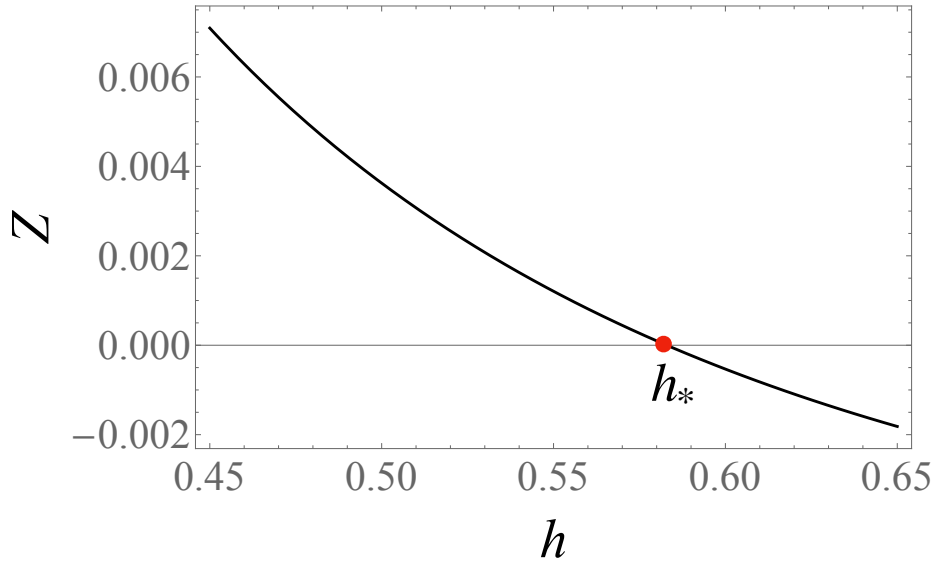
Współczynniki gradientowe są dane wyrażeniami

$$W = \frac{m^2}{4\pi^2} \left[\frac{k_{F,+}}{k_{F,+}^2 - k_F^2} - \frac{1}{2k_F} \ln \left(\frac{|k_{F,+} - k_F|}{|k_{F,+} + k_F|} \right) \right], \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} Z = & \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{m}{4} \left\{ \frac{m}{m_+} \left[\frac{k_{F,+}}{k_{F,+}^2 - k_F^2} - \frac{1}{2k_F} \ln \left(\frac{|k_{F,+} - k_F|}{|k_{F,+} + k_F|} \right) \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{m^2}{6m_+^2} \left[-\frac{5k_{F,+}^3 - 3k_F^2 k_{F,+}}{(k_{F,+}^2 - k_F^2)^2} + \frac{3}{2k_F} \ln \left(\frac{|k_{F,+} - k_F|}{|k_{F,+} + k_F|} \right) \right] \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{m_+ k_{F,+}}{(k_{F,+}^2 - k_F^2)^2} \left[\frac{m^2 k_{F,+}^2}{3m_+^2} - \frac{m}{2m_+} (k_{F,+}^2 - k_F^2) \right] - \frac{m k_{F,+} (k_{F,+}^2 - 3k_F^2)}{6(k_{F,+}^2 - k_F^2)^2} \right) \end{aligned} \quad (5.41)$$

oraz

$$Z_0 = \frac{m}{16\pi^2 k_F^2} \left[\frac{k_{F,+}^3 + k_F^2 k_{F,+}}{(k_{F,+}^2 - k_F^2)^2} + \frac{1}{2k_F} \ln \left(\frac{|k_{F,+} - k_F|}{|k_{F,+} + k_F|} \right) \right]. \quad (5.42)$$

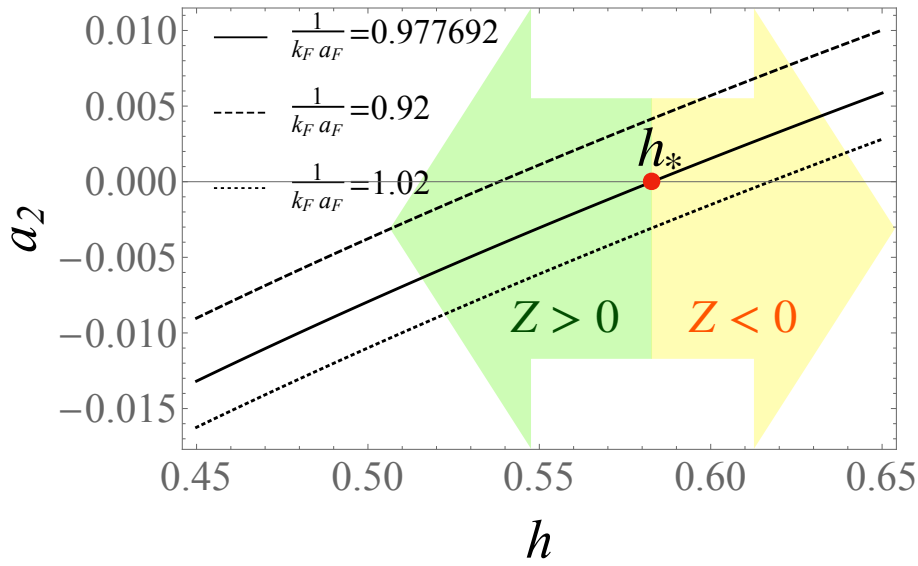


Rys. 5.9: Współczynnik gradientowy Z w funkcji pola Zeemana h . Czerwony punkt odpowiada wartości h_* dla której $Z = 0$. Parametry wykresu są następujące $m_+ = 1$, $T = 0$, $r = 4.03$ oraz $\mu = 0.1$.

Znak współczynnika Z determinuje (przy znikającym współczynniku $a_2^{(0)}$) czy układ wykazuje tendencje do kondensowania w jednorodnym (typu BCS) lub niejednorodnym (typu FFLO) stanie podstawowym. W szczególności jesteśmy zainteresowani sytuacją w której oba współczynniki $a_2^{(0)}$ oraz Z są jednocześnie równe zero, co stanowi kryterium występowania QLP na diagramie fazowym. Wprowadzamy h_* jako wartość pola Zeemana h dla której zachodzi warunek $Z(h_*) = 0$ i analizujemy sytuację dla której $h_* = h_c$. Warto zwrócić uwagę, że współczynniki gradientowe $\{Z, Z_0, W\}$ nie zależą od długości rozpraszania a_F . Można zatem najpierw dostroić układ do wartości h_* , a następnie niezależnie zmieniając wartość a_F dostroić h_c do h_* . Na rys. 5.9 przedstawiony został wykres współczynnika Z w funkcji h dla eksperymentalnie realizowanej mieszaniny atomów ^{161}Dy oraz ^{40}K [185, 186], która jest scharakteryzowana $r = 4.03$ oraz $\mu = 0.1$.

Dopasowujemy wartość h_c (patrz równanie (5.39)) do h_* manipulując parametrem $(k_F a_F)^{-1}$ (patrz rys. 5.10). QLP odpowiada wartości $(k_F a_F)_*^{-1} = 0.977692$ w tym przypadku. Ponadto można zauważyć, że dla fizycznie istotnego zakresu parametrów współczynniki W oraz Z_0 są dodatnie i monotonicznie maleją wraz z h .

Analogiczne rozumowanie można poprowadzić także dla innych badanych eksperymentalnie mieszanin Fermiego, które są scharakteryzowane wystarczająco dużym niezrównoważeniem mas składników mieszaniny $r > r_c \approx 3$. Jako przykład można tu podać mieszaninę ^6Li - ^{40}K ($r = 6.67$) [103, 225, 227, 239], a także mieszaninę ^6Li - ^{53}Cr ($r = 8.83$) [155]. Dla wspomnianych układów QLP występuje dla $(k_F a_F)_*^{-1} = 0.879942$ w przypadku mieszaniny litu i potasu oraz $(k_F a_F)_*^{-1} = 0.836476$ dla mieszaniny litu i chromu (przyjęto, że $\mu = 0.1$ w obu przypadkach). W ogólności wartość h_*



Rys. 5.10: Współczynnik Landaua $a_2^{(0)}$ w funkcji pola Zeemana h oraz dla trzech różnych wartości $(k_F a_F)^{-1}$. Warunek $a_2^{(0)}(h_c) = 0$ wyznacza krytyczną wartość pola Zeemana h_c . Czerwony punkt odpowiada wartości h_* dla której współczynnik gradientowy $Z = 0$. Kwantowy punkt Lifszycza pojawia się, gdy $h_c = h_*$ i w rozważanym przypadku odpowiada on $(k_F a_F)_*^{-1} = 0.977692$. Warto zwrócić uwagę, że gdy $h_c > h_*$ wtedy niestabilność w kierunku parowania typu FFLO jest obserwowana w układzie. Parametry wykresu są następujące $m_+ = 1$, $T = 0$, $r = 4.03$ oraz $\mu = 0.1$.

zmniejsza się wraz ze wzrostem r . Jest to związane z tym, że większa różnica mas skutkuje występowaniem parowania typu FFLO dla mniejszych asymetrii w populacjach składników mieszaniny.

Występowanie QLP wywiera głęboki wpływ na skalowanie układu w granicy $T \rightarrow 0$. Punkt stały dla grupy renormalizacji kontrolujący przemianę fazową w $T = 0$ może być niegaussowski nawet w przypadku trójwymiarowym w przeciwieństwie do typowej sytuacji występującej dla układów elektronowych. Układ w pobliżu QLP powinien także wykazywać złożone i interesujące zjawiska związane z przejściem między reżimem kwantowym i klasycznym. Analiza występujących w tym przypadku osobliwości krytycznych dla $T \rightarrow 0$ znajduje się poza zakresem tematów poruszanych w tej dysertacji, ale stanowi interesujący kierunek ich rozwoju. Z całą pewnością osobliwość krytyczna będzie w tym przypadku zależeć od postaci członu tłumienia Landaua występującego w propagatorze bozonowym w fazie złamanej i tym samym zachowanie to nie będzie należało do żadnej z klas zachowań krytycznych badanych do tej pory w kontekście niestabilności magnetycznych w układach elektronowych [45, 181].

Na koniec warto wspomnieć, że dotychczasowe badania wychodzące poza przybliżenie pola średniego wskazują, że nadcięcie typu FFLO są marginalnie niestabilne ze względu na efekty fluktuacyjne w układach obojętnych elektrycznie atomów dla $T > 0$ i $d = 3$ (nie dotyczy to zerowych

temperatur) [105, 178, 235]. Załóżmy, że faza FFLO jest stanem podstawowym (tj. $T = 0$) badanego układu dla $h \in [h_c, h_{FFLO}]$, gdzie h_{FFLO} jest wartością h dla której następuje przemiana między fazą niejednorodną i normalną, a dla $h = h_c$ zachodzi przemiana fazowa między nadcieczą niejednorodną i jednorodną. Oznacza to, że przynajmniej dla układów nieskończonych oraz jednorodnych QLP powinien zawsze pojawiać się na diagramie fazowym o ile zachodzi przemiana fazowa między nadcieczą jednorodną i niejednorodną typu FFLO w zerowej temperaturze (co ma miejsce dla $h = h_c$ zgodnie z przyjętym założeniem). W tym punkcie dla $T = 0$ spotykają się nadciecz typu BCS (dla $h \leq h_c$), faza FFLO (dla $h \geq h_c$ i $T = 0$) oraz faza normalna (dla $h \geq h_c$ i $T \rightarrow 0^+$).

Rozdział 6

Mody Goldstone’a i ich tłumienie

Interesującym aspektem badań nad układami nadciekłych fermionów są ich widma wzbudzeń, a także zmiana własności spektralnych wywołana zwiększaniem niezerównoważenia między poszczególnymi składnikami w rozważanych w tej dysertacji mieszaninach. W ogólności oczekuje się pojawienia nie posiadających przerwy energetycznej wzbudzeń kolektywnych typu fononowego (tzw. mody Andersona-Bogoliubowa) oraz posiadających przerwę modów amplitudowych. Warto zaznaczyć, że mody kolektywne innego typu są obecne w dwupasmowych nadcieczkach [98,100,119] oraz w układach dla których występuje sprzężenie spin-orbita [96,132,203,251].

Szczególnie interesującym problemem jest opis własności fononów Bogoliubowa-Andersona (AB) [6,28] zwanych także modami Nambu-Goldstone’a [79,151] w granicy małych pędów unoszonych przez wzbudzenie. Zgodnie z twierdzeniem Goldstone’a [80] spontaniczne łamanie ciągłej symetrii $U(1)$ dla gazów Fermiego powoduje powstanie niskoenergetycznych fononowych wzbudzeń kolektywnych. Mody te zostały zaobserwowane w kilku eksperymentach [4,15,91,208,224], a także obszernie zbadane w wielu pracach teoretycznych [43,57,63,92,101,115,116,124,141,161] w ciągu ostatnich 20 lat. Jednakże większość tych badań nie podejmuje tematu wpływu niezerównoważenia mieszanin ze względu na populacje i masy składników na widma wzbudzeń, a w szczególności na tłumienie modów kolektywnych. Dominujący mechanizm tłumienia w takich układach jest związany z niesprężystym rozpraszaniem fononów Goldstone’a na termicznie wzbudzanych kwazicząstkach fermionowych [255]. Współczynnik tłumienia dąży do 0 w granicy $T \rightarrow 0$ [205,255] ze względu na znikanie termicznej chmury kwazicząstek obecnej w układzie w skończonych temperaturach [254]. Przedstawiony obraz zjawiska tłumienia jest spójny z analizą przedstawioną w pracy [126], która pokazuje, że proces absorpcji i emisji fononu AB przez kwazicząstki fermionowe prowadzi do eksponencjalnego zmniejszania współczynników tłumienia w niskich temperaturach przy obecności przerwy energetycznej w widmie wzbudzeń. Omówiona zależność temperaturowa jest charakterystyczną cechą tzw. tłumienia Landaua [32] dla modów posiadających przerwę energetyczną. Jednak w artykule [144] pokazano, że dla odpowiednio dużych polaryzacji mieszaniny Fermiego współczynniki tłumienia przyjmują większe wartości nawet dla stosunkowo niskich temperatur. Sugeruje to związek pomiędzy niedopasowaniem powierzchni Fermiego (związanej z występowaniem dwóch różnych składników tworzących mieszaninę), a mechanizmem procesu tłumienia Landaua.

W związku z tym warto jest bliżej przyjrzeć się wpływowi niezerowności populacji oraz mas atomów znajdujących się w mieszaninie Fermiego na proces tłumienia. W dalszej części rozdziału zbadana zostanie struktura propagatora fluktuacji parowania w granicy małych pędów $\mathbf{q}$ i częstości q_m , tj. $q \rightarrow 0$. Wyprowadzimy nierówność, której spełnienie stanowi warunek konieczny występowania niezerowych współczynników tłumienia dla modów AB w jednorodnej nadcieczy przy obecności niezerowności mas oraz populacji składników mieszaniny. Nasz główny wynik wskazuje na to, że mody Goldstone’a są tłumione nawet w zerowej temperaturze dla odpowiednio dużego niedopasowania powierzchni Fermiego. Wyniki analityczne porównujemy z numerycznie otrzymanymi zespolonymi biegunami propagatora fluktuacji parowania $z_q = \omega_q - i\Gamma_q/2$, przy czym część rzeczywista ω_q odpowiada relacji dyspersji modu kolektywnego, a część urojona Γ_q jego współczynnikowi tłumienia. Powrócimy także do analizy części urojonej propagatora fluktuacji parowania w fazie normalnej (patrz podrozdział 5.4.1) i na jej podstawie wykazemy, że tłumienie Landaua jest nieobecne w niskoenergetycznym rozwinięciu tego propagatora w fazie symetrycznej. Przedstawione wyniki zostały opublikowane w pracach [249, 250].

Struktura tego rozdziału jest następująca:

Podrozdział 6.1. Zaczniemy od wyprowadzenia rozwinięcia gradientowego dla propagatora gaussowskich fluktuacji parowania w fazie uporządkowanej. Na tej podstawie przedstawiona zostanie analityczna postać relacji dyspersji dla modów AB. W tej części pominięte będą wyrazy odpowiedzialne za powstawanie tłumienia Landaua.

Podrozdział 6.2. Następnie uwzględnimy w rozwinięciu gradientowym wyrazy, które powodują pojawienie się zespolonego bieguna propagatora fluktuacji parowania i tym samym są odpowiedzialne za tłumienie Landaua. Przeanalizujemy uzyskane współczynniki i podamy warunki dla których tłumienie jest obecne także dla $T = 0$. Uzyskane wyniki analityczne porównamy z numerycznie otrzymanymi współczynnikami tłumienia.

Podrozdział 6.3. Na koniec opiszemy proces tłumienia Landaua w fazie normalnej poprzez analizę części urojonej propagatora fluktuacji parowania. Pokażemy, że człony odpowiadające tłumieniu w fazie normalnej nie występują w rozwinięciu propagatora dla małych pędów i częstości w przeciwieństwie do zachowania obserwowanego w fazie o złamanej symetrii.

6.1 Fonony Andersona-Bogoliubowa

Punktem wyjścia do rozważań dotyczących wzbudzeń kolektywnych jest odwrotny propagator fluktuacji parowania $\mathbb{F}_q^{-1}$, którego postać została wyprowadzona w podrozdziale 4.3. Jego elementy macierzowe są dane wyrażeniem (4.30). Relacje dyspersji modów kolektywnych występujących w układzie można znaleźć poprzez zbadanie biegunów retardowanego propagatora fluktuacji parowania danego wyrażeniem

$$\mathbb{F}_{ret}(\mathbf{q}, iq_m \mapsto \omega + i0^+) = \frac{1}{\det \mathbb{F}^{-1}(\mathbf{q}, \omega + i0^+)} \begin{pmatrix} M_{11}(-\mathbf{q}, -\omega) & -M_{12}(\mathbf{q}, \omega) \\ M_{12}^*(\mathbf{q}, \omega) & M_{11}(\mathbf{q}, \omega) \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

gdzie $M_{ij}(\mathbf{q}, \omega) \equiv [\mathbb{F}_q^{-1}]_{ij}$. Oznacza to, że można je znaleźć rozwiązując względem ω równanie [115, 125]

$$\det \mathbb{F}^{-1}(\mathbf{q}, \omega + i0^+) = 0. \quad (6.2)$$

Powyższe równanie pozwala na wyznaczenie relacji dyspersji ω_q dla fononów AB, ale jest niewystarczające do znalezienia zespolonego bieguna propagatora $\mathbb{F}_q$. W celu zbadania tłumienia modów kolektywnych należy przedłużyć to równanie na całą płaszczyznę zespoloną posługując się metodą Nozièresa, której szczegóły zostaną omówione w następnym podrozdziale.

Relację dyspersji dla modów Goldstone'a można otrzymać korzystając z rozwinięcia gradientowego względem małych wartości pędów $\mathbf{q}$ oraz częstości q_m . Odpowiednie współczynniki rozwinięcia gradientowego uzyskujemy systematycznie rozwijając w szereg Taylora poszczególne człony zależące od $\mathbf{q}$ lub q_m w równaniu (4.30). Korzystając z tej procedury dla energii wzbudzeń kwazicząstek fermionowych (patrz równanie (4.14) i opis pod nim) znajdujących się w mianowniku elementów macierzowych $M_{ij}(\mathbf{q}, \omega)$ otrzymujemy, że

$$E_{k+q} = E_k + \alpha_k q + \delta_k q^2 + \dots, \quad (6.3)$$

gdzie $\alpha_k = \frac{\xi_k}{mE_k} k \cos \theta$ oraz $\delta_k = \frac{1}{2m} \frac{\xi_k}{E_k} \frac{\Delta^2}{E_k^2} + \frac{1}{2m} \frac{\xi_k^3}{E_k^3} + \frac{\Delta^2}{2m^2 E_k^3} k^2 \cos^2 \theta$, przy czym $\cos \theta = \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} / kq$, a $q = |\mathbf{q}|$. W analogiczny sposób otrzymuje się, że

$$E_{k+q}^\sigma = E_k^\sigma + \alpha_k^\sigma q + \delta_k^\sigma q^2 + \dots, \quad (6.4)$$

gdzie $\alpha_k^\sigma = \frac{\zeta}{m} k \cos \theta + \sigma \alpha_k$, a także $\delta_k^\sigma = \frac{\zeta}{2m} + \sigma \delta_k$. Rozwinąć można także czynniki koherencji u_{k+q} oraz v_{k+q} znajdujące się w wyrazach $\mathcal{C}_{k,q}^{\sigma,\sigma'}$ oraz $\mathcal{D}_{k,q}^{\sigma,\sigma'}$ występujących w elementach macierzowych odwrotnego propagatora fluktuacji parowania $\mathbb{F}_q^{-1}$ (patrz równanie (4.30)). W rezultacie otrzymujemy, że (patrz równania (4.24)- (4.26) i opisy pod nimi)

$$\begin{aligned} u_{k+q}^2 &= u_k^2 + a_k q + b_k q^2 + \dots, \\ v_{k+q}^2 &= v_k^2 - a_k q - b_k q^2 + \dots, \\ u_{k+q} v_{k+q} &= \frac{\Delta}{2E_{k+q}} = u_k v_k + d_k q + g_k q^2 + \dots, \end{aligned} \quad (6.5)$$

przy czym $a_k = \frac{\Delta^2}{2mE_k^3} k \cos \theta$, $b_k = \frac{1}{4m} \frac{\Delta^4}{E_k^5} + \frac{1}{4m} \frac{\Delta^2 \xi_k^2}{E_k^5} - \frac{3\Delta^2 \xi_k}{4m^2 E_k^5} k^2 \cos^2 \theta$, $d_k = \frac{\Delta \xi_k}{2mE_k^3} k \cos \theta$ oraz $g_k = \frac{\Delta}{4m^2 E_k^5} (m\Delta^2 \xi_k + m\xi_k^3 + \Delta^2 k^2 \cos^2 \theta - 2k^2 \xi_k^2 \cos^2 \theta)$. Ostatnim elementem, który można rozwinąć w szereg Taylora są funkcje rozkładu Fermiego-Diraca $f(E_{k+q}^\sigma)$, co prowadzi do wyrażenia

$$\begin{aligned} f(E_{k+q}^\sigma) &= f(E_k^\sigma) + f'(E_k^\sigma)[E_{k+q}^\sigma - E_k^\sigma] + \frac{1}{2} f''(E_k^\sigma)[E_{k+q}^\sigma - E_k^\sigma]^2 + \\ &+ \frac{1}{3!} f^{(3)}(E_k^\sigma)[E_{k+q}^\sigma - E_k^\sigma]^3 + \dots, \end{aligned} \quad (6.6)$$

gdzie $f'(E_k^\sigma) = -\frac{\beta}{4} \text{sech}^2 \left(\frac{\beta E_k^\sigma}{2} \right)$, $f''(E_k^\sigma) = \frac{\beta^2}{4} \text{tgh} \left(\frac{\beta E_k^\sigma}{2} \right) \text{sech}^2 \left(\frac{\beta E_k^\sigma}{2} \right)$ oraz $f^{(3)}(E_k^\sigma) = \frac{\beta^3}{8} \text{sech}^4 \left(\frac{\beta E_k^\sigma}{2} \right) - \frac{\beta^3}{4} \text{sech}^2 \left(\frac{\beta E_k^\sigma}{2} \right) \text{tgh}^2 \left(\frac{\beta E_k^\sigma}{2} \right)$. Korzystając z tych wyrażeń można otrzymać rozwinięcia gradientowe ele-

mentów macierzowych M_{ij} odwrotnego propagatora fluktuacji parowania $\mathbb{F}_q^{-1}$, które mają postać

$$\begin{aligned} M_{11}(\mathbf{q}, iq_m) &= A + B\mathbf{q}^2 + iCq_m + Qq_m^2 + O(q^3), \\ M_{12}(\mathbf{q}, iq_m) &= D + E\mathbf{q}^2 + Hq_m^2 + O(q^3), \end{aligned} \quad (6.7)$$

gdzie $A = M_{11}(\mathbf{0}, 0)$, a $D = M_{12}(\mathbf{0}, 0)$. Otrzymane współczynniki rozwinięcia gradientowego wynoszą

$$\begin{aligned} B = \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{24E_k^3} \Bigg[& -4E_k^3 u_k^2 \left(3f''(E_k^-) \{a_k \alpha_k^- - \delta_k^- v_k^2\} + 6b_k f'(E_k^-) - (\alpha_k^-)^2 f^{(3)}(E_k^-) v_k^2 \right) + \\ & + 4E_k^3 v_k^2 \left(3f''(E_k^+) \{a_k \alpha_k^+ + \delta_k^+ u_k^2\} + 6b_k f'(E_k^+) + (\alpha_k^+)^2 f^{(3)}(E_k^+) u_k^2 \right) + \\ & + 3u_k^2 \left([f(E_k^+) - f(E_k^-)] \{-2\alpha_k^+ a_k E_k + 4b_k E_k^2 - u_k^2 (2\delta_k^+ E_k - (\alpha_k^+)^2)\} + \right. \\ & + 2\alpha_k^+ f'(E_k^+) E_k \{2a_k E_k - \alpha_k^+ u_k^2\} + 2E_k^2 u_k^2 \{(\alpha_k^+)^2 f''(E_k^+) + 2\delta_k^+ f'(E_k^+)\} \Big) + \\ & + 3v_k^2 \left([f(E_k^-) - f(E_k^+)] \{2\alpha_k^- a_k E_k + 4b_k E_k^2 - v_k^2 ((\alpha_k^-)^2 + 2\delta_k^- E_k)\} + \right. \\ & \left. + 2\alpha_k^- f'(E_k^-) E_k \{2a_k E_k - \alpha_k^- v_k^2\} - 2E_k^2 v_k^2 \{(\alpha_k^-)^2 f''(E_k^-) + 2\delta_k^- f'(E_k^-)\} \right) \Bigg], \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$C = \int_{\mathbf{k}} [f(E_k^+) - f(E_k^-)] \frac{u_k^4 - v_k^4}{4E_k^2}, \quad (6.9)$$

$$Q = \int_{\mathbf{k}} [f(E_k^-) - f(E_k^+)] \frac{u_k^4 + v_k^4}{8E_k^3}, \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} E = \int_{\mathbf{k}} \frac{u_k v_k}{6} \Bigg[& -3\alpha_k^- d_k f''(E_k^-) - 3\alpha_k^+ d_k f''(E_k^+) - \frac{3}{4E_k^3} \left(2\alpha_k^- f'(E_k^-) E_k \{2d_k E_k + \right. \\ & - \alpha_k^- u_k v_k\} + [f(E_k^-) - f(E_k^+)] \{2\alpha_k^- d_k E_k + 4E_k^2 g_k - u_k v_k \{(\alpha_k^-)^2 + 2\delta_k^- E_k\}\} + \\ & - 2E_k^2 u_k v_k \{(\alpha_k^-)^2 f''(E_k^-) + 2\delta_k^- f'(E_k^-)\} \Big) + \frac{3}{4E_k^3} \left(2\alpha_k^+ f'(E_k^+) E_k \{2d_k E_k + \right. \\ & + \alpha_k^+ u_k v_k\} + [f(E_k^-) - f(E_k^+)] \{2\alpha_k^+ d_k E_k - 4E_k^2 g_k - u_k v_k \{2E_k \delta_k^+ - (\alpha_k^+)^2\}\} + \\ & + 2E_k^2 u_k v_k \{(\alpha_k^+)^2 f''(E_k^+) + 2\delta_k^+ f'(E_k^+)\} \Big) + 3u_k v_k \{ \delta_k^- f''(E_k^-) + \delta_k^+ f''(E_k^+) \} + \\ & \left. + u_k v_k \{(\alpha_k^-)^2 f^{(3)}(E_k^-) + (\alpha_k^+)^2 f^{(3)}(E_k^+)\} - 6g_k \{f'(E_k^-) - f'(E_k^+)\} \right] \end{aligned} \quad (6.11)$$

oraz

$$H = \int_{\mathbf{k}} [f(E_k^+) - f(E_k^-)] \frac{u_k^2 v_k^2}{4E_k^3}. \quad (6.12)$$

W powyższych równaniach wartość Δ jest wyznaczana z równania przerwy energetycznej (patrz równanie (5.2)). Wykorzystując uzyskaną postać rozwinięcia gradientowego daną równaniem (6.7) możemy po wykonaniu przedłużenia analitycznego ($iq_m \mapsto \omega + i0^+$) wykorzystać ją do znalezienia przybliżonej postaci relacji dyspersji modów AB. Rozwiązując równanie

$$\det \mathbb{F}_{ret}^{-1}(\mathbf{q}, \omega) = M_{11}(\mathbf{q}, \omega) M_{11}(-\mathbf{q}, -\omega) - M_{12}^2(\mathbf{q}, \omega) = 0 \quad (6.13)$$

otrzymujemy, że dla fononów AB mamy [116, 194, 196]

$$\omega_q = \sqrt{v_s^2 q^2 + \lambda q^4} \xrightarrow{q \rightarrow 0} v_s q, \quad (6.14)$$

gdzie

$$v_s = \sqrt{\frac{2A(B-E)}{C^2 + 2A(H-Q)}} \quad (6.15)$$

oraz

$$\lambda = \frac{C^2(B-E) [4A(BH-EQ) + C^2(B+E)]}{[C^2 + 2A(H-Q)]^3}. \quad (6.16)$$

Uzyskana relacja dyspersji ma postać przewidywaną przez teorię Bogoliubowa dla słabo oddziałujących bozonów [1]. Otrzymany parametr v_s ma wymiar prędkości i odpowiada prędkości dźwięku z jaką rozchodzą się fonony AB w nadcieczy. Dla małych pędów ω_q jest liniowa w q . Uzyskane wzbudzenia kolektywne są bezmasowymi modami Goldstone'a związanymi ze spontanicznym łamaniem symetrii $U(1)$.

6.2 Tłumienie Landaua w fazie nadciekłej

W tej części zajmujemy się analizą zespolonego bieguna propagatora fluktuacji parowania. Omówiona powyżej procedura prowadząca do rozwinięcia gradientowego dla $\mathbb{F}_q^{-1}$ zaniedbuje nielokalne wkłady, które są związane z procesem tłumienia Landaua. W celu ich uwzględnienia posłużymy się strategią postępowania, która jest wykorzystywana przy wyprowadzaniu działania Hertza-Millisa-Moriya w kontekście kwantowych przemian fazowych w układach wędrujących elektronów [44, 89, 138, 147, 150]. W tym przypadku nielokalne człony $|q_m|/\gamma_q^a$ pojawiające się w działaniu gausowskim po jego rozwinięciu dla małych wartości $|q|$ oraz $|q_m|/|q|$ są związane z tłumieniem Landaua kolektywnych fluktuacji spinowych przez wzbudzenia fermionowe typu cząstka-dziura [138]. Człon ten jest odpowiedzialny za pojawienie się zespolonego bieguna dla propagatora paramagnonów, przy czym γ_q jest współczynnikiem ich tłumienia [89]. Zauważalne podobieństwo strukturalne pomiędzy podejściem Hertza, a rozważanym przez nas problemem zachęca do wykorzystania tej metody do zbadania tłumienia Landaua modów AB dla spolaryzowanej mieszaniny Fermiego złożonej z cząstek o nierównych masach.

6.2.1 Nielokalne człony w rozwinięciu gradientowym $\mathbb{F}_q^{-1}$

W celu uwzględnienia w rozwinięciu gradientowym $\mathbb{F}_q^{-1}$ członów nielokalnych rzędu $|q_m|/|q|$ rozważamy wyrażenie $M_{11}(\mathbf{q}, iq_m) - M_{11}(\mathbf{q}, 0)$. Korzystając z notacji wprowadzonej w równaniu

^aWarto tu podkreślić, że po wykonaniu przedłużenia analitycznego ($iq_m \mapsto \omega + i0^+$) człon nielokalny w działaniu Hertza ma postać $i|\omega|/\gamma_q$ [44, 89].

(4.30) otrzymujemy

$$M_{11}(\mathbf{q}, iq_m) - M_{11}(\mathbf{q}, 0) = - \int_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma, \sigma'} \mathcal{C}_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}^{\sigma, \sigma'} \frac{f_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}^{\sigma, \sigma'}}{q_m^2 + \left(E_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}^{\sigma, \sigma'}\right)^2} \left(iq_m - \frac{q_m^2}{E_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}^{\sigma, \sigma'}} \right). \quad (6.17)$$

Wiodący wkład zawierający jednocześnie małe częstości oraz pędy, a tym samym nie uwzględniony w rozwinięciu danym równaniem (6.7), pochodzi z drugiego członu w nawiasie w równaniu (6.17) dla elementów w których $\sigma = \sigma'$ i jest dany wyrażeniem

$$- \int_{\mathbf{k}} u_k^2 v_k^2 \sum_{\sigma} f'(E_k^{\sigma}) \frac{q_m^2}{a_{\sigma}^2(|\mathbf{k}|) \cos^2 \theta |\mathbf{q}|^2 + q_m^2}, \quad (6.18)$$

przy czym podobnie jak poprzednio $\cos \theta = \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} / |\mathbf{q}| |\mathbf{k}|$, $f'(x) = -\frac{\beta}{4} \cosh^{-2}(\beta x/2)$, a także $a_{\sigma}(|\mathbf{k}|) = \left(\frac{\zeta}{m} + \sigma \frac{\xi_k}{m E_k}\right) |\mathbf{k}|$. Wszystkie pozostałe wkłady (dla $\Delta > 0$) w rozwinięciu równania (6.17) są wyższego rzędu lub zostały uwzględnione w rozwinięciu danym równaniem (6.7).

W następnym kroku wykonujemy całkowanie po zmiennej kątowej θ rozważając tym samym z osobna przypadek $d = 2$ oraz $d = 3$. Zakładamy, że stosunek $|q_m|/|\mathbf{q}|$ jest mały [89, 150]. Warto zauważyć, że jest to możliwe jedynie wtedy, gdy rozważane mody są bezmasowe [57]. W wyrażeniu (6.18) wykonujemy zamianę zmiennych, $|\mathbf{k}| \mapsto \varepsilon = \mathbf{k}^2/2m \geq 0$, a następnie wykonujemy całkowanie. Prowadzi to do wyrażenia

$$-\frac{|q_m|}{|\mathbf{q}|} \int d\varepsilon c_d D_d(\varepsilon) u_{\varepsilon}^2 v_{\varepsilon}^2 \sum_{\sigma} \frac{f'(E_{\varepsilon}^{\sigma})}{|a_{\sigma}(\varepsilon)|} = \frac{|q_m|}{\gamma_q}, \quad (6.19)$$

gdzie c_d jest równe 1 dla $d = 2$ oraz $\pi/2$ dla $d = 3$. Wprowadziliśmy także gęstość stanów przypadającą na spin $D_d(\varepsilon)$, przy czym $D_2(\varepsilon) = m/2\pi$ oraz $D_3(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2m^3}}{2\pi^2} \varepsilon^{1/2}$. Równanie (6.19) definiuje współczynnik γ_q . Analogiczne postępowanie można zastosować do pozadiagonalnych elementów macierzowych $M_{12}(\mathbf{q}, iq_m)$. W rezultacie otrzymujemy dokładnie takie same wyrażenie jak w równaniu (6.19). W związku z tym rozwinięcie gradientowe dane równaniem (6.7) powinno być uzupełnione o nielokalne wkłady dane równaniem (6.19). Do tej pory nie zostały one zauważone w innych badaniach.

Przyjrzymy się teraz postaci γ_q^{-1} w granicy zerowych temperatur. Korzystając z tego, że $f'(E_{\varepsilon}^{\sigma}) \rightarrow -\delta(-E_{\varepsilon}^{\sigma})$ dla $T \rightarrow 0$ dostajemy

$$\gamma_q^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{q}|} \int d\varepsilon c_d D_d(\varepsilon) u_{\varepsilon}^2 v_{\varepsilon}^2 \sum_{\sigma} \frac{\delta(E_{\varepsilon}^{\sigma})}{|a_{\sigma}(\varepsilon)|}. \quad (6.20)$$

Równanie (6.20) możemy dalej uprościć korzystając z tożsamości

$$\delta[h(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|h'(x_i)|}, \quad (6.21)$$

gdzie x_i są pierwiastkami $h(x)$. Równanie $E_{\varepsilon}^{\sigma} = 0$ posiada dwa rozwiązania, które są jednakowe dla $\sigma = +$ oraz $\sigma = -$. Są one dane równaniem

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\mu - \zeta h \pm \sqrt{(h - \zeta \mu)^2 - \Delta^2(1 - \zeta^2)}}{1 - \zeta^2}. \quad (6.22)$$

Ze względu na to, że $\varepsilon = \mathbf{k}^2/2m$ jest nieujemne wybieramy tylko te pierwiastki, które spełniają warunek $\varepsilon_i \geq 0$. Wykorzystując relację (6.21) i wykonując całkowanie ze względu na ε otrzymujemy, że

$$\gamma_q^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{q}|} \sum_{\substack{i=1,2; \\ \text{gdy } \varepsilon_i \geq 0}} c_d D_d(\varepsilon_i) u_{\ell_i}^2 v_{\ell_i}^2 \sum_{\sigma} L_{\sigma}^{-1}(\varepsilon_i), \quad (6.23)$$

gdzie $\ell_i = \sqrt{2m\varepsilon_i}$ oraz $L_{\sigma}(\varepsilon) = \sqrt{m/2\varepsilon} |a_{\sigma}(\ell)|^2$. Przedyskutujemy teraz implikacje równania (6.23). Po pierwsze można zaobserwować, że $\gamma_q^{-1} \sim u_k^2 v_k^2 = \Delta^2/4E_k^2$. W konsekwencji γ_q^{-1} znika w granicy $\Delta \rightarrow 0$. Ponadto $u_k^2 v_k^2$ przyjmuje maksymalną wartość dla $k = \sqrt{2m\mu}$.

Jak wspomniane zostało wyżej ε_i w równaniu (6.23) musi być nieujemne. Prowadzi to do warunku koniecznego występowania tłumienia Landaua o postaci

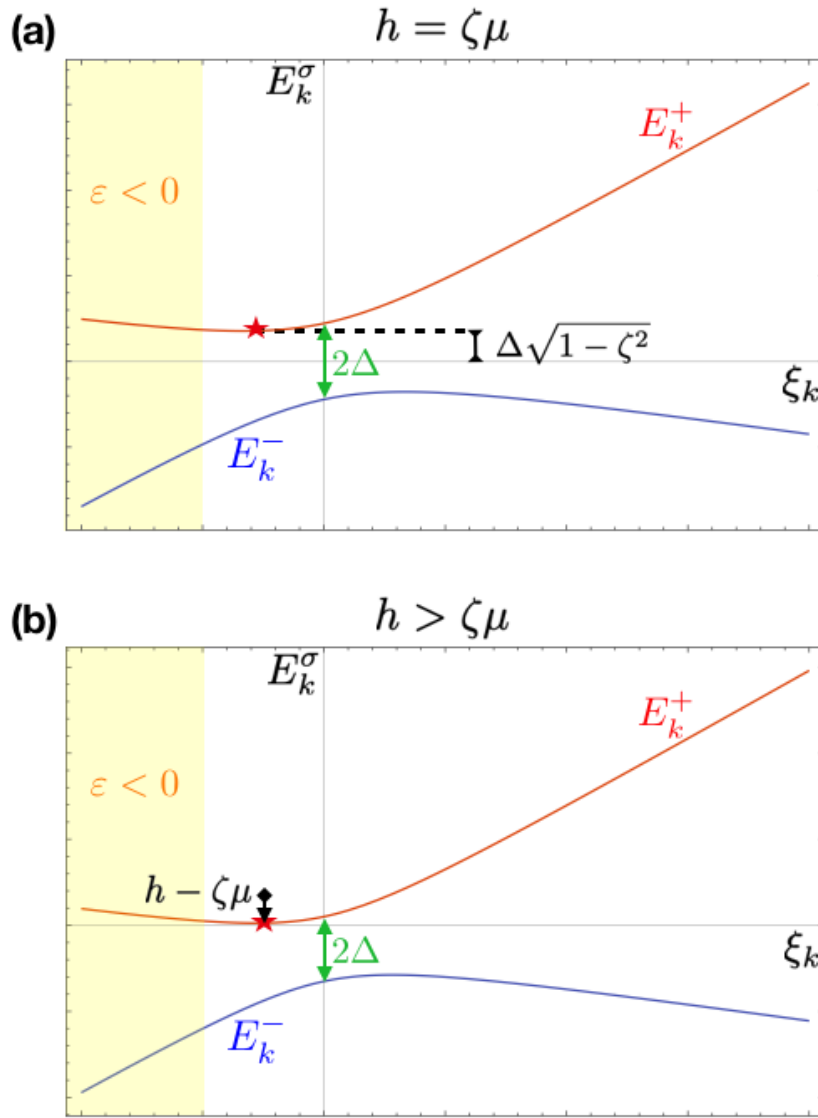
$$|h - \zeta\mu| > \Delta\sqrt{1 - \zeta^2}. \quad (6.24)$$

Gdy spełniony jest powyższy warunek równanie $E_{\varepsilon}^{\sigma} = 0$ posiada dwa rzeczywiste pierwiastki. W szczególności gdy powierzchnie Fermiego składników mieszaniny pokrywają się ($h = \zeta\mu$) widzimy, że $\gamma_q^{-1} = 0$ dla $T = 0$ i w związku z tym mody Goldstone'a nie są tłumione. Jednakże zgodność z warunkiem (6.24) nie gwarantuje, że spełniona jest nierówność $\varepsilon_i \geq 0$. Dla ustalenia uwagi przyjmiemy, że $h - \zeta\mu \geq 0$, a następnie rozważamy $\varepsilon_i \geq 0$, która prowadzi do układu nierówności

$$\begin{cases} h - \zeta\mu \geq \Delta\sqrt{1 - \zeta^2} & \text{dla } \mu \geq \frac{\zeta\Delta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}, \\ h \geq \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} & \text{dla } \mu < \frac{\zeta\Delta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}. \end{cases} \quad (6.25)$$

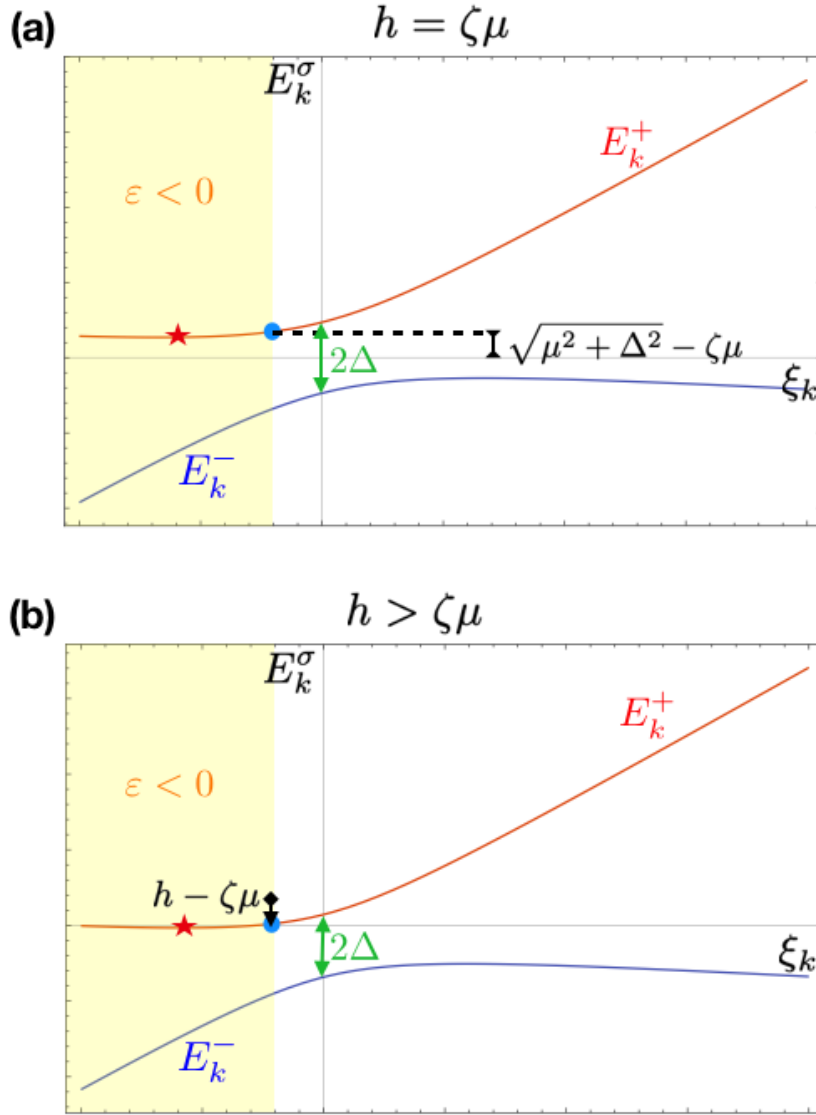
Pierwsza nierówność w powyższym warunku zapewnia istnienie przynajmniej jednego dodatniego zera funkcji E_{ε}^{σ} (patrz rys. 6.1), a druga z nich odpowiada dokładnie jednemu dodatniemu pierwiastkowi równania $E_{\varepsilon}^{\sigma} = 0$ (patrz rys. 6.2).

Zinterpretujemy teraz uzyskane wyniki w kontekście mechanizmu tłumienia Landaua. Zakładamy, że $r \in [1, \infty[$, czyli $\zeta \in [0, 1[$. Widmo wzbudzeń dla kwazicząstek fermionowych posiada dwie gałęzie (patrz równanie (4.14)). Gdy dwie powierzchnie Fermiego składników mieszaniny pokrywają się ($h - \zeta\mu = 0$), wtedy dolna gałąź E_{ε}^{-} jest w pełni obsadzona, a górna E_{ε}^{+} jest pusta [254]. W tym przypadku tłumienie Landaua jest obecne tylko dla niezerowych temperatur, przy czym w granicy $T \rightarrow 0$ zanika ono eksponencjalnie. Fonony Goldstone'a niesprężystość rozpraszają się z termicznie wzbudzonymi kwazicząstkami w górnej gałęzi spektrum. Zwiększanie niezrównoważenia mieszaniny związanego z niedopasowaniem powierzchni Fermiego prowadzi do niezerowego obsadzenia fermionów w gałęzi E_{ε}^{+} także dla $T = 0$. W konsekwencji tłumienie Landaua jest obecne także w zerowej temperaturze. Sytuacja ta została zilustrowana na rys. 6.1 oraz 6.2. Położenie minimum funkcji E_{ε}^{+} jest dane równaniem $\varepsilon_{min} = \mu - \zeta\Delta/\sqrt{1 - \zeta^2}$ i w tym punkcie E_{ε}^{+} jest równa $\Delta\sqrt{1 - \zeta^2}$. Gdy $\varepsilon_{min} \geq 0$, wtedy minimalne niedopasowanie powierzchni Fermiego, które prowadzi do niezerowego obsadzenia górnej gałęzi, jest dane przez $\Delta\sqrt{1 - \zeta^2}$ (patrz rys. 6.1). Gdy $\varepsilon_{min} < 0$, wtedy minimalne niedopasowanie powierzchni Fermiego prowadzące do niezerowego obsadzenia gałęzi E_{ε}^{+} jest dane przez wartość funkcji E_{ε}^{+} dla $\varepsilon = 0$ (patrz rys. 6.2). Przedstawione rozumowanie pozwala na zinterpretowanie warunku (6.25).



Rys. 6.1: Schematyczna ilustracja spektrum dla fermionowych kwazicząstek, $E_k^\sigma = \zeta \xi_k - (h - \zeta\mu) + \sigma E_k$, jako funkcji $\xi_k = \varepsilon - \mu$, gdzie minimum E_k^+ znajduje się w obszarze fizycznym, tj. $\varepsilon \geq 0$. Czerwona gwiazdka wskazuje położenie minimum E_k^+ , a w obszarze zacieniowanym mamy $\varepsilon < 0$. (a) W tym przypadku powierzchnie Fermiego składników mieszaniny pokrywają się ($h = \zeta\mu$). Dolna gałąź widma kwazicząstkowego jest całkowicie obsadzona, podczas gdy górna gałąź jest pusta. W tym przypadku tłumienie Landaua jest związane z niesprężystym rozpraszaniem fononów Goldstone’a na termicznie wzbudzonych kwazicząstkach i staje się ono nieaktywne w granicy $T \rightarrow 0$ z powodu braku dostępnych stanów rozproszeniowych. (b) Niedopasowanie powierzchni Fermiego składników prowadzi do niezerowego obsadzenia górnej gałęzi, gdy spełniony jest warunek $h - \zeta\mu \geq \Delta\sqrt{1 - \zeta^2}$. W tym przypadku proces tłumienia jest obecny także w zerowej temperaturze.

Co więcej widzimy, że w granicy $r \rightarrow \infty$ otrzymany warunek występowania tłumienia jest niezależny od ζ i jest dany przez $h \geq \sqrt{\mu^2 + \Delta^2}$. Natomiast gdy $r = 1$ rozważany warunek przyjmuje postać $h \geq \Delta$, co jest zgodne z wynikami otrzymanymi w pracy [144]. Warto podkreślić, że powyższe wnioski wymagają obecności przerwy związanej z parowaniem, czyli $\Delta > 0$. W dalszej części



Rys. 6.2: Widmo wzbudzeń kwazicząstek fermionowych E_k^σ w funkcji $\xi_k = \epsilon - \mu$, przy czym minimum E_k^+ znajduje się w obszarze niefizycznym ($\epsilon < 0$). Czerwona gwiazdka odpowiada położeniu minimum E_k^+ , niebieska kropka odpowiada $\epsilon = 0$, a w zacięniowanym obszarze $\epsilon < 0$. (a) W tym przypadku powierzchnie Fermiego składników się pokrywają ($h = \zeta\mu$). Górna gałąź widma kwazicząstkowego jest pusta (dolna gałąź jest całkowicie obsadzona) w związku z tym tłumienie Landaua jest możliwe jedynie przy obecności wzbudzeń termicznych od E_k^- do E_k^+ . (b) Niedopasowanie powierzchni Fermiego powoduje, że górna gałąź posiada niezerowe obsadzenie, gdy spełniony jest warunek $h - \zeta\mu \geq \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} - \zeta\mu$. Tłumienie Landaua jest w tym przypadku aktywne także dla $T = 0$.

pokażemy, że nierówność (6.25) jest spełniona dla h istotnie mniejszego od krytycznej wartości h_c w przypadku mieszaniny ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$. Oznacza to, że tłumienie jest obecne w szerokim obszarze diagramu fazowego wewnątrz fazy nadciekłej. Ponadto występowanie tłumienia Landaua jest niezależne od rzędu przemiany fazowej między fazą złamaną i symetryczną.

Na koniec rozważymy proces tłumienia w pobliżu QCP, który zgodnie z wynikami poprzednie-

go rozdziału może być otrzymany dla szerokiego zakresu parametrów układu. Na poziomie MFT w granicy $h \rightarrow h_c^-$ przerwa Δ dąży w sposób ciągły do zera. W otoczeniu QCP warunek $\varepsilon_1 \geq 0$ można rozwinąć dla małej wartości Δ , co prowadzi do

$$h + \mu - \frac{1 + \zeta}{2(h - \zeta\mu)}\Delta^2 + \mathcal{O}(\Delta^4) \geq 0. \quad (6.26)$$

Zgodnie z wynikami z poprzedniego rozdziału powyższy warunek jest zawsze spełniony dla $r > 3.01$ oraz $h > \mu \geq 0$, co odpowiada obszarowi w którym możliwe jest wygenerowanie QCP na diagramie fazowym. Oznacza to, że tłumienie Landaua jest nieuchronnie obecne w pobliżu QCP, gdy kwantowa przemiana fazowa jest ciągła.

6.2.2 Wyniki numeryczne

W tej części zbadamy numerycznie tłumienie modów kolektywnych poprzez przeanalizowanie zespolonego bieguna propagatora fluktuacji parowania. Sprowadza się to do znalezienia zespolonych pierwiastków następującego równania [63, 115, 144]

$$\det \mathbb{F}^{-1}(\mathbf{q}, iq_m \mapsto z_q) = 0, \quad (6.27)$$

gdzie $z_q = \omega_q - i\Gamma_q/2$, ω_q jest relacją dyspersji, a $\Gamma_q < 0$ jest współczynnikiem tłumienia. Γ_q^{-1} jest związana z czasem życia modu kolektywnego. Elementy macierzowe $M_{ij}(\mathbf{q}, z_q)$ posiadają cięcie (ang. *branch cut*) wzdłuż osi rzeczywistej [115]. Spodziewamy się, że biegun opisujący tłumienie Landaua powinien znajdować się w dolnej półpłaszczyźnie zespolonej, bo $\Gamma_q < 0$. Oznacza to, że musimy przedłużyć analitycznie $M_{ij}(\mathbf{q}, z_q)$ z górnej na dolną półpłaszczyznę zespoloną, co skutkuje przejściem do innej powierzchni Riemanna funkcji wieloznacznych jakimi są $M_{ij}(\mathbf{q}, z_q)$. Wykorzystując metodę opisaną przez Nozière’a [157] wprowadzamy wielkość

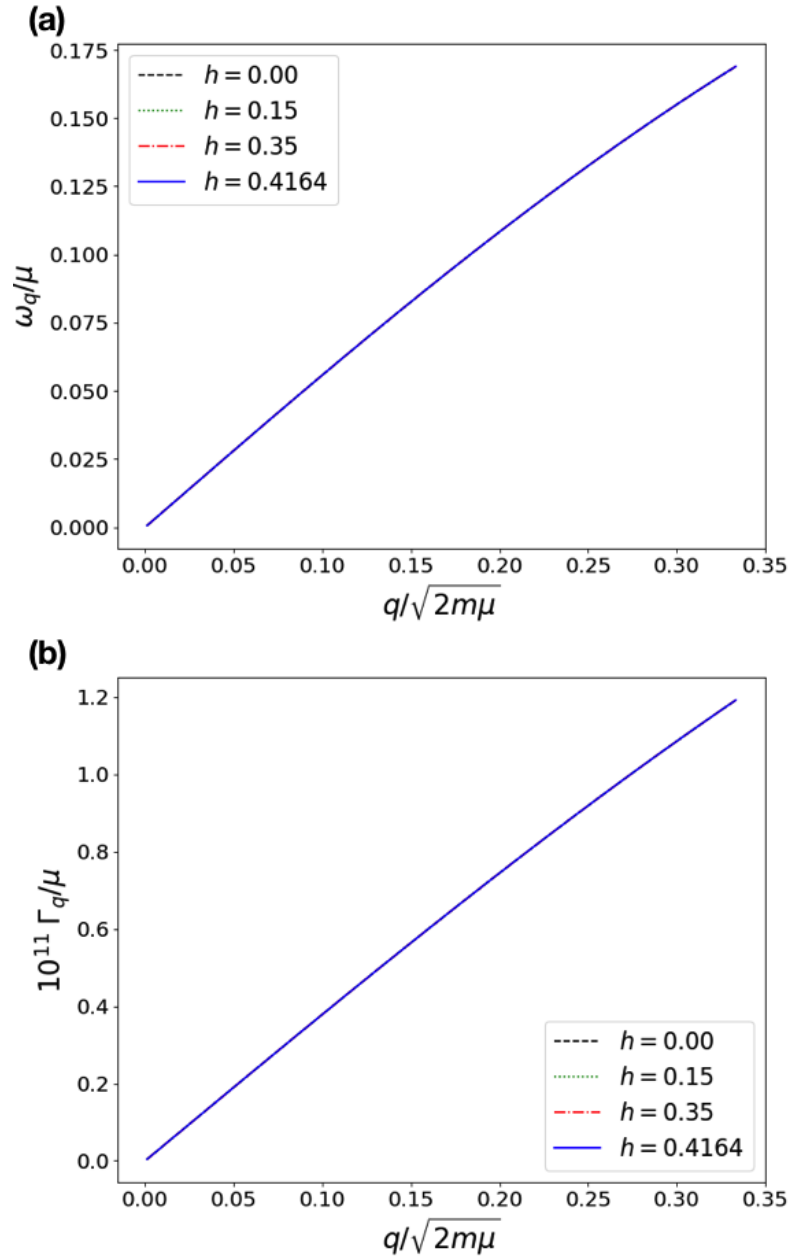
$$A_{ij}(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} M_{ij}^{(R)}(\mathbf{q}, \omega), \quad (6.28)$$

gdzie indeks (R) oznacza, że bierzemy retardowany element macierzowy $M_{ij}(\mathbf{q}, iq \mapsto \omega + i0^+)$. Pozwala ona na znalezienie przedłużenia analitycznego $\tilde{M}_{ij}$ elementu macierzowego M_{ij} do dolnej półpłaszczyzny zespolonej o postaci [115, 144]

$$\tilde{M}_{ij}^{(A)}(\mathbf{q}, \omega) = M_{ij}^{(A)}(\mathbf{q}, \omega) - 2\pi i A_{ij}(\mathbf{q}, \omega), \quad (6.29)$$

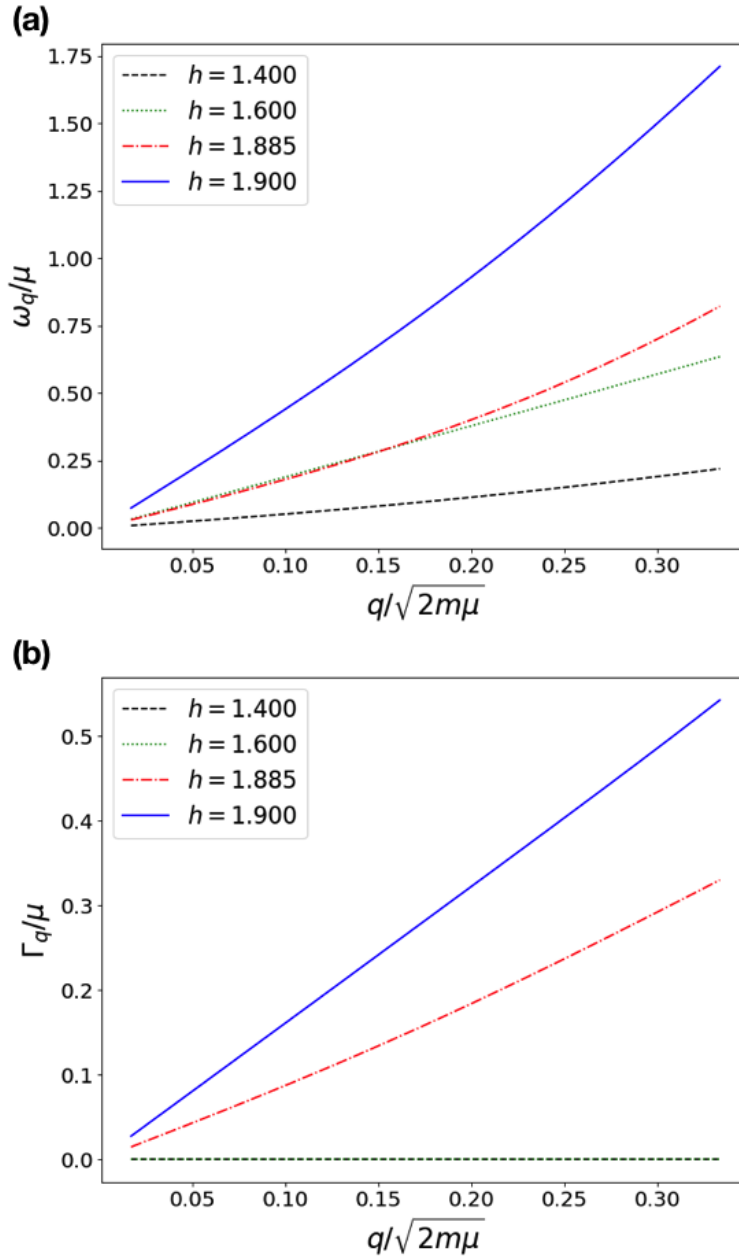
gdzie indeks (A) oznacza, że bierzemy awansowaną część elementu macierzowego, tj. $iq_m \mapsto \omega - i0^+$. $\tilde{M}_{ij}$ otrzymany w powyższej procedurze może być rozszerzony tak, że $\omega \mapsto z = \omega - i\Gamma/2$, gdzie $\Gamma < 0$. Wyjaśnienie tej procedury znajduje się w dodatku B.

Wykorzystując procedurę opisaną powyżej (patrz [115, 144, 157]) przedyskutujemy numerycznie otrzymane relacje dyspersji ω_q oraz współczynniki tłumienia Γ_q dla $r = 1.0$ oraz $r = 6.67$ zmieniając wartości pola Zeemana h w granicy $T \rightarrow 0$. Rozważamy przypadek trójwymiarowy ($d = 3$). Sprawdzamy także *a posteriori* spełnienie warunku $v_s = \lim_{|\mathbf{q}| \rightarrow 0} \omega_q/|\mathbf{q}| < 1$, który odpowiada założeniom przyjętym przy wyprowadzeniu wyrażenia (6.23). Zaczniemy od dyskusji sytuacji zbilansowanej ($r = 1$). Przemiana fazowa pomiędzy fazą normalną, a nadciekłą jest generycznie nieciągła dla



Rys. 6.3: (a) Relacje dyspersji modów Goldstone’a ω_q (w jednostkach μ) jako funkcja pędu q dla $r = 1$ oraz kilku wartości pola h . Dla odpowiednio małych wartości $|q|/\sqrt{2m\mu}$ otrzymujemy, że $\omega_q = v_s|q| + O(|q|^3)$. (b) Analogiczny wykres dla współczynników tłumienia Γ_q (w jednostkach μ). Wszystkie krzywe pokrywają się z powodu słabej zależności przerwy Δ od h . Uzyskane współczynniki tłumienia są zanedbywalnie małe. Parametry wykresu są następujące $m_+ = 1$, $r = 1$, $\mu = 0.5$, $T = 0.005$, $g = -2.0$ oraz $\Lambda = 10$.

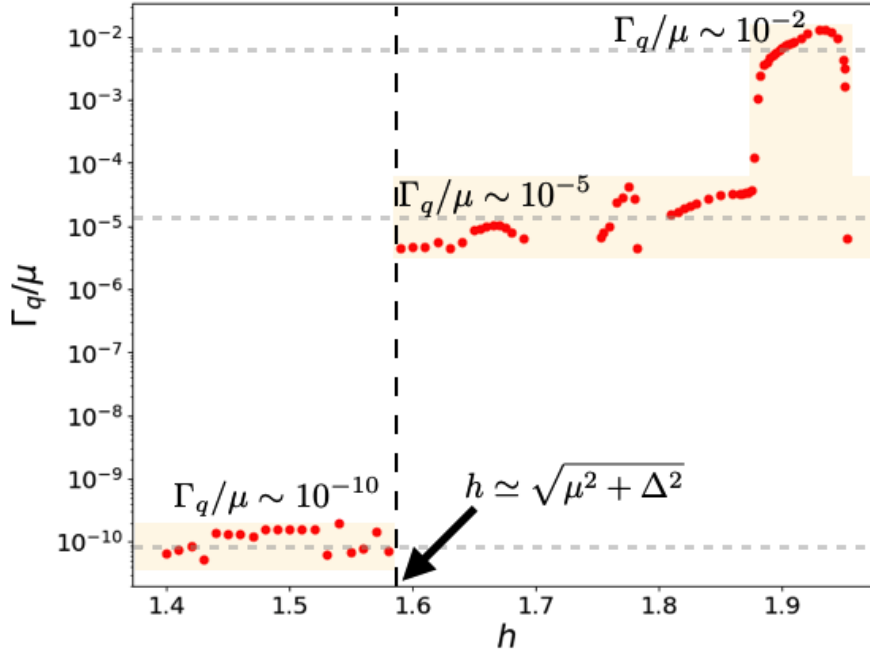
$r < 3.01$ oraz $T \rightarrow 0$ na poziomie pola średniego. Spodziewamy się zatem, że zmiana Δ jako funkcji h powinna być niewielka, aż do pojawienia się przemiany fazowej. W tym przypadku częstotliwości oraz czynniki tłumienia dla modów Goldstone’a jako funkcji pędów $|q|$ zostały zaprezentowane na rys. 6.3. Uzyskane wyniki nie są zależne od wartości h zmieniającej się od 0.0 do 0.4164 dla której następuje nieciągła przemiana fazowa. Powodem tego jest pomijalna zmiana wartości przerwy



Rys. 6.4: (a) Relacje dyspersji ω_q dla modów Goldstone’a (w jednostkach μ) jako funkcję pędu dla $r = 6.67$ oraz kilku wartości h . Dla wystarczająco małych wartości $|q|/\sqrt{2m\mu}$ otrzymujemy, że $\omega_q = v_s|q| + O(|q|^3)$. (b) Analogiczny wykres dla współczynników tłumienia Γ_q (w jednostkach μ). Tłumienie Landaua staje się aktywne powyżej $h \approx 1.59$, która to wartość jest znacząco mniejsza od wartości krytycznej $h_c \approx 1.97$. Parametry wykresu są następujące $m_+ = 1$, $r = 6.67$, $\mu = 0.1$, $T = 0.04$, $g = -1.4$ oraz $\Lambda = 10$.

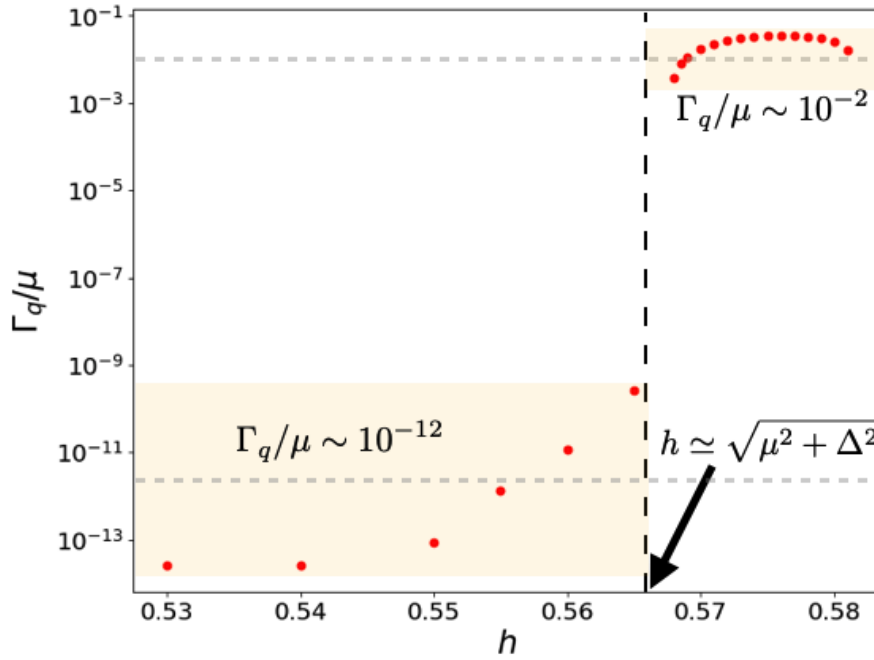
Δ w trakcie zbliżania się do przemiany fazowej. Dla wszystkich h (pokazanych na rys. 6.3) wartość stosunku $T/\Delta < 0.01$ co oznacza, że możemy pominąć fermionowe wzbudzenia termiczne. Dla $r = 1$ ($\zeta = 0$) zawsze spełniona jest relacja $\mu > \zeta\Delta/\sqrt{1-\zeta^2} = 0$, zatem warunek (6.25) przyjmuje w tym przypadku postać $h \geq \Delta$, które nigdy nie jest spełnione w rozważanej sytuacji. Implikuje to, że tłumienie Landaua jest nieobecne w granicy $T \rightarrow 0$ w zgodzie z wynikami otrzymanymi numerycz-

nie z rys. 6.3 (numerycznie otrzymane współczynniki tłumienia w tym przypadku są rzędu 10^{-11}). Otrzymane wyniki są konsystentne z pracami [116, 144].



Rys. 6.5: Współczynniki tłumienia modów Goldstone'a Γ_q (w jednostkach μ i przy wykorzystaniu skali logarytmicznej) jako funkcji pola Zeemana dla $r = 6.67$ oraz $|\mathbf{q}|/\sqrt{2m\mu} = 4.24 \times 10^{-3}$. Tłumienie jest aktywne dla $h \gtrsim \sqrt{\Delta^2 + \mu^2} = 1.59$. Ponadto dla wartości pola h odpowiadających pobliżu przemiany fazowej ($h \in [1.88, 1.95]$) tłumienie staje się znacząco silniejsze. Parametry wykresu są następujące $m_+ = 1$, $r = 6.67$, $\mu = 0.1$, $T = 0.04$, $g = -1.4$ oraz $\Lambda = 10$. Ciągła przemiana fazowa między nadcieczą, a fazą normalną zachodzi dla $h_c = 1.9706$.

Zajmiemy się teraz przypadkiem o nierównych masach ustalając $r = 6.67$, co odpowiada mieszaninie atomów ${}^6\text{Li}$ oraz ${}^{40}\text{K}$ [103, 225, 227, 239]. Dobieramy parametry w taki sposób, aby układ posiadał QCP na diagramie fazowym. Warto zauważyć, że rząd przemiany fazowej nie wpływa na występowanie tłumienia Landaua. W tym przypadku QCP na poziomie MFT jest zlokalizowany dla $h_c = 1.9706$. Relacje dyspersji oraz współczynniki tłumienia fononów Goldstone'a są zaprezentowane na rys. 6.4 dla kilku wartości $h < h_c$. Ze względu na $T/\Delta < 0.04$ dla wszystkich wartości h na rys. 6.4 możemy zaniedbać wzbudzenia termiczne. Okazuje się, że dla wszystkich wartości pola h możemy zastosować kryterium $h \gtrsim \sqrt{\mu^2 + \Delta^2}$, które mówi o występowaniu tłumienia Landaua (patrz równanie (6.25)). Po pierwsze obserwujemy, że dla $h = 1.4$ powyższy warunek nie jest spełniony. Oznacza to, że górna gałąź widma fermionowych kwazicząstek jest nie obsadzona, a tym samym mechanizm tłumienia jest nieaktywny (patrz podrozdział 6.2.1). Pozostaje to w zgodzie z wynikami numerycznymi które pokazują, że współczynnik tłumienia jest w tym przypadku rzędu 10^{-10} . Po drugie dla $h = 1.6$ widzimy, że $h \approx \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} = 1.59$. Otrzymana numerycznie wartość Γ_q/μ jest rzędu 10^{-5} , co jest znaczenie większą wartością od tej otrzymanej dla $h = 1.4$. W pozostałych



Rys. 6.6: Współczynniki tłumienia modów Goldstone’a Γ_q (w jednostkach μ) jako funkcję pola Zeemana dla $r = 3.47$ oraz $|\mathbf{q}|/\sqrt{2m\mu} = 0.0179$. Tłumienie jest aktywne dla $h \gtrsim \sqrt{\Delta^2 + \mu^2} = 0.563$. W tym przypadku na diagramie fazowym występuje przemiana fazowa I rodzaju dla $h_I = 0.59106$. Parametry wykresu są następujące $m_+ = 1$, $r = 3.47$, $\mu = 0.1$, $T = 0.002$, $g = -1.4$ oraz $\Lambda = 10$.

przypadkach rozważany warunek jest także spełniony. W konsekwencji górna gałąź widma kwazicząstkowego jest częściowo obsadzona przez kwazicząstki także dla $T \rightarrow 0$. W związku z tym mody Goldstone’a mogą zostać zaabsorbowane przez wzbudzenia fermionowe i tłumienie Landaua jest obecne. Jak widzimy na rys. 6.4 przewidywanie to jest zgodne z wynikami numerycznymi. Co więcej zależność Γ_q/μ od h jest pokazana na rys. 6.5 dla $|\mathbf{q}|/\sqrt{2m\mu} = 4.24 \times 10^{-3}$. Widzimy, że aktywowanie tłumienia Landaua zachodzi dokładnie dla przewidywanej przez wzór $h \gtrsim \sqrt{\Delta^2 + \mu^2} = 1.59$ wartości h .

Zaprezentowane wyżej wyniki odpowiadają sytuacji w której przemiana fazowa między fazą nadciekłą, a normalną jest ciągła w granicy $T \rightarrow 0$. Uzyskane wnioski są jednak niezależne od rodzaju zachodzącej przemiany. Zademonstrujemy to bezpośrednio dobierając parametry w taki sposób, aby rozważana przemiana fazowa była I rodzaju w niskich temperaturach. Przyjmujemy $r = 3.47$, $\mu = 0.1$ oraz $g = -1.4$. W tym przypadku kwantowa przemiana fazowa I rodzaju zachodzi dla $h_I = 0.59106$ (na poziomie MFT). Numerycznie otrzymana zależność Γ_q/μ od h została zaprezentowana na rys. 6.6 dla $|\mathbf{q}|/\sqrt{2m\mu} = 0.0179$. Zgodnie z warunkiem otrzymanym w poprzednim podrozdziale spodziewamy się, że tłumienie Landaua powinno pojawić się dla $h \gtrsim \sqrt{\Delta^2 + \mu^2} = 0.563$, co bardzo dobrze zgadza się z danymi numerycznymi z rys. 6.6.

6.3 Tłumienie Landaua w fazie normalnej

Zbadamy teraz urojoną część odwrotnego propagatora fluktuacji parowania w fazie normalnej $\text{Im}F_{0,ret.}^{-1}(\mathbf{q}, \omega)$ dla $T = 0$ (patrz równanie (5.37)). Ilekroć $\text{Im}F_{0,ret.}^{-1} \neq 0$ propagator $F_{0,ret.}$ posiada zespolony biegun, który prowadzi do poszerzenia piku odpowiadającemu modowi kolektywnemu w funkcji spektralnej $A_0(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im}F_{0,ret.}(\mathbf{q}, \omega)$ [2, 109]. W rezultacie obecny jest w układzie proces tłumienie Landaua który powoduje, że czas życia modów kolektywnych staje się skończony.

Rozważamy granicę $T \rightarrow 0$ w równaniu (5.37) i wprowadzamy $u = |\mathbf{k}|^2 > 0$. Zakładamy przy tym, że znajdujemy się w obszarze (B) z rys. 5.7 w którym znajduje się faza normalna przylegająca do QCP. Całkowanie po kątach prowadzi do

$$\begin{aligned} \text{Im}F_{0,ret.}^{-1}(\mathbf{q}, \omega) &= -\frac{m_+}{8\pi|\mathbf{q}|} \int_0^\infty du [1 - \theta(-\xi_u^-) - \theta(\xi_u^- - \omega)] \times \\ &\quad \times \theta\left(1 - \frac{m_+^2}{u|\mathbf{q}|^2} \left\{\omega - \frac{u}{m} + 2\mu - \frac{\mathbf{q}^2}{2m_+}\right\}^2\right) = \\ &= -\frac{m_+}{8\pi|\mathbf{q}|} \int_0^{\lambda_\omega} du \theta\left(1 - \frac{m_+^2}{u|\mathbf{q}|^2} \left\{\omega - \frac{u}{m} + 2\mu - \frac{\mathbf{q}^2}{2m_+}\right\}^2\right), \end{aligned} \quad (6.30)$$

gdzie $\lambda_\omega = 2m_+r(\mu - h + \omega)$. W powyższym wyrażeniu widzimy, że $\text{Im}F_{0,ret.}^{-1}(\mathbf{q}, \omega)$ może być niezerowe jedynie, gdy $\omega > h - \mu$. Zatem dla wartości $h = h_c > \mu$, gdzie zachodzi przemiana fazowa, tłumienie jest nieobecne dla niskich energii w fazie normalnej.

Wyrażenie podcałkowe w równaniu (6.30) jest równe jedności w przedziale $[u_-, u_+]$ oraz zeru w przeciwnym przypadku. Tylko $u_\pm > 0$ są fizycznie istotne. Wartości te mają postać

$$u_\pm = \frac{m^2}{2} \left[\left(A + \frac{2B}{m}\right) \pm \sqrt{\left(A + \frac{2B}{m}\right)^2 - \left(\frac{2B}{m}\right)^2} \right], \quad (6.31)$$

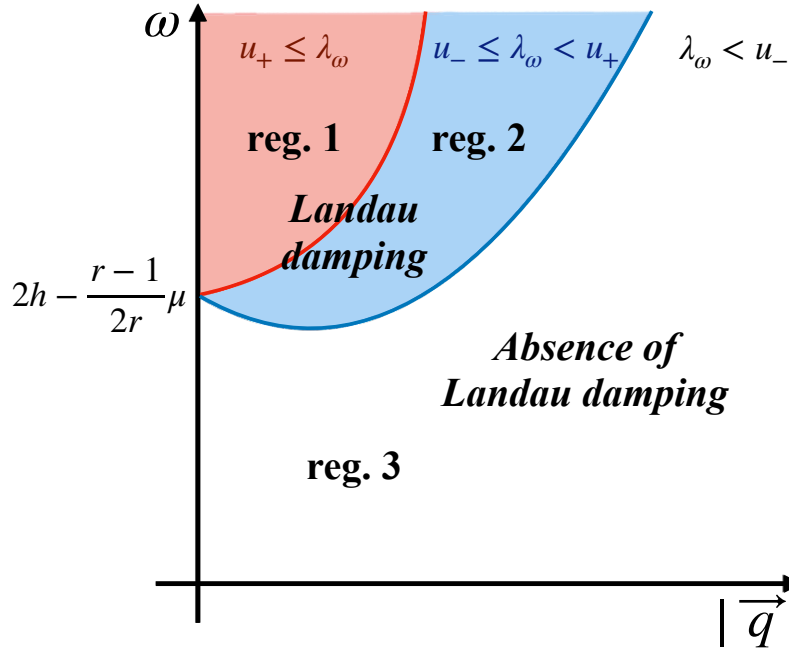
gdzie $A = \left(\frac{|\mathbf{q}|}{m_+}\right)^2$ oraz $B = \omega + 2\mu - \frac{\mathbf{q}^2}{2m_+}$. Powyższe wyrażenie jest rzeczywiste, gdy $\omega \geq \frac{1}{r+1} \frac{\mathbf{q}^2}{2m_+} - 2\mu$. Oznacza to, że $\text{Im}F_{0,ret.}^{-1}(\mathbf{q}, \omega) \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[u_-, u_+] \cap [0, \lambda_\omega] \neq \emptyset$, co dzieli płaszczyznę $(|\mathbf{q}|, \omega)$ na trzy różne obszary.

Pierwszy z obszarów (reg. 1) jest zdefiniowany przez $u_+ \leq \lambda_\omega$. Tutaj tłumienie Landaua jest obecne, a $\text{Im}F_{0,ret.}^{-1}$ ma postać

$$\text{Im}F_{0,ret.}^{-1}[(\mathbf{q}, \omega) \in \text{reg. 1}] = -\frac{m^{3/2}}{4\pi} \sqrt{\omega + 2\mu - \frac{1}{r+1} \frac{\mathbf{q}^2}{2m_+}}. \quad (6.32)$$

Analogicznie drugi reżim (reg. 2) jest otrzymany z warunku $u_- \leq \lambda_\omega < u_+$. W tym przypadku tłumienie jest także aktywne, ale postać $\text{Im}F_{0,ret.}^{-1}$ jest inna i wynosi

$$\begin{aligned} \text{Im}F_{0,ret.}^{-1}[(\mathbf{q}, \omega) \in \text{reg. 2}] &= -\frac{m_+}{8\pi|\mathbf{q}|} \left[2m_+r(\mu - h + \omega) - m \left\{ \zeta \frac{\mathbf{q}^2}{2m_+} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \omega + 2\mu - \frac{|\mathbf{q}|}{m_+} \sqrt{m \left(\omega + 2\mu - \frac{1}{r+1} \frac{\mathbf{q}^2}{2m_+} \right)} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (6.33)$$



Rys. 6.7: Schematyczna ilustracja diagramu $(|\mathbf{q}|, \omega)$ dla $T = 0$ pokazująca różne obszary dla których tłumienie Landaua jest aktywne lub nieobecne w fazie normalnej.

Ostatni obszar (reg. 3) pojawia się, gdy $\lambda_\omega < u_-$. Tutaj $\text{Im}F_{0,ret.}^{-1}[(\mathbf{q}, \omega) \in \text{reg. 3}] = 0$ i w związku z tym tłumienie Landaua jest nieobecne. Uzyskane wyniki zostały schematycznie przedstawione na rys. 6.7.

Uzyskane wyniki posiadają przejrzystą interpretację fizyczną. Zidentyfikowaliśmy dwa warunki: (a) $\omega > h - \mu$ oraz (b) $\omega \geq \frac{1}{r+1} \frac{q^2}{2m_+} - 2\mu$. Naruszenie któregoś z nich implikuje, że $\text{Im}F_{0,ret.}^{-1} = 0$. Kwantowa przemiana fazowa zachodzi pomiędzy gazem całkowicie spolaryzowanym, a nadciężą. Oznacza to, że cząstki o pseudospinie " $\downarrow$ " są nieobecne w fazie normalnej dla $T = 0$, zatem $\mu_- < 0$ dla $h > h_c > \mu$. Możemy przeformułować warunek (a) jako $\omega > |\mu_-| > 0$, co oznacza, że tłumienie może wystąpić tylko wtedy, gdy energia jest wystarczająco duża, aby wprowadzić do układu cząstkę o pseudospinie " $\downarrow$ ". Z drugiej strony możemy przeformułować warunek (b) jako $\omega \geq \xi_{pair}(\mathbf{q}) = \frac{q^2}{2m_{pair}} - \mu_{pair}$, gdzie $m_{pair} = m_+ + m_- = m_+(1 + r)$ jest masą pary stworzonej z cząstek o pseudospinach " $\uparrow$ " oraz " $\downarrow$ ", a także $\mu_{pair} = \mu_+ + \mu_- = 2\mu$ jest potencjałem chemicznym tej pary. Oznacza to, że tłumienie Landaua może być aktywne tylko wtedy, gdy wzbudzenie pary unoszącej pęd $\mathbf{q}$ jest możliwe.

Warunki (a) i (b) nie uwzględniają zachowania momentu pędu, który prowadzi do dalszych ograniczeń obszaru dla którego $\text{Im}F_{0,ret.}^{-1} \neq 0$. W szczególności funkcja schodkowa w równaniu (6.30) zadaje wartości ω oraz $\mathbf{q}$, które są konsystentne z możliwymi kierunkami pędu danymi przez $\cos \theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}/|\mathbf{k}||\mathbf{q}| \in [-1, 1]$ i powoduje to dalsze zmniejszenie obszaru dla którego tłumienie jest aktywne.

Zawracamy uwagę, że $\text{Im}F_{0,ret.}^{-1}(\mathbf{q}, \omega)$ jest niedodatnią funkcją w obu obszarach w których tłumienie jest aktywne. Zapewnia to, że funkcja spektralna $A_0(\mathbf{q}, \omega)$ jest nieujemna dla wszystkich

wartości ω oraz $|\mathbf{q}|$.

Co więcej dla małych wartości $|\mathbf{q}|$ tłumienie pojawia się dla $\omega > 2h - \frac{r-1}{2r}\mu > 0$, ponieważ $h_c > \mu$. Z tego powodu w pobliżu kwantowej przemiany fazowej po stronie fazy normalnej człony tłumienia nie pojawiają się w rozwinięciu gradientowych dla małych pędów oraz częstości. Sytuacja ta jest całkowicie inna w porównaniu do przypadku wewnątrz fazy uporządkowanej opisanego w poprzednim podrozdziale.

Rozdział 7

Teoria renormalizacji dla mieszanin Fermiego

Ostatnim zagadnieniem dyskutowanym w tej dysertacji jest wpływ fluktuacji parametru porządku na naturę kwantowej przemiany fazowej między jednorodną fazą nadciekłą, a fazą normalną. Skupimy się przy tym na sytuacji w której na poziomie MFT przemiana fazowa jest ciągła w $T = 0$ i nie jest przemianą multikrytyczną. Do tego celu wykorzystamy nieperturbacyjne sformułowanie teorii grupy renormalizacji (RG) zaproponowane przez Wettericha w 1993 roku [21, 53, 237].

W kilku przypadkach w fizyce materii skondensowanej fluktuacje parametru porządku powodują, że kwantowa przemiana fazowa staje się nieciągła [20, 138]. Taka sytuacja ma miejsce na przykład w ferromagnetykach [19] oraz nadprzewodnikach [27, 88, 131]. Posługując się renormalizacją efektywnego potencjału zbadamy czy tego typu niestabilność QCP ze względu na fluktuacje występuje w przypadku niezrównoważonych mieszanin Fermiego. Na tym etapie zaniedbujemy występowanie tłumienia Landaua. Przeprowadzona analiza wykazuje, że QCP zidentyfikowany w ramach przybliżenia pola średniego dla $d = 3$ jest odporny na wpływ fluktuacji i nie obserwuje się niestabilności w kierunku przemiany I rodzaju.

Ogólne podejście pozwalające na opisanie kwantowej krytyczności w układach fermionowych wykorzystuje teorię Hertza-Millisa [89, 147]. W podejściu tym informacje o badanym układzie jest zawarta w efektywnym działaniu, które odpowiada kolektywnym modom bozonowym (patrz rozdział 2). Oddziaływanie pomiędzy modami kolektywnymi pola porządku, a kwazicząstkowymi wzbudzeniami fermionowymi wzdłuż powierzchni Fermiego jest uwzględnione poprzez nielocalne człony odpowiadające tłumieniu Landaua, które pojawiają się w odwrotnym propagatorze fluktuacji parowania $\mathbb{F}_q^{-1}$. Występowanie tłumienia Landaua (bądź jego brak), a także jego dokładna postać, ma istotny wpływ na zachowanie układu w kwantowym reżimie krytycznym. W szczególności decyduje ono o wartości dynamicznego wykładnika krytycznego z , który jest istotny w opisie wielu wielkości termodynamicznych oraz własności transportu. Jak pokazaliśmy w poprzednim rozdziale tłumienie Landaua jest zawsze obecne w fazie uporządkowanej w pobliżu nadciekłej przemiany fazowej w $T = 0$, która jest wywoływana przez niezrównoważenie badanej mieszaniny fermionowej. Poza tym w fazie normalnej tłumienie jest nieaktywne. Powoduje to, że badana sytuacja znaczą-

co różni się od tej występującej w kontekście magnetycznych kwantowych punktów krytycznych i w konsekwencji teorię renormalizacji należy formułować w fazie uporządkowanej dla niezerowo-ważonych mieszanin Fermiego [108]. Zbadamy ten problem wykorzystując nieperturbacyjną RG. Nasze wyniki, opierające się na bardzo prostym obcięciu równań płynięcia dla funkcjonalnej RG, odtwarzają spodziewane zachowanie układu przy braku tłumienia Landaua. Jednakże dla odpowiednio niskich temperatur obecność tłumienia o postaci wyprowadzonej z mikroskopowego modelu powoduje destabilizację płynięcia stałych sprzężenia w kierunku punktu stałego Wilsona-Fishera, co przejawia się tym, że nie jest osiągany asymptotyczny reżim skalowania. Zachowanie to może wskazywać na występowanie kwantowej przemiany fazowej I rodzaju, która jest wywoływana przez występowanie tłumienia Landaua. Omawiana sytuacja stanowi całkowicie inny mechanizm pojawiania się przemiany I rodzaju wywoływanej przez fluktuacje parametru porządku w porównaniu do dobrze zbadanego przypadku ferromagnetycznych kwantowych przemian fazowych [20]. Wyniki prezentowane w tym rozdziale zostały opublikowane w artykułach [248, 250].

Struktura tego rozdziału jest następująca:

Podrozdział 7.1. Zaczniemy od krótkiego wprowadzenia do nieperturbacyjnej teorii renormalizacji. Wyprowadzimy równanie Wettericha i przedyskutujemy jego najważniejsze cechy.

Podrozdział 7.2. Następnie posługując się dotychczas zaprezentowanymi w tej rozprawie wynikami przedstawimy wygodną parametryzację efektywnego działania rozkładając pole porządku ϕ_q na składową podłużną σ_q oraz poprzeczną π_q . Pokażemy, że tłumienie Landaua ma wpływ tylko na składową σ_q .

Podrozdział 7.3. W kolejnym podrozdziale zaniedbamy wpływ tłumienia Landaua i wyprowadzimy równanie płynięcia efektywnego potencjału. Na jego podstawie zbadamy stabilność QCP w $d = 3$ ze względu na fluktuacje parametru porządku i pokażemy, że układ nie wykazuje niestabilności w kierunku kwantowej przemiany I rodzaju.

Podrozdział 7.4. Na koniec przedyskutujemy efekt destabilizacji płynięcia stałych sprzężenia w kierunku punktu stałego Wilsona-Fishera dla odpowiednio niskich temperatur ($T > 0$) wywołanego występowaniem tłumienia Landaua.

7.1 Równanie Wettericha

Idea stojąca za RG Wilsona opiera się na dwóch krokach: decymacji oraz przeskalowaniu. W pierwszym z nich dokonujemy eliminacji krótkozasięgowych (szybkich) modów $\varphi^>$ co powoduje, że układ jest efektywnie opisywany przez działanie dla modów wolnych $\varphi^<$. W następnym kroku przeskalowujemy pola oraz stałe sprzężenia w taki sposób, aby otrzymane działanie miało taką samą postać jak to sprzed wykonania decymacji modów. Procedura ta pozwala mapować wyjściowe stałe $\mathbf{g}^{(0)} = [g_1^{(0)}, g_2^{(0)}, g_3^{(0)}, \dots]$ charakteryzujące układ na zmodyfikowany zestaw stałych sprzężenia $\mathbf{g}^{(1)} = \mathcal{R}(b; \mathbf{g}^{(0)}) = [g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, g_3^{(1)}, \dots]$, które pojawiają się w przeskalowanym działaniu po decymacji. Funkcja $\mathcal{R}(b; \mathbf{g})$ reprezentuje transformację RG i jest postacią zależną od czynnika skalującego b związanego z przeskalowaniem pędów $\mathbf{k}' = b\mathbf{k}$. Transformację tą możemy wykonać wielokrotnie,

przy czym $\mathbf{g}^{(n)} = \mathcal{R}(b; \mathbf{g}^{(n-1)}) = \mathcal{R}(b; \mathcal{R}(b; \mathbf{g}^{(n-2)})) = \dots = \mathcal{R}(b^n; \mathbf{g}^{(0)})$ i charakteryzuje ona płynięcie stałych sprzężenia przy n -krotnym przeskalowaniu układu. W granicy $n \rightarrow \infty$ "odcałkowujemy" wszystkie mody i tym samym uzyskane w trakcie tej procedury efektywne działanie staje się dokładną gęstością energii swobodnej badanego układu, która uwzględnia w pełni fluktuacje [120]. W praktyce procedury tej zazwyczaj nie da się przeprowadzić bez wykonania pewnych przybliżeń, a także wspomniane kroki możemy wdrożyć na różne sposoby. Celem tego rozdziału będzie wyrowadzenia funkcjonalnego równania różniczkowego charakteryzującego płynięcie nieperturbacyjnej RG, które stanowi wygodną implementację powyższych idei przy wykorzystaniu procedury zaproponowanej przez Wettericha [21, 53, 237].

7.1.1 Efektywne działanie Γ_k zależne od skali k

Zacniemy od skonstruowania jednoparametrowej rodziny układów modelowych scharakteryzowanych efektywnym działaniem $\Gamma_k[\phi]$, które jest indeksowane przy pomocy skali k . Oczekujemy, że gdy $k = \Lambda$, wtedy fluktuacje nie zostały jeszcze odcałkowane i w związku z tym $\Gamma_{k=\Lambda}[\phi] = \mathcal{S}[\phi]$, gdzie $\mathcal{S}$ jest mikroskopowym działaniem, a Λ jest mikroskopowym obciążeniem nadfioletowym dla pędów. Z kolei gdy $k = 0$, wtedy wszystkie mody zostały odcałkowane i tym samym $\Gamma_{k=0}[\phi] = \mathcal{G}[\phi]$, gdzie $\mathcal{G}$ jest termodynamiczną energią swobodną Gibbsa [53]. W powyższych relacjach $\phi = \langle \varphi \rangle$ jest N -komponentowym parametrem porządku, który otrzymuje się w wyniku uśredniania pola porządku φ . Suma statystyczna układu ma w tym przypadku postać

$$Z[\mathbf{J}] = \int \mathcal{D}[\varphi] e^{-\mathcal{S}[\varphi] + \int_{\mathbf{r}} \mathbf{J} \cdot \varphi}, \quad (7.1)$$

gdzie $\mathbf{J}$ jest zewnętrznym polem źródłowym, które sprzęga się z polem porządku, a działanie $\mathcal{S}[\varphi]$ wykazuje symetrię $O(N)$. Ponadto $\mathcal{F}[\mathbf{J}] = -T \ln Z[\mathbf{J}]$ jest energią swobodną Helmholtza. Za pomocy powyższej relacji można obliczyć dwupunktowe funkcje korelacji

$$G_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle \varphi_i(\mathbf{r}) \varphi_j(\mathbf{r}') \rangle - \langle \varphi_i(\mathbf{r}) \rangle \langle \varphi_j(\mathbf{r}') \rangle = \frac{\delta^2 \ln Z[\mathbf{J}]}{\delta J_i(\mathbf{r}) \delta J_j(\mathbf{r}')} \Big|_{\mathbf{J}=0}. \quad (7.2)$$

Zależność od skali k w sumie statystycznej możemy wprowadzić dodając do działania $\mathcal{S}[\varphi]$ człon będący formą kwadratową pola porządku o postaci [53, 60]

$$\Delta \mathcal{S}_k[\varphi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{q}} \varphi^T(-\mathbf{q}) \mathbb{R}_k(\mathbf{q}) \varphi(\mathbf{q}), \quad (7.3)$$

gdzie macierz $\mathbb{R}_k(\mathbf{q}) = \text{diag} [R_k^1(\mathbf{q}), R_k^2(\mathbf{q}), \dots, R_k^N(\mathbf{q})]$, a $R_k^i(\mathbf{q})$ jest tzw. regulatorem dla i -tej składowej pola φ . Postać funkcji $R_k^i(\mathbf{q})$ dobieramy w taki sposób, aby powodowała nadanie modom wolnym $\varphi_i^<$ dużej masy (tj. ich fluktuacje termiczne stają się małe) i w związku z tym ulegają one rozprężnięciu w sumie statystycznej. Wprowadzenie członu $\Delta \mathcal{S}_k[\varphi]$ do działania w $Z_k[\mathbf{J}]$ stanowi praktyczne wdrożenie idei decymacji modów wspomnianej na początku tego podrozdziału.

Korzystając ze (zmodyfikowanej) transformacji Legendre'a możemy zdefiniować efektywne działanie $\Gamma_k[\phi]$ zależne od skali k jako [53, 60]

$$\Gamma_k[\phi] = -\ln Z_k[\mathbf{J}] + \int_{\mathbf{r}} \mathbf{J} \cdot \phi - \Delta \mathcal{S}_k[\phi]. \quad (7.4)$$

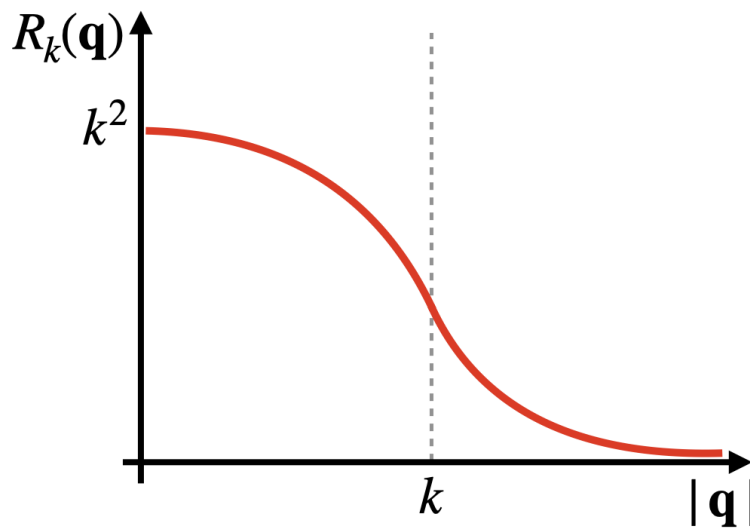
W powyższym wyrażeniu odejmujemy wyraz $\Delta S_k[\phi]$, aby w granicy $k \rightarrow \Lambda$ powyższe wyrażenie sprowadzało się do mikroskopowego działania $\mathcal{S}$ jak to było antycypowane wcześniej. Płynięcie efektywnego działania $\partial_k \Gamma_k[\phi]$ zawiera w sobie pełną informację o transformacji RG i jego wyprowadzeniem zajmujemy się w dalszej części. Wykorzystując działanie $\Gamma_k[\phi]$ możemy opisać własności termodynamiczne układu poprzez jego ewaluację na jednorodnej konfiguracji pola ϕ_{uni} , która prowadzi do efektywnego potencjału [53, 60]

$$U_k(\rho) = \frac{1}{V} \Gamma_k[\phi] \Big|_{\phi=\phi_{uni}}, \quad (7.5)$$

gdzie V to objętość układu, a $\rho = \phi^2$. Efektywny potencjał $U_k(\rho)$ może posiadać minimum dla $\rho_{0,k} \neq 0$, co wskazuje na spontaniczne łamanie symetrii $O(N)$.

7.1.2 Własności regulatora $R_k(q)$

Jak wspomnieliśmy wcześniej regulator $R_k(q)$ wybieramy tak, aby Γ_k w gładki sposób interpolowała pomiędzy mikroskopowym działaniem $\mathcal{S}$ dla $k \rightarrow \Lambda$, a potencjałem Gibbsa $\mathcal{G}$ dla rozważanego układu w granicy $k \rightarrow 0$. Oznacza to, że dla $k = \Lambda$ regulator przyjmuje postać $R_\Lambda(q) = \infty$ i tym samym fluktuacje pola ϕ są "zamrożone". Natomiast gdy $k = 0$ otrzymujemy, że $R_0(q) = 0$ i tym samym fluktuacje na wszystkich skalach są uwzględniane [53]. Dla $k \in]0, \Lambda[$ chcemy, aby funkcja $R_k(q)$ tłumila fluktuacje poniżej skali k , a pozostawiała bez zmian mody powyżej tej skali. Typowo regulator ma postać $R_k(q) = q^2 f(q^2/k^2)$, przy czym funkcja $f(x)$ zachowuje się jak $\sim 1/x$ w granicy $x \rightarrow 0$ oraz $f(x) \ll 1$, gdy $x \gg 1$ [60]. Przykładowy wykres funkcji $R_k(q)$ spełniającej te warunki jest przedstawiony na rys. 7.1.



Rys. 7.1: Typowy kształt regulatora $R_k(q)$. Mody poniżej skali k posiadają dużą masę i ulegają "zamrożeniu" w sumie statystycznej. Natomiast fluktuacje powyżej skali k mają niewielką masę i ulegają odcałkowaniu w $\Gamma_k[\phi]$.

Jednym z popularnych wyborów funkcji $R_k(\mathbf{q})$ jest tzw. regulator Litima [133] o postaci

$$R_k(\mathbf{q}) = \alpha(k^2 - \mathbf{q}^2)\theta(k^2 - \mathbf{q}^2), \quad (7.6)$$

gdzie α to pewna stała. Jego zaletą jest to, że pozwala na analityczne obliczenie całek pojawiających się w równaniach płynięcia. Inną wygodną postacią $R_k(\mathbf{q})$ jest regulator eksponencjalny o postaci [120]

$$R_k(\mathbf{q}) = \frac{\alpha \mathbf{q}^2}{e^{\mathbf{q}^2/k^2} - 1}. \quad (7.7)$$

Z powodu analityczności powyższej funkcji jest to lepszy wybór w przypadku numerycznego rozwiązywania równań płynięcia.

7.1.3 Ścisłe równanie płynięcia

Zacniemy od znalezienia płynięcia funkcjonału generującego dla "spójnych" funkcji korelacji (ang. *connected correlation functions*) $W_k[\mathbf{J}] = \ln Z_k[\mathbf{J}]$ wraz ze skalą k . Otrzymujemy, że [53]

$$\begin{aligned} \partial_t Z_k[\mathbf{J}] &= -\frac{1}{2} \int \mathcal{D}[\boldsymbol{\varphi}] \left(\int_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{r}) \partial_t \mathbb{R}_k(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}') \right) e^{-S[\boldsymbol{\varphi}] - \Delta S_k[\boldsymbol{\varphi}] + \int_{\mathbf{r}} \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\varphi}} = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\int_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \sum_{i=1}^N \partial_t R_k^i(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\delta}{\delta J_i(\mathbf{r})} \frac{\delta}{\delta J_i(\mathbf{r}')} \right) Z_k[\mathbf{J}], \end{aligned} \quad (7.8)$$

gdzie $t = \ln(k/\Lambda) = -s \in]-\infty, 0]$ jest tzw. (ujemnym) "czasem RG", czyli $\partial_t X = k \partial_k X$. Powyższe równanie pozwala na znalezienie płynięcia funkcjonału $W_k[\mathbf{J}]$ [60]:

$$\partial_t W_k[\mathbf{J}] \Big|_{\mathbf{J}} = -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \sum_{i=1}^N \partial_t R_k^i(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{J}} \left(\frac{\delta^2 W_k[\mathbf{J}]}{\delta J_i(\mathbf{r}) \delta J_i(\mathbf{r}')} + \frac{\delta W_k[\mathbf{J}]}{\delta J_i(\mathbf{r})} \frac{\delta W_k[\mathbf{J}]}{\delta J_i(\mathbf{r}')} \right). \quad (7.9)$$

Przejdziemy teraz do wyprowadzenia równania płynięcia dla efektywnego działania $\Gamma_k[\boldsymbol{\phi}]$, które jest dane wyrażeniem

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k[\boldsymbol{\phi}] \Big|_{\boldsymbol{\phi}} &= \partial_t \left(-W_k[\mathbf{J}] + \int_{\mathbf{r}} \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\phi} - \Delta S_k[\boldsymbol{\phi}] \right) \Big|_{\boldsymbol{\phi}} = \\ &= -\partial_t W_k[\mathbf{J}] \Big|_{\boldsymbol{\phi}} + \int_{\mathbf{r}} \partial_t \mathbf{J}(\mathbf{r}) \Big|_{\boldsymbol{\phi}} \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{r}) \partial_t \mathbb{R}_k(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}') \Big|_{\boldsymbol{\phi}}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

W powyższym równaniu skorzystano z tego, że $\mathbf{J} \equiv \mathbf{J}_k[\boldsymbol{\phi}]$ jest zależne od skali k , przy czym $\boldsymbol{\phi}_k[\mathbf{r}, \mathbf{J}] = \delta W_k[\mathbf{J}] / \delta \mathbf{J}(\mathbf{r})$ oraz $\mathbf{J}_k[\mathbf{r}, \boldsymbol{\phi}] = \delta \Gamma_k[\boldsymbol{\phi}] / \delta \boldsymbol{\phi}(\mathbf{r})$. Ponadto dzięki tożsamości [53]

$$\partial_t W_k[\mathbf{J}] \Big|_{\boldsymbol{\phi}} = \partial_t W_k[\mathbf{J}] \Big|_{\mathbf{J}} + \int_{\mathbf{r}} \frac{\delta W_k[\mathbf{J}]}{\delta \mathbf{J}(\mathbf{r})} \cdot \partial_t \mathbf{J}(\mathbf{r}) \Big|_{\boldsymbol{\phi}} = \partial_t W_k[\mathbf{J}] \Big|_{\mathbf{J}} + \int_{\mathbf{r}} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}) \cdot \partial_t \mathbf{J}(\mathbf{r}) \Big|_{\boldsymbol{\phi}}. \quad (7.11)$$

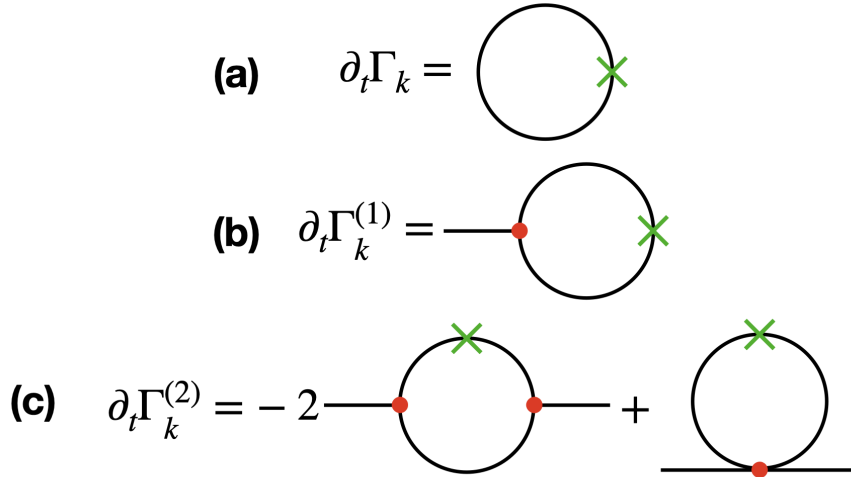
oraz równaniu (7.9) otrzymujemy płynięcie efektywnego działania dane równaniem Wettericha [53, 60]

$$\partial_t \Gamma_k[\boldsymbol{\phi}] = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \sum_{i=1}^N \partial_t R_k^i(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\delta^2 W_k[\mathbf{J}]}{\delta J_i(\mathbf{r}) \delta J_i(\mathbf{r}')} = \frac{1}{2} \text{Tr} [\mathbb{G}_k \partial_t \mathbb{R}_k], \quad (7.12)$$

gdzie $\text{Tr}(\cdot) = \int_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \text{tr}(\cdot)$, przy czym $\text{tr}(\cdot)$ to ślad macierzy. Macierz propagatora $\mathbb{G}_k$ znajdująca się w równaniu (7.12) jest dana relacją

$$\mathbb{G}_k = \frac{\delta}{\delta \mathbf{J}(\mathbf{r})} \otimes \frac{\delta}{\delta \mathbf{J}(\mathbf{r}')} W_k[\mathbf{J}] = \left(\Gamma_k^{(2)}[\boldsymbol{\phi}] + \mathbb{R}_k \right)_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}^{-1} \equiv \left(\tilde{\Gamma}_{\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi}}^{(2)} \right)^{-1}, \quad (7.13)$$

gdzie $\Gamma_k^{(2)}[\boldsymbol{\phi}] = \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\phi}(\mathbf{r})} \otimes \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}')} \Gamma_k[\boldsymbol{\phi}]$ jest macierzą drugiej pochodnej funkcjonalnej efektywnego działania. Wzór (7.12) stanowi podstawową relację charakteryzującą płynięcie RG.



Rys. 7.2: Diagramatyczna reprezentacja równań płynięcia dla (a) efektywnego działania Γ_k , (b) wierzchołka $\Gamma_k^{(1)}$ oraz (c) wierzchołka $\Gamma_k^{(2)}$. Ciągła linia odpowiada propagatorowi $\mathbb{G}_k = (\tilde{\Gamma}_{\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi}}^{(2)})^{-1}$, zielony krzyż odpowiada $\partial_t \mathbb{R}_k$, a czerwona kropka z n "nogami" odpowiada wierzchołkowi $\Gamma_k^{(n)}$.

Sukcesywnie różniczkując funkcjonalnie równanie Wettericha względem $\boldsymbol{\phi}$ (patrz równanie (7.12)) otrzymuje się nieskończoną hierarchię równań płynięcia dla jednocząstkowych nieredukowalnych wierzchołków $\Gamma_{k, \{i_j\}}^{(n)}[\{\mathbf{r}_j\}, \boldsymbol{\phi}] = \frac{\delta^n \Gamma_k[\boldsymbol{\phi}]}{\delta \phi_{i_1}(\mathbf{r}_1) \dots \delta \phi_{i_n}(\mathbf{r}_n)}$. Możemy ją przedstawić w postaci diagramatycznej jak zostało to pokazane dla pierwszych trzech równań na rys. 7.2. Hierarchia ta pozwala na wyrowadzenie równań płynięcia dla poszczególnych stałych sprzężenia opisujących badany układ.

7.2 Działanie typu Hertza dla mieszanin Fermiego

Jak pokazaliśmy to w poprzednich rozdziałach działanie Hertza $\mathcal{S}_H$ opisujące bozonowe wzbudzenia kolektywne dla niezerównoważonych mieszanin Fermiego ma postać

$$\mathcal{S}_H[\boldsymbol{\phi}] = \frac{1}{2} \int_q \Phi_q^* \mathbb{F}_q^{-1} \Phi_q + \mathcal{U}[\boldsymbol{\phi}], \quad (7.14)$$

gdzie $\Phi_q^* = [\tilde{\phi}_q^*, \tilde{\phi}_{-q}^*]$, $\Phi_q = [\tilde{\phi}_q, \tilde{\phi}_{-q}^*]^T$, a $\phi_q = \phi_0 \delta_{q,0} + \tilde{\phi}_q$ jest bozonowym polem parowania, które zostało podzielone na wkład jednorodny ϕ_0 oraz fluktuacje $\tilde{\phi}_q$, przy czym $\tilde{\phi}_{q=0} = 0$. Ograniczamy się do zbadania faz jednorodnych, a tym samym następujące rozwinięcia w pędach będą wykonywane

wokół $\mathbf{q} = 0$. Człon $\mathcal{U}[\phi]$ można zapisać jako

$$\mathcal{U}[\phi] = \int_{x=(\mathbf{x},\tau)} U(\phi) = \int_x \left[-\frac{\phi^2}{g} + T \int_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma} f(-E_{\mathbf{k}}^{\sigma}) \right], \quad (7.15)$$

przy czym $U(\phi)$ to efektywny potencjał o postaci przedyskutowanej w rozdziałach 4 i 5.

Macierz odwrotnego propagatora fluktuacji parowania $\mathbb{F}_q^{-1}$, którego analizę zaprezentowaliśmy w poprzednim rozdziale, zawiera informacje o dynamicznych własnościach wzbudzeń kolektywnych w układzie. Przypominamy, że jednym z uzyskanych wniosków było stwierdzenie, że tłumienie Landaua fononów AB jest zawsze obecne w otoczeniu kwantowej przemiany fazowej przy zbliżaniu się do niej od strony fazy nadciekłej. Tłumienie powoduje modyfikację dynamiki układu, co przejawia się poprzez wystąpienie nielokalnych członów $\sim \frac{|q_0|}{|\mathbf{q}|}$ w rozwinięciu gradientowym elementów macierzowych odwrotnego propagatora $\mathbb{F}_q^{-1}$. Elementy macierzowe $M_{ij}(\mathbf{q}) := [\mathbb{F}_q^{-1}]_{ij}$ możemy sprametryzować jako

$$\begin{aligned} M_{11}(\mathbf{q}) = M_{12}(-\mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \left[Z\mathbf{q}^2 - iWq_0 + Z_0q_0^2 + \frac{L\rho_0}{2} \frac{|q_0|}{|\mathbf{q}|} \right], \\ M_{12}(\mathbf{q}) = M_{21}(\mathbf{q}) &= \frac{\rho_0}{2} \left[Y\mathbf{q}^2 + Y_0q_0^2 + \frac{L}{2} \frac{|q_0|}{|\mathbf{q}|} \right], \end{aligned} \quad (7.16)$$

przy czym wkłady $M_{ij}(\mathbf{q} = 0)$ włączamy do lokalnego potencjału $\mathcal{U}[\phi]$. Wielkości Z, Z_0, Y, Y_0, W oraz L można powiązać z parametrami charakteryzującymi mikroskopowe działanie fermionowe $\mathcal{S}_{\psi}$ (patrz rozdział 6), natomiast $\rho_0 := |\phi_0|^2$ jest parametrem porządku. Warto zauważyć, że wkłady związane z tłumieniem modów kolektywnych są proporcjonalne do $\rho_0 \frac{|q_0|}{|\mathbf{q}|}$. W fazie uporządkowanej kwazicząski są superpozycjami wzbudzeń typu cząstkowego oraz dziurowego [171, 220]. W rezultacie przy obliczaniu elementów macierzowych $\mathbb{F}_q^{-1}$ zarówno diagramy typu cząstka-cząstka jak i cząstka-dziura dają wkład [171]. Fluktuacje parowania $\tilde{\phi}_q$ sprzęgają się z fermionowymi wzbudzeniami typu cząstka-dziura wzdłuż powierzchni Fermiego co powoduje, że tłumienie Landaua jest aktywne [118, 126]. Jednakże gdy przechodzimy do fazy normalnej ($\rho_0 = 0$) znika continuum cząstka-dziura i człon tłumienia znikają (jak zostało to przez nas pokazane w poprzednim rozdziale). Manifestuje się to tym, że współczynniki odpowiadające tłumieniu są proporcjonalne do ρ_0 w pobliżu przemiany fazowej. Ta cecha sprawia, że charakterystyka kwantowej przemiany fazowej w niezerównoważonych mieszaninach Fermiego jest inna niż w analogicznych przypadkach dla układów magnetycznych (patrz np. [20, 44, 138, 150]).

Rozkładamy pole $\tilde{\phi}_q$ przy wykorzystaniu tzw. reprezentacji kartezjańskiej

$$\tilde{\phi}_q = \sigma_q + i\pi_q, \quad \tilde{\phi}_q^* = \sigma_{-q} - i\pi_{-q}, \quad (7.17)$$

gdzie σ_q to podłużna składowa, a π_q to poprzeczna składowa pola opisującego fluktuacje parowania. Wkład jednorodny ϕ_0 jest rzeczywisty. Ponadto $\sigma_q^* = \sigma_{-q}$ oraz $\pi_q^* = \pi_{-q}$ co jest spowodowane tym, że pola $\sigma(x)$ oraz $\pi(x)$ są rzeczywiste. Wstawiając postać (7.17) do równania (7.14) oraz parametryzując efektywny potencjał, poprzez jego rozwinięcie w potęgach $\rho := |\phi|^2$ do drugiego rzędu włącznie, jako

$$U(\phi) = \frac{\lambda}{2} (\rho - \rho_0)^2 \quad (7.18)$$

prowadzi do działania Hertza o postaci

$$S_H = S_{\sigma^2} + S_{\pi^2} + S_{\sigma\pi} + S_{\sigma^3} + S_{\sigma\pi^2} + S_{\sigma^4} + S_{\pi^4} + S_{\sigma^2\pi^2}. \quad (7.19)$$

Wyrazy kwadratowe w polach σ_q i π_q mają następującą postać

$$\begin{aligned} S_{\sigma^2} &= \frac{1}{2} \int_q \left[m_\sigma^2 + Z_\sigma^0 q_0^2 + Z_\sigma \mathbf{q}^2 + L\rho_0 \frac{|q_0|}{|\mathbf{q}|} \right] \sigma_q \sigma_{-q}, \\ S_{\pi^2} &= \frac{1}{2} \int_q \left[Z_\pi^0 q_0^2 + Z_\pi \mathbf{q}^2 \right] \pi_q \pi_{-q}, \\ S_{\sigma\pi} &= -\frac{1}{2} \int_q W q_0 \left[\sigma_q \pi_{-q} + \pi_q \sigma_{-q} \right], \end{aligned} \quad (7.20)$$

gdzie $m_\sigma = \sqrt{2\lambda\rho_0}$ jest masą pola σ_q , $Z_\sigma = Z + \rho_0 Y$, $Z_\sigma^0 = Z_0 + \rho_0 Y_0$, $Z_\pi = Z - \rho_0 Y$ oraz $Z_\pi^0 = Z_0 - \rho_0 Y_0$. Z kolei wyrazy wyższego rzędu mają postać

$$\begin{aligned} S_{\sigma^3} &= \frac{1}{2} \int_{q,p} V(q) \sqrt{\rho_0} \sigma_p \sigma_q \sigma_{-q-p}, \\ S_{\sigma\pi^2} &= \frac{1}{2} \int_{q,p} V(q) \sqrt{\rho_0} \sigma_p \pi_q \pi_{-q-p}, \\ S_{\sigma^4} &= \frac{1}{8} \int_{q,q',p} V(q) \sigma_q \sigma_{p-q} \sigma_{q'} \sigma_{-p-q'}, \\ S_{\pi^4} &= \frac{1}{8} \int_{q,q',p} V(q) \pi_q \pi_{p-q} \pi_{q'} \pi_{-p-q'}, \\ S_{\sigma^2\pi^2} &= \frac{1}{4} \int_{q,q',p} V(q) \sigma_q \sigma_{p-q} \pi_{q'} \pi_{-p-q'}, \end{aligned} \quad (7.21)$$

gdzie $V(q) = \lambda + Y\mathbf{q}^2 + Y_0 q_0^2$ jest potencjałem bozonowym.

Dla $L = 0$ otrzymane działanie S_H jest podobne do działania dla oddziałujących bozonów [160, 175]. Zgodnie z oczekiwaniami mod poprzeczny π_q jest bezmasowy. Warto zauważyć, że człon odpowiadający tłumieniu Landaua pojawia się jedynie w części związanej z modem podłużnym σ_q . Jego występowanie nie było do tej pory uwzględniane w żadnych z badań dotyczących efektów fluktuacyjnych dla nie zrównoważonych mieszanin Fermiego [25, 219].

7.3 Renormalizacja efektywnego potencjału

W rozdziale 5 wskazaliśmy na możliwość wygenerowania QCP na diagramie fazowym dla spolaryzowanych mieszanin Fermiego o nierównych masach, przy czym $r > r_c = 3.01$. W tym podrozdziale wykorzystamy funkcjonalną RG, aby przedyskutować wpływ fluktuacji na stabilność QCP. Póki co pomijamy tłumienie Landaua (tj. kładziemy $L = 0$) i uwzględnimy je później.

W wielu sytuacjach spotykanych w fizyce materii skondensowanej fluktuacje pola porządku mogą doprowadzić do wyindukowania kwantowej przemiany fazowej I rodzaju [20, 138]. Dobrze znanymi przykładami jest ferromagnetyczna kwantowa przemiana fazowa [19], a także nadprzewodniki w których parowanie zachodzi w kanale fal s [88] lub w kanale fal p [131]. W przypadku wędrujących ferromagnetyków przemiana fazowa w $T = 0$ jest I rodzaju ze względu na człon

$\sim \phi^4 \ln \phi$ pojawiający się w efektywnym działaniu po odcałkowaniu fermionowych stopni swobody (nie posiadających przerwy energetycznej). Innego rodzaju nieanalityczność efektywnego działania jest generowana w przypadku nadprzewodników, która pojawia się ze względu na sprzęganie się parametru porządku z elektromagnetycznym potencjałem wektorowym.

Twierdzimy, że mechanizm tego typu nie jest obecny w przypadku układu spolaryzowanych gazów fermionowych o nierównych masach. Posługując się obliczeniami wykorzystującymi funkcjonalną RG pokażemy, że QCP (przy $L = 0$) otrzymany na poziomie MFT w $d = 3$ jest stabilny ze względu na fluktuacje parametru porządku. Dodatkowo warto wspomnieć, że możliwość zmiany rzędu kwantowej przemiany fazowej z I rodzaju do przemiany ciągłej spowodowaną fluktuacjami pola porządku została zademonstrowana dla efektywnych bozonowych teorii pola [104, 106], a także dla niektórych modeli fermionowych [25, 26, 41, 107, 242, 243]. W rozważanym przypadku antycypujemy, że podobny efekt zachodzi, tj. fluktuacje stabilizują przemianę II rodzaju w $T = 0$ (przy zaniedbaniu tłumienia Landaua). Warto podkreślić, że funkcjonalna RG była wykorzystana do otrzymania diagramu fazowego w przypadku mieszaniny o równych masach [25], a także zbadania niezerównoważonej mieszaniny Fermiego w reżimie unitarnym [189].

7.3.1 Równanie płynięcia efektywnego potencjału

Posługując się równaniem Wettericha wyprowadzimy równanie płynięcia efektywnego potencjału $U_k(\rho)$. Zapisujemy je w reprezentacji pędowej i wybierając $\phi_q = [\sigma_q, \pi_q]^T$ otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_k[\phi] &= \frac{1}{2} \int_q \text{tr} \left[\begin{pmatrix} \dot{R}_k^\sigma(q) & 0 \\ 0 & \dot{R}_k^\pi(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{\sigma,\sigma}(q) & G_{\sigma,\pi}(q) \\ G_{\pi,\sigma}(q) & G_{\pi,\pi}(q) \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int_q \left[\dot{R}_k^\sigma(q) G_{\sigma,\sigma}(q) + \dot{R}_k^\pi(q) G_{\pi,\pi}(q) \right], \end{aligned} \quad (7.22)$$

gdzie $\dot{X} \equiv \partial_t X$, $q = (\mathbf{q}, q_0)$ oraz $\int_q (\cdot) = \int_{\mathbf{q}} T \sum_{q_0} (\cdot)$. Efektywne działanie $\Gamma_k[\phi]$ parametryzujemy korzystając z przybliżenia lokalnego potencjału (ang. *local potential approximation*) [53, 60], wtedy

$$\begin{aligned} \Gamma_k^{LPA}[\phi] &= \frac{1}{2} \int_q \phi_q^T \mathbb{M}_k(q) \phi_{-q} + \int_x U_k(\rho), \\ \mathbb{M}_k(q) &= \begin{pmatrix} Z_{\sigma,k}^0 q_0^2 + Z_{\sigma,k} \mathbf{q}^2 + L \rho_{0,k} \frac{|q_0|}{|\mathbf{q}|} & -W_k q_0 \\ W_k q_0 & Z_{\pi,k}^0 q_0^2 + Z_{\pi,k} \mathbf{q}^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.23)$$

gdzie stałe występujące w macierzy $\mathbb{M}_k$ zostały uzależnione od skali k , $\rho = \phi^2$, a także $\rho_{0,k}$ jest definiowane jako położenie minimum funkcji $U_k(\rho)$. Ponadto widzimy, że zgodnie z oczekiwaniami $\Gamma_\Lambda^{LPA}[\phi] = \mathcal{S}_H[\phi]$.

W związku z powyższym równanie płynięcia $\dot{U}_k(\rho)$ możemy otrzymać ewaluując równanie Wettericha (patrz wzór (7.22)) dla jednorodnej konfiguracji pola $\phi_{uni} = [\sqrt{\rho}, 0]^T$. Zaczniemy od znale-

zienia macierzy propagatora $\mathbb{G}_k = (\tilde{\Gamma}_{\phi,\phi}^{(2)})^{-1} \Big|_{\phi=\phi_{uni}}$ w tym przypadku. Ma ona postać:

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_k(q) &= \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 \Gamma_k^{LPA}[\phi]}{\delta \sigma_q \delta \sigma_q} + R_k^\sigma(q) & \frac{\delta^2 \Gamma_k^{LPA}[\phi]}{\delta \sigma_q \delta \pi_q} \\ \frac{\delta^2 \Gamma_k^{LPA}[\phi]}{\delta \pi_q \delta \sigma_q} & \frac{\delta^2 \Gamma_k^{LPA}[\phi]}{\delta \pi_q \delta \pi_q} + R_k^\pi(q) \end{pmatrix}^{-1} \Big|_{\phi=\phi_{uni}} = \\ &= \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \gamma_{\pi,\pi}(q) & \gamma_{\sigma,\pi}(q) \\ -\gamma_{\sigma,\pi}(q) & \gamma_{\sigma,\sigma}(q) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.24)$$

gdzie $D = \gamma_{\sigma,\sigma} \gamma_{\pi,\pi} + \gamma_{\sigma,\pi}^2$ jest wyznacznikiem macierzy $\tilde{\Gamma}_{\phi,\phi}^{(2)}$, której elementy macierzowe wynoszą

$$\begin{aligned} \gamma_{\sigma,\sigma} &= Z_{\sigma,k}^0 q_0^2 + Z_{\sigma,k} \mathbf{q}^2 + L \rho_{0,k} \frac{|q_0|}{|\mathbf{q}|} + U'_k(\rho) + 2\rho U''_k(\rho) + R_k^\sigma(q), \\ \gamma_{\pi,\pi} &= Z_{\pi,k}^0 q_0^2 + Z_{\pi,k} \mathbf{q}^2 + U'_k(\rho) + R_k^\pi(q), \\ \gamma_{\sigma,\pi} &= -W_k q_0, \end{aligned} \quad (7.25)$$

gdzie $X' = \partial_\rho X(\rho)$. Korzystając z powyższych relacji widzimy, że $G_{\sigma,\sigma} = \gamma_{\pi,\pi} / (\gamma_{\sigma,\sigma} \gamma_{\pi,\pi} + \gamma_{\sigma,\pi}^2)$, a $G_{\pi,\pi} = \gamma_{\sigma,\sigma} / (\gamma_{\sigma,\sigma} \gamma_{\pi,\pi} + \gamma_{\sigma,\pi}^2)$. Pozwala to na napisanie równania

$$\dot{U}_k[\phi] = \frac{1}{2} \int_q \frac{1}{D(q)} \left[\dot{R}_k^\sigma(q) \gamma_{\pi,\pi}(q) + \dot{R}_k^\pi(q) \gamma_{\sigma,\sigma}(q) \right], \quad (7.26)$$

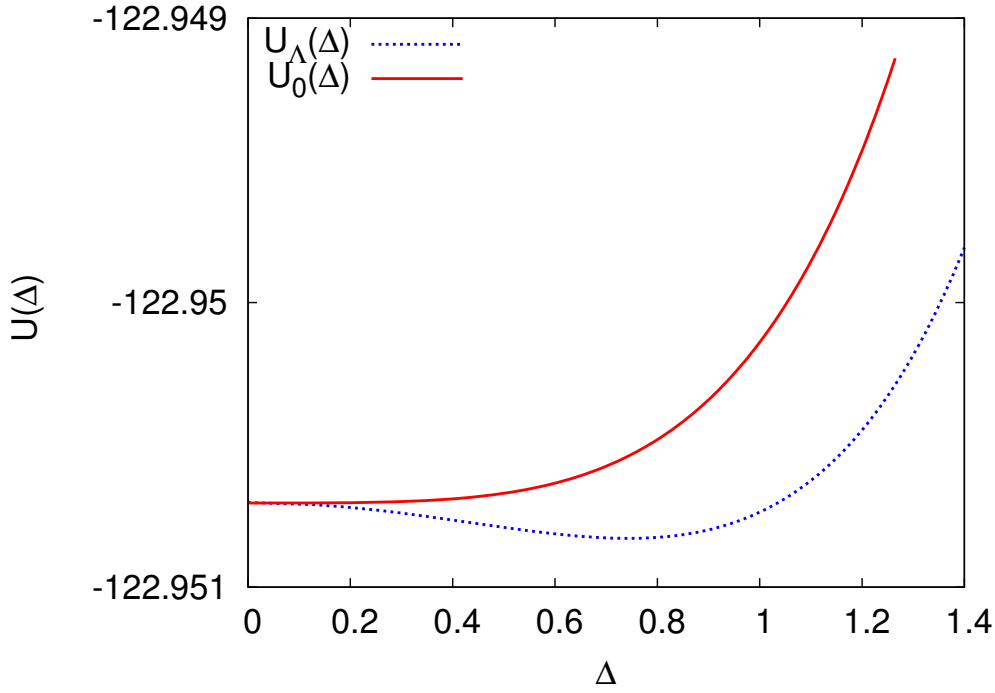
które charakteryzuje renormalizację efektywnego potencjału $U_k(\rho)$. Warto podkreślić, że równanie to jest nietrywialne i zawiera w sobie wyrazy aż do nieskończonego rzędu w ρ . Odpowiada to uwzględnieniu wszystkich wierzchołków o postaci $\sim \partial_\phi^n U_k$ w teorii perturbacyjnej [60].

7.3.2 Stabilność QCP ze względu na fluktuacje

Stabilność QCP w $d = 3$ ze względu na fluktuacje zbadamy pomijając renormalizację stałych gradientowych, tj. będziemy je traktować jako stałe niezależne od skali k . Co więcej przyjmujemy, że $Z_\sigma = Z_\pi = Z$ oraz $Z_\sigma^0 = Z_\pi^0 = Z_0$. Zanedbujemy także w tej chwili wpływ tłumienia Landaua poprzez położenie $L = 0$. Renormalizacja kształtu efektywnego potencjału wraz ze zmianą skali k jest dana równaniem (7.26). Przyjmujemy, że funkcje R_k^σ oraz R_k^π występujące w tym równaniu mają identyczną postać daną regulatorem Litima, czyli

$$R_k(q) = R_k^\sigma(q) = R_k^\pi(q) = Z \left(k^2 - \mathbf{q}^2 - \frac{Z_0}{Z} q_0^2 \right) \theta \left(k^2 - \mathbf{q}^2 - \frac{Z_0}{Z} q_0^2 \right). \quad (7.27)$$

Wielkość $U_k(\rho)$ możemy zinterpretować jako energię swobodną w której uwzględnione zostały fluktuacje pomiędzy skalami pędu k oraz Λ . Dla $k = \Lambda$ fluktuacje są "zamrożone" i $U_\Lambda(\rho) = -\frac{\rho}{g} + T \int_p \sum_\sigma f(-E_p^\sigma(\rho))$ jest dane przez średniopolowy efektywny potencjał. Z kolei dla $k \rightarrow 0$ wszystkie fluktuacje są odcałkowane i tym samym $U_0(\rho)$ jest pełnym potencjałem Gibbsa układu. Zatem równanie (7.26) interpoluje między średniopolowym, a pełnym efektywnym potencjałem w trakcie zmieniania skali k dla której następuje obciążenie pędów. Równanie (7.26) nie wiąże się z rozwinięciem w potęgach ρ potencjału $U_k(\rho)$. Z tego powodu podejście to dobrze nadaje się do zbadania wpływu fluktuacji na rząd przemiany fazowej. Z drugiej strony otrzymane równanie płynięcia $\dot{U}_k(\rho)$



Rys. 7.3: Średniopolowy $[U_\Lambda(\Delta = \sqrt{\rho})]$ oraz zrenormalizowany $[U_0(\Delta = \sqrt{\rho})]$ efektywny potencjał dla zestawu parametrów odpowiadający rys. 5.2 dla $T = 0$ oraz $h = h_c \approx 1.346$. Parametry propagatora wynoszą $Z = Z_0 = 10W = 1$. Uwzględnienie fluktuacji parametru porządku powoduje przesunięcie położenia QCP od $h_c^{MFT} \approx 1.362$ do $h_c \approx 1.346$. Przemiana fazowa pozostaje II rodzaju (przy $L = 0$) po uwzględnieniu wpływu fluktuacji przy wykorzystaniu równań płynięcia RG. Wartość oczekiwana parametru porządku zanika w sposób ciągły, gdy h zmienia się w kierunku wartości krytycznej h_c .

jest nieliniowym równaniem różniczkowym, które może zostać zbadane tylko numerycznie. Warto podkreślić, że prostsze obciążenia równania Wettericha były wykorzystywane w podobnym kontekście w pracach [70, 121].

Dyskretyzując przestrzeń wartości ρ całkujemy równanie (7.26) dla $T = 0$ przyjmując jako warunek początkowy średniopolową postać efektywnego potencjału $U_\Lambda(\rho)$. Uzyskane wyniki nie wykazują śladów niestabilności QCP otrzymanego na poziomie MFT w kierunku przemiany fazowej I rodzaju. Pokazujemy to na rys. 7.3 poprzez narysowanie wykresu średniopolowego oraz zrenormalizowanego efektywnego potencjału odpowiadającego parametrom wykorzystanym na rys. 5.2. Wartość h dobrano tak, aby odpowiadała dokładnemu położeniu przemiany fazowej dla $T = 0$ po wykonaniu procedury renormalizacji. W tym przypadku kształt średniopolowego efektywnego potencjału wskazuje, że znajdujemy się we wnętrzu fazy uporządkowanej, tj. minimum $U_\Lambda(\Delta)$ odpowiada $\Delta_0 \neq 0$. Rachunek ten pokazuje stabilność QCP ze względu na fluktuacje parametru porządku w $d = 3$, przy zaniedbaniu tłumienia Landaua.

7.4 Teoria Hertza-Millisa w fazie nadciekłej

Teoria Hertza-Millisa w swoim pierwotnym kształcie została sformułowana w odniesieniu do fazy paramagnetycznej i jej celem było scharakteryzowanie magnetycznych przemian fazowych w układach wędrujących fermionów. Jednym z jej wyników jest stwierdzenie, że ciągła przemiana fazowa w $T = 0$ należy do klasy uniwersalności modeli $O(N)$ -symetrycznych o efektywnej wymiarowości $D = d + z$, gdzie wykładnik dynamiczny z przyjmuje wartość $z = 3$, gdy niestabilność zachodzi przy magnetycznym wektorze uporządkowania wynoszącym $\mathbf{Q} = 0$ [89, 147].

Wartość wykładnika z jest związana z tłumieniem Landaua modów kolektywnych i w rozważanej przez nas sytuacji nie jest od razu jasnym jaka ona będzie. Spowodowane jest to tym, że w niezrównoważonych mieszaninach Fermiego tłumienie Landaua jest obecne tylko w fazie uporządkowanej i współczynnik w członie $\sim \frac{|q_0|}{|q|}$ jest proporcjonalny do ρ_0 i tym samym znika przy podchodzeniu do punktu krytycznego. Co więcej zwracamy uwagę, że kwantowy punkt krytyczny odpowiada stanowi, który jest uporządkowany na poziomie MFT i oznacza to, że człon opisujący tłumienie jest obecny w równaniach płynięcia RG we wszystkich skalach opisujących podchodzenie do krytyczności, przy czym zanika jedynie w asymptotycznie małych skalach RG.

Standardowo teoria Hertza-Millisa jest formułowana w odniesieniu do fazy nieuporządkowanej. Z tego powodu wykorzystujemy nieperturbacyjne sformułowanie RG, które można zastosować zarówno do fazy symetrycznej i uporządkowanej [108]. Pozwala ona także na otrzymanie zarówno gaussowskiego punktu stałego, jak i punktu stałego Wilsona-Fishera. Pokażemy jak spodziewane przejście między reżimem kwantowym, a klasycznym jest precyzyjnie odtwarzane dla $T > 0$ przy braku tłumienia Landaua. Następnie uwzględnimy człon tłumienia $\sim \rho_0 \frac{|q_0|}{|q|}$. Nasze wyniki wskazują, że jego obecność zakłóca płynięcie RG w kierunku punktu stałego Wilsona-Fishera, który pojawia się dla pośrednich skal RG. Wskazuje to na możliwość indukowania przemiany fazowej I rodzaju poprzez fluktuacje, które są związane z tłumieniem modu podłużnego σ . Mechanizm destabilizacji QCP obecny w tym przypadku jest całkowicie różny od tych badanych dotychczas [20, 138] np. w kontekście ferromagnetyków [19] lub nadprzewodników [27, 88, 131].

7.4.1 Równania płynięcia stałych $\dot{\rho}_{0,k}$ oraz $\dot{\lambda}_k$

W naszym problemie posłużymy się jednocząstkowym nieredukowalnym wariantem nieperturbacyjnej teorii renormalizacji i jako punkt wyjścia przyjmujemy równanie Wettericha. Metoda ta jest szczególnie wygodna do opisu ciągłych przejść między różnymi reżimami związanymi z występowaniem kilku punktów stałych, które rządzą płynięciem RG w różnych skalach [39, 52, 127, 184, 218]. W dalszej części posłużymy się przybliżeniami, które zostały opracowane w kontekście badań nad magnetycznymi przemianami fazowymi w układach fermionów posiadających symetrię Isinga [104, 106, 108], a także typowego działania Hertza-Millisa. Z powodu silnie anizotropowego propagatora danego relacjami (7.25) będziemy wykorzystywać dwie różne funkcje obciążenia $R^{\sigma/\pi}$ dla poszczególnych kierunków.

Naszym celem jest zbadanie wpływu członu tłumienia Landaua $\sim \rho_0 \frac{|q_0|}{|q|}$ na skalowanie w kwan-

towym reżimie krytycznym. Dla prostoty pomijamy pozadiagonalny propagator $\sigma - \pi$, tj. kładziemy $W = 0$. Człon ten jest nieobecny dla układów posiadających symetrię cząstka-dziura i przypuszcza się, że skaluje się do zera w trakcie płynięcia RG wewnątrz fazy uporządkowanej [160]. W ogólności wpływa on na niektóre własności transportowe oraz termodynamiczne takie jak ściśliwość kondensatu [175].

Posługując się tymi przybliżeniami postępujemy w standardowy sposób [21] wychodząc z równań płynięcia efektywnego potencjału (patrz równanie (7.26)), które wyprowadziliśmy w poprzednim podrozdziale. W rozważanym przypadku otrzymujemy, że

$$\dot{U}_k(\rho) = \frac{1}{2} \int_q \left[\frac{\dot{R}_k^\sigma}{\gamma_{\sigma,\sigma}(\rho)} + \frac{\dot{R}_k^\pi}{\gamma_{\pi,\pi}(\rho)} \right]. \quad (7.28)$$

Ponadto parametryzujemy efektywny potencjał korzystając z postaci

$$U_k(\rho) = \frac{\lambda_k}{2} (\rho - \rho_{0,k})^2. \quad (7.29)$$

W rozważanym przybliżeniu pomijamy także płynięcie współczynników gradientowych (zarówno w kierunku przestrzennym jak i czasowym). Jest to równoważne z pominięciem wymiaru anomalnego $\eta_{\sigma/\pi}$ (ang. *anomalous dimension*), gdyż $\dot{Z}^{\sigma/\pi} = -\eta_{\sigma/\pi} Z^{\sigma/\pi}$ [53]. Poza tym wartość $\eta_{\sigma/\pi}$ jest mała w przypadku układów trójwymiarowych, a takim zajmujemy się w tym problemie. W konsekwencji równania płynięcia RG są parametryzowane przez zbiór tylko dwóch zależnych od skali stałych sprzężenia $\rho_{0,k}$ oraz λ_k . W kontekście kwantowej krytyczności dla wędrujących fermionów wykorzystywane przybliżenia pozwalają na uchwycenie istotnych aspektów fizyki tych układów w $d = 3$ [106]. Jednakże postępowanie to jest niewystarczające w $d = 2$, gdzie płynięcie stałych gradientowych Z i związanych z nimi wymiarów anomalnych η pełni istotną rolę.

Wyprowadzimy teraz równanie płynięcia stałej $\rho_{0,k}$ korzystając z relacji $\frac{d}{dt} U'(\rho_{0,k}) = \partial_t U'(\rho_{0,k}) + U''(\rho_{0,k}) \dot{\rho}_{0,k} = 0$, która wynika z $U'(\rho_{0,k}) = 0$. Różniczkując równanie (7.29) i kładąc $\rho = \rho_{0,k}$, a także korzystając z $U''(\rho_{0,k}) = \lambda_k$ otrzymujemy, że

$$\dot{\rho}_{0,k} = \frac{1}{2} \int_q \left[3\dot{R}_k^\sigma \gamma_{\sigma,\sigma}^{-2}(\rho_{0,k}) + \dot{R}_k^\pi \gamma_{\pi,\pi}^{-2}(\rho_{0,k}) \right]. \quad (7.30)$$

Równanie płynięcia dla stałej λ_k możemy otrzymać licząc drugą pochodną równania (7.29), którą obliczamy dla $\rho = \rho_{0,k}$. W rezultacie otrzymujemy, że

$$\dot{\lambda}_k = \lambda_k^2 \int_q \left[9\dot{R}_k^\sigma \gamma_{\sigma,\sigma}^{-3}(\rho_{0,k}) + \dot{R}_k^\pi \gamma_{\pi,\pi}^{-3}(\rho_{0,k}) \right]. \quad (7.31)$$

Zauważmy, że kładąc $\rho = \rho_{0,k}$ dostajemy bezmasowy propagator modu poprzecznego $\gamma_{\pi,\pi}^{-1}$, bo $U'(\rho_{0,k}) = 0$ (porównaj z równaniem (7.20)) Z kolei masa modu podłużnego σ wynosi $m_\sigma^2 = U'(\rho_{0,k}) + 2\rho_{0,k}U''(\rho_{0,k}) = 2\lambda_k\rho_{0,k}$.

W powyższych równaniach wykorzystujemy funkcję obcięcia Litima, która jest zależna od kierunku σ/π i ma postać

$$R_k^{\sigma/\pi} = \mathcal{X}_{\sigma/\pi} \theta(\mathcal{X}_{\sigma/\pi}), \quad (7.32)$$

gdzie $\mathcal{X}_\sigma = Z_\sigma (k^2 - \mathbf{q}^2) - Z_\sigma^0 q_0^2 - L\rho_{0,k} \frac{|q_0|}{|\mathbf{q}|}$ oraz $\mathcal{X}_\pi = Z_\pi (k^2 - \mathbf{q}^2) - Z_\pi^0 q_0^2$. Wybór ten sprawia, że całki występujące w równaniach płynięcia dla $\rho_{0,k}$ oraz λ_k są ograniczone do obszaru w zmiennych $(\mathbf{q}, q_0)$, gdzie $\gamma_{\sigma,\sigma}$ oraz $\gamma_{\pi,\pi}$ są niezależne od q , co pozwala na analityczne wykonanie całek po pędach $\mathbf{q}$.

Następnie przeskalowujemy zmienne korzystając z klasycznych wymiarów skalujących

$$\kappa_k = Z_\pi k^{2-d} \rho_{0,k} \quad \text{oraz} \quad u_k = Z_\pi^{-2} k^{d-4} \lambda_k. \quad (7.33)$$

Procedura ta sprawia, że w trakcie płynięcia stałych κ oraz u osiągany jest punkt stały Wilsona-Fishera dla $T > 0$, gdy warunek początkowy zostanie wybrany w taki sposób, że znajdujemy się na powierzchni krytycznej (ang. *critical manifold*). Prawą stronę powyższych równań płynięcia rozdzielamy na wkłady klasyczne odpowiadające $q_0 = 0$ oraz na wkłady kwantowe dla których $q_0 \neq 0$. W rezultacie otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_k &= \beta_\kappa^{cl} + \beta_\kappa^{qu,\sigma} + \beta_\kappa^{qu,\pi}, \\ \dot{u}_k &= \beta_u^{cl} + \beta_u^{qu,\sigma} + \beta_u^{qu,\pi}. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Ponadto wkłady kwantowe w powyższym równaniu podzieliliśmy na części pochodzące od fluktuacji podłużnych σ oraz poprzecznych π . Człony występujące w równaniu $\dot{\kappa}_k$ mają następującą postać

$$\beta_\kappa^{cl} = (2-d)\kappa_k + \frac{A_d T}{d} \left(\frac{3\tilde{Z}}{(\tilde{Z} + \tilde{m}_\sigma^2)^2} + 1 \right), \quad (7.35)$$

$$\begin{aligned} \beta_\kappa^{qu,\sigma} &= \frac{3A_d T}{(\tilde{Z} + \tilde{m}_\sigma^2)^2} \sum_{q_0 > 0}^{\tilde{q}_0^\sigma} \left[\frac{2\tilde{Z}}{d} \left\{ (y_\sigma^M(q_0))^{d/2} - (y_\sigma^m(q_0))^{d/2} \right\} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{q_0 L Z_\pi^{-2} k^{d-5}}{d-1} [\dot{\kappa}_k + (d-2)\kappa_k] \left\{ (y_\sigma^M(q_0))^{(d-1)/2} - (y_\sigma^m(q_0))^{(d-1)/2} \right\} \right], \end{aligned} \quad (7.36)$$

$$\beta_\kappa^{qu,\pi} = \frac{2A_d T}{d} \sum_{q_0 > 0}^{\tilde{q}_0^\pi} [y_\pi^M(q_0)]^{d/2}, \quad (7.37)$$

gdzie $A_d = \frac{S^{d-1}}{(2\pi)^d}$, przy czym $S^{d-1} = \frac{d\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$ jest powierzchnią $(d-1)$ -wymiarowej sfery jednostkowej, $\tilde{Z} = Z_\sigma/Z_\pi$, $\tilde{m}_\sigma^2 = 2\kappa_k u_k$, $y_\pi^M(q_0) = 1 - \frac{Z_\pi^0}{Z_\pi k^2} q_0^2$, podczas gdy $y_\sigma^{M/m}(q_0)$ są dodatnimi pierwiastkami następującego równania

$$y^{3/2} - \left(1 - \frac{Z_\sigma^0}{Z_\sigma k^2} q_0^2 \right) y^{1/2} + \frac{L Z_\pi^{-2}}{\tilde{Z}} k^{d-5} \kappa_k |q_0| = 0. \quad (7.38)$$

Warto podkreślić, że $y_\sigma^{M/m}(q_0)$ jest górną/dolną granicą całkowania po $y = \mathbf{q}^2/k^2$ (tj. pochodzi ten człon z wykonania całki $\int_{\mathbf{q}} (\cdot)$ w $\beta_\kappa^{qu,\sigma}$) i w związku z tym zachodzi relacja $y_\sigma^M(q_0) > y_\sigma^m(q_0)$ (bardziej szczegółowo zostało to wyjaśnione w dodatku C). Suma Matsubary dla wkładu od modu π (patrz równanie (7.37)) przebiega od $q_0 = 2\pi T$ do $\tilde{q}_0^\pi = \sqrt{\frac{Z_\pi}{Z_\pi^0}} k$. Z kolei dla wkładu od modu σ (równanie (7.36)) sumowanie przebiega po $q_0 = 2\pi n T$ ($n \in \mathbb{N}_+$) jest ograniczone do wartości spełniających poniższą nierówność

$$q_0^2 \frac{Z_\sigma^0}{Z_\sigma k^2} + 3(2)^{-2/3} \left(\frac{L Z_\pi^{-2}}{\tilde{Z}} k^{d-5} \kappa_k q_0 \right)^{2/3} - 1 < 0. \quad (7.39)$$

Największa wartość z nich jest oznaczona jako $\tilde{q}_0^\sigma$. Poza tym wkłady występujące w równaniu $\dot{u}_k$ mają następującą postać

$$\beta_u^{cl} = (4 - d)u + \frac{2A_d T}{d} \left(\frac{9\tilde{Z}}{(\tilde{Z} + \tilde{m}_\sigma^2)^3} + 1 \right) u^2, \quad (7.40)$$

$$\beta_u^{qu,\sigma} = \frac{6u^2}{\tilde{Z} + \tilde{m}_\sigma^2} \beta_\kappa^{qu,\sigma} \quad (7.41)$$

oraz

$$\beta_u^{qu,\pi} = 2u^2 \beta_\kappa^{qu,\pi}. \quad (7.42)$$

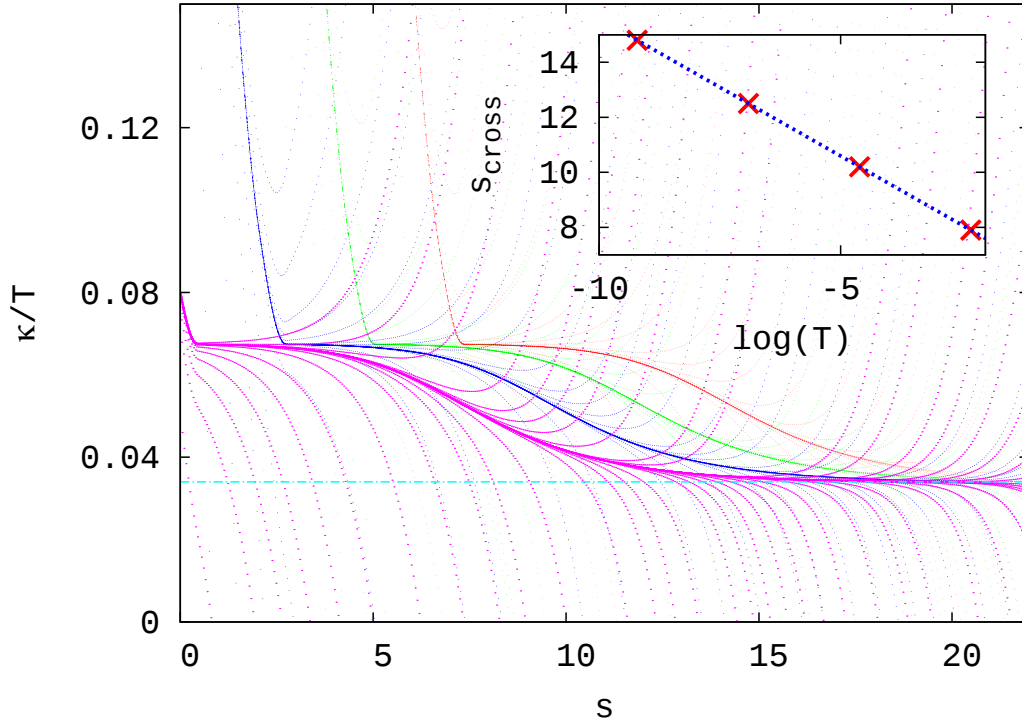
Sumy Matsubary występujące w powyższych równaniach muszą zostać wykonane numerycznie.

Powyższe równania zostały zapisane dla dowolnej wymiarowości d , ale od tej pory ograniczamy się do przypadku $d = 3$. Jak zostało to wcześniej wspomniane wykorzystane przybliżenia nie są adekwatne w przypadku $d = 2$ ze względu na pominięcie wymiarów anomalnych. Osobliwość krytyczna jest kontrolowana przez gaussowski punkt stały dla $T = 0$ oraz przez klasyczny punkt stały Wilsona-Fishera dla $T > 0$.

7.4.2 Płynięcie RG przy braku tłumienia Landaua

Zacniemy od analizy równań płynięcia stałych κ oraz u dla przypadku w którym pomijamy proces tłumienia Landaua dla modu podłużnego σ . Oznacza to, że kładziemy $L = 0$ w $\beta_\kappa^{qu,\sigma}$ oraz $\beta_u^{qu,\sigma}$. Płynięcie stałych jest inicjalizowane dla $s = -t = -\ln(k/\Lambda) = 0$ przy ustalonej temperaturze $T > 0$ i wartościach początkowych $\kappa = \kappa_0 > 0$, a także $u = u_0 > 0$ wyznaczonych na podstawie wartości mikroskopowych parametrów układu. W przypadku rozwiązania numerycznego przyjmujemy, że $u_0 = \Lambda = Z_\sigma = Z_\pi = Z_\sigma^0 = Z_\pi^0 = 1$. Całkując równania płynięcia (7.34) w kierunku rosnących wartości s (odpowiadających $k \rightarrow 0$) znajdujemy, że κ dąży od zera dla pewnych skończonych skal, co wskazuje na płynięcie w kierunku fazy nieuporządkowanej, albo rozbiega dla dużych wartości s (co odpowiada zbieganiu ρ_0 do pewnej skończonej wartości) wskazując tym samym na osiągnięcie fazy uporządkowanej. Dostrajając układ do przemiany fazowej (poprzez zmienianie κ_0) obserwujemy, że (κ, u) płyną w kierunku wartości odpowiadających punktom stałym. Wyniki dla płynięcia stałej κ są zaprezentowane na rys. 7.4 dla ciągu temperatur, których wartości dążą do zera. Skala s_{cross} dla której κ odrywa się od gaussowskiego punktu stałego (rządzającego osobliwością krytyczną w $T = 0$) i w sposób ciągły płynie w kierunku punktu stałego Wilsona-Fishera (kontrolującego osobliwość krytyczną w skończonych temperaturach) rozbiega w granicy $T \rightarrow 0^+$ zgodnie z relacją $s_{cross} \sim -\frac{1}{z} \ln T$ [147]. Dopasowanie otrzymanych danych prowadzi do wartości wykładnika dynamicznego $z = 1.0$, co w pełni zgadza się z oczekiwanym zachowaniem dla tego układu. W zakresie pędów $[0, s_{cross}[$ uzyskane płynięcie κ jest zdominowane przez wkłady kwantowe ($q_0 \neq 0$), podczas gdy zakres $[s_{cross}, \infty[$ jest zdominowany wkładami klasycznymi ($q_0 = 0$) do równań płynięcia (7.34).

Przedstawimy teraz wyniki dotyczące zrenormalizowanego kształtu linii krytycznej $T_c(\kappa_0)$ otrzymane poprzez odcałkowanie równań płynięcia RG. Ogólnie oczekuje się, że linia krytyczna jest dana



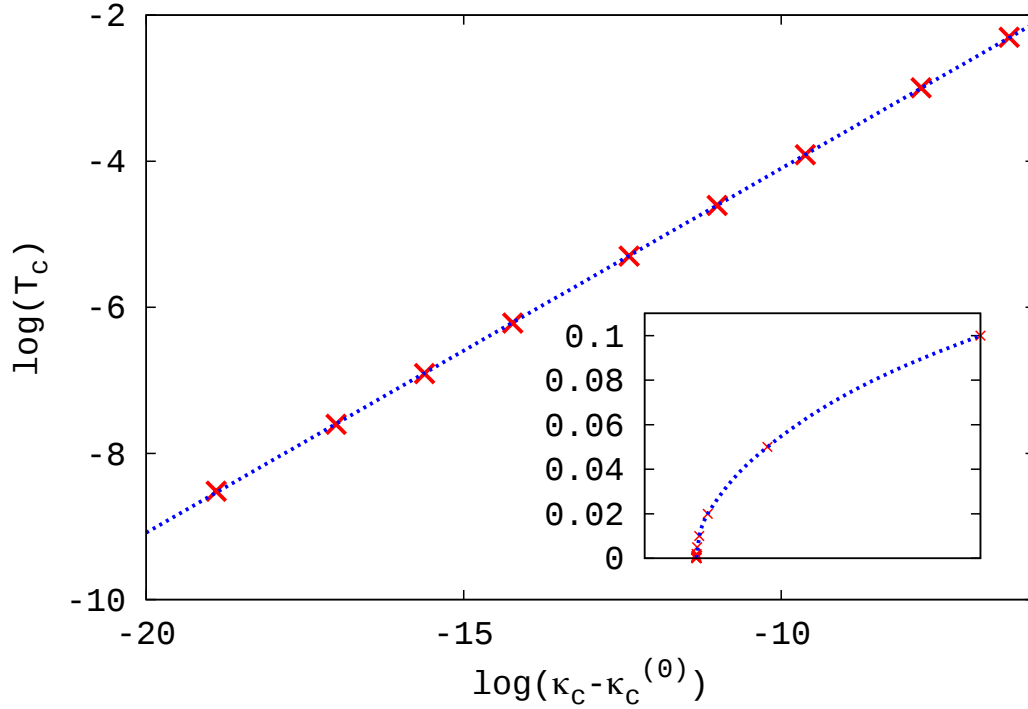
Rys. 7.4: Płynięcie stałej κ dla kilku temperatur $T = 10^{-4}$ (krzywa czerwona), $T = 10^{-3}$ (krzywa zielona), $T = 10^{-2}$ (krzywa niebieska) oraz $T = 10^{-1}$ (krzywa różowa) przy braku tłumienia Landaua. Reżim pośredni płynięcia jest kontrolowany przez gaussowski punkt stały, podczas gdy podczerwony sektor (duże wartości s) jest rządzony przez punkt stały Wilsona-Fishera. Skala s_{cross} dla której następuje ciągłe przejście między reżimami (tj. oderwanie się płynięcia κ od gaussowskiego punktu stałego) rozbiega, gdy $T \rightarrow 0$. Ogólnie oczekuje się, że $s_{cross} \sim -\frac{1}{z} \ln T$ [147]. Przewidywanie to jest w pełni zgodne z otrzymanymi wynikami dla których wykładnik $z = 1.0$ (jak zostało to pokazane na wykresie wstawionym w prawym górnym rogu).

prawem potęgowym (dla niskich temperatur) o postaci [147]

$$T_c \sim (\kappa_0 - \kappa_0^{(0)})^\psi, \quad \psi = \frac{z}{d + z - 2}, \quad (7.43)$$

gdzie ψ to wykładnik przesunięcia. Warto zauważyć, że wykładnik ψ zależy jedynie od d oraz z . Przykładowe wyniki otrzymane dla linii krytycznej zostały zaprezentowane na rys. 7.5. Uzyskane prawo potęgowe jest scharakteryzowane wykładnikiem $\psi = 0.5$, co w pełni zgadza się z oczekiwanym wynikiem dla $z = 1$ (tj. $\psi = 1/2$). Ponadto widzimy, że uniwersalny kształt linii T_c nie przystaje do generycznych przewidywań MFT, które to wskazują, że faza nadciekła jest obszarem wklęsłym (ang. *reentrant phase*) na diagramie fazowym, co można zobaczyć na rys. 5.2.

Powyższe wyniki odtwarzają antycypowane zachowanie układu przy pominięciu członów tłumienia Landaua w równaniach płynięcia, tj. skalowanie jest analogiczne jak dla kwantowego modelu Isinga [192, 218]. Podkreślamy tu rolę wykładnika dynamicznego, który odpowiada za kształt linii krytycznej T_c oraz skali s_{cross} dla której następuje przejście między reżimem kwantowym i klasycznym. Naszym celem będzie teraz zbadanie w jaki sposób zostanie zmodyfikowane otrzymane

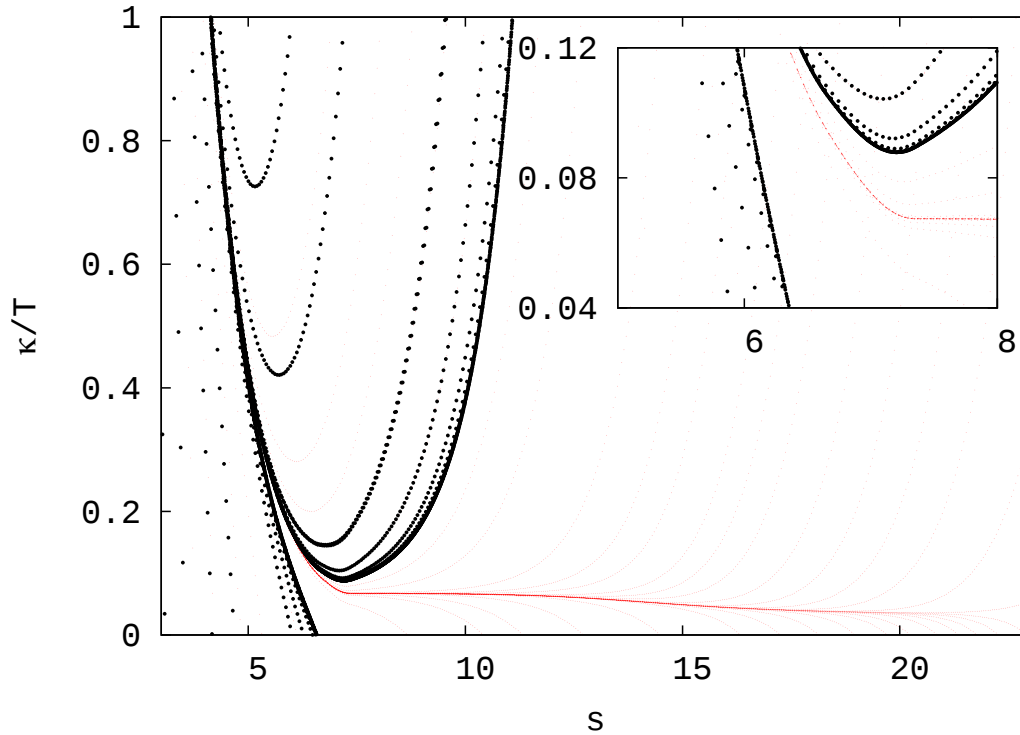


Rys. 7.5: Linia krytyczna otrzymana poprzez odcałkowanie równań płynięcia RG przy braku tłumienia Landaua ($L = 0$). Granica faz jest opisywana prawem potęgowym o wykładniku $\psi = 0.5$, co w pełni zgadza się z równaniem (7.43) w którym położono $z = 1$. Rysunek w prawym dolnym rogu odpowiada tym samym danym narysowanym w skali liniowej.

zachowanie po uwzględnieniu członu tłumienia Landaua w propagatorze modu σ .

7.4.3 Płynięcie RG przy uwzględnieniu tłumienia Landaua

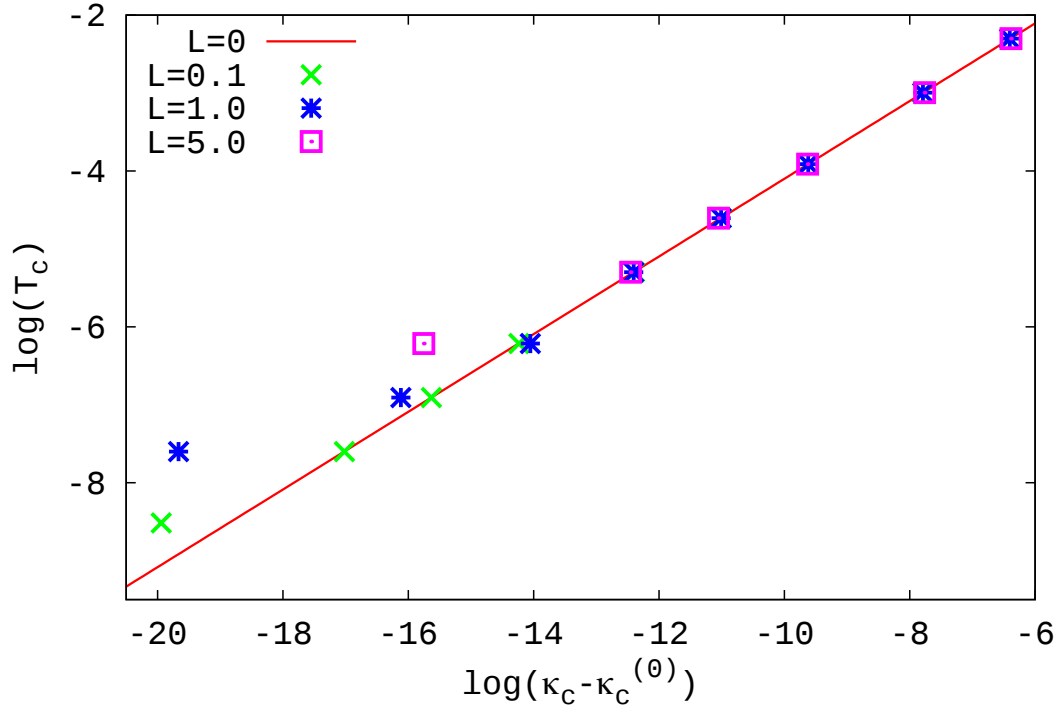
W tej części powtórzymy analizę zaprezentowaną w poprzednim paragrafie, lecz tym razem uwzględnimy człony odpowiadające tłumieniu Landaua (tj. $L \neq 0$). Rozwiązujemy równania płynięcia (7.34) i wykorzystujemy procedurę dostrajania κ_0 do jej wartości krytycznej dla kilku temperatur dążących do zera. Płynięcie RG w reżimie kwantowym jest rządzone przez wzajemny wpływ różnych wkładów pochodzących z członów $\sim q_0^2$ oraz $\sim \rho_0 \frac{|q_0|}{|q|}$. Analiza płynięcia stałej κ jest zaprezentowana na rys. 7.6 dla względnie niewielkiej wartości $L = 0.1$ oraz niskiej temperatury $T = 10^{-4}$. Nałożono na nim także trajektorię RG odpowiadającą płynięciu κ w tej samej temperaturze T oraz przy tych samych wartościach pozostałych parametrów, lecz z $L = 0$. Opisana w poprzednim paragrafie procedura dychotomii pozwala na zidentyfikowanie dwóch faz obecnych w układzie, a także na znalezienie granicy faz między nimi w przestrzeni parametrów. Jednakże przemianie fazowej nie towarzyszy zbieganie płynięcia RG do punktu stałego i związanej z nim niezmienniczości skalowania. Zachowanie to może wskazywać na wywołaną fluktuacjami przemianę fazową I rodzaju, która jest spowodowana przez proces tłumienia Landaua modów kolektywnych. Efekt ten pojawia się jedynie w odpowiednio niskich temperaturach T ; w wyższych temperaturach obserwujemy ciągłą



Rys. 7.6: Płynięcie stałej κ dla temperatury $T = 10^{-4}$, gdy tłumienie Landaua jest aktywne i scharakteryzowane $L = 0.1$ (czarne krzywe) oraz dla braku tłumienia Landaua, tj. $L = 0$ (czerwone krzywe). Występowanie tłumienia Landaua blokuje płynięcie w kierunku punktu stałego. Przemiana fazowa nadal zachodzi (na co wskazuje to, że κ nadal osiąga zero lub płynie do nieskończoności), ale układ nie wykazuje niezmienniczości skalowania. Wykres wstawiony w prawym górnym rogu jest powiększeniem obszaru w którym trajektorie RG separują się.

przemianę fazową tak jak poprzednio (tj. przy braku tłumienia Landaua). Implikuje to występowanie punktu trójkrytycznego na diagramie fazowym dla temperatury T_{tri} . Zwracamy uwagę, że układ dla $T > T_{tri}$ wykazuje bardzo podobne zachowanie do sytuacji w której $L = 0$. Wartość T_{tri} wzrasta wraz ze stałą L oraz dla $T \ll T_{tri}$ wartość krytyczna parametru kontrolnego κ_0 jest w praktyce niezależna od T . Oznacza to, że linia krytyczna T_c w płaszczyźnie (κ_0, T) jest pionową linią prostą. Otrzymana linia T_c została zaprezentowana na rys. 7.7 dla kilku wartości stałej L . Dobrze widoczne jest na nim odchylenie od zachowania skalującego scharakteryzowanego przez $z = 1$ dla niskich temperatur.

Warto podkreślić, że zastosowana tutaj metoda nieperturbacyjnej RG jest całkowicie konsystentna z teorią Hertza-Millisa w kontekście typowych metalicznych QCP (gdzie współczynnik tłumienia Landaua pozostaje skończony w trakcie płynięcia RG) i dla nich rozwiązania równań płynięcia, które wykazują niezmienniczość skalowania są osiągane zarówno w przypadku $z = 2$, jak i $z = 3$ [16, 104, 106, 108]. W dodatku nieperturbacyjna renormalizacja wykorzystująca nawet bardzo proste obcięcia równań płynięcia jest zdolna do uwzględnienia fluktuacji termicznych wychodzących poza przybliżenie gaussowskie i pozwala na łatwe uwzględnienie wymiaru anomального η dla pola porządku ϕ . Jak analitycznie pokazano w pracy [106] płynięcie RG wykorzystujące schemat jednocząstkowy nieredukowalny precyzyjnie odtwarza wyniki teorii Hertza-Millisa po linearyzacji otrzymanych



Rys. 7.7: Temperatura krytyczna jako funkcja κ_0 otrzymana dla kilku wartości L . Dla wysokich temperatur linia krytyczna $T_c(\kappa_0)$ opisywana jest prawem potęgowym z wykładnikiem przesunięcia $\psi = 1/2$. Odchylenie od tego skalowania następuje poniżej progowej wartości T , która zależy od L . Wartość krytyczna κ_0 jest niezależna od T poniżej najniższej ułożonej punktu dla każdej z krzywych i w związku z tym $\ln(\kappa_0 - \kappa_0^{(0)})$ dąży do $-\infty$.

równań wokół gaussowskiego punktu krytycznego dla $T = 0$.

W omawianym w tej dysertacji problemie spotykamy się jednak z nieco inną sytuacją, gdyż współczynnik tłumienia Landaua jest proporcjonalny do ρ_0 i w związku z tym skaluje się do zera w trakcie RG dla przemiany fazowej (jak wskazuje na to równanie płynięcia dla parametru porządku ρ). Wprowadza to silną zależność propagatorów od pędów i częstości w trakcie renormalizacji, co w rezultacie powoduje sprzężenie zwrotne z płynięciem efektywnego potencjału. W efekcie otrzymany problem jest w nieunikniony sposób nieliniowy, co nie pozwala na zastosowanie zlinearyzowanego podejścia typu Hertza-Millisa.

Zakończymy ten rozdział obserwacją, że otrzymane odstępstwo od kwantowego skalowania krytycznego danego wykładnikiem dynamicznym $z = 1$, które wskazuje na możliwą przemianę I rodzaju jest widoczne jedynie dla bardzo niskich temperatur. Podkreślamy także, że otrzymane tutaj zablokowanie płynięcia RG w kierunku punktu stałego Wilsona-Fishera zostało zademonstrowane w ramach bardzo prostej parametryzacji efektywnego działania $\Gamma_k[\phi]$ oraz dla warunku początkowego będącego teorią typu ϕ^4 . W związku z tym nie możemy stwierdzić ogólności opisanej w tym paragrafie fenomenologii, gdyż jesteśmy ograniczeni poprzez przyjęte przez nas przybliżenia.

Rozdział 8

Podsumowanie

W niniejszej rozprawie rozważaliśmy własności kwantowych przemian fazowych w ultrazimnych spolaryzowanych mieszaninach gazów fermionowych o nierównych masach. Zbadaliśmy strukturę analityczną efektywnego potencjału, przy czym w sposób szczególny skupiliśmy się na własnościach rozwinięcia Landaua w granicy $T \rightarrow 0^+$, a także na możliwości otrzymania kwantowego punktu krytycznego w tym kontekście. Pokazaliśmy, że rozwinięcie Landaua jest dobrze zdefiniowane dla $T = 0$ za wyjątkiem jednowymiarowego podzbioru parametrów scharakteryzowanego równaniem $h = \zeta\mu$, które odpowiada warunkowi pokrywania się powierzchni Fermiego poszczególnych składników tworzących mieszaninę. Zademonstrowaliśmy, że na poziomie przybliżenia pola średniego występowanie kwantowego punktu krytycznego jest w ogólności wykluczone dla $d = 2$. Z kolei w trzech wymiarach znaleźliśmy oraz scharakteryzowaliśmy zbiór parametrów dla którego możliwe jest otrzymanie kwantowego punktu krytycznego na diagramie fazowym. W tej sytuacji kwantowa przemiana fazowa zachodzi między jednorodną fazą nadciekłą, a całkowicie spolaryzowanym gazem. Co więcej występowanie przemiany fazowej II rodzaju okazuje się być faworyzowane dla dużych wartości stosunku mas atomów tworzących mieszaninę $r = m_-/m_+$. W rozważaniach tych pominęliśmy możliwość występowania niejednorodnej fazy nadciekłej typu FFLO. Wykorzystując metodę nieperturbacyjnej grupy renormalizacji pokazaliśmy także, że renormalizacja efektywnego potencjału wskazuje, że otrzymany punkt krytyczny w $T = 0$ jest stabilny ze względu na fluktuacje parametru porządku (przy założeniu braku tłumienia Landaua modów kolektywnych). Realizacja takich kwantowych zjawisk krytycznych może wkrótce stać się możliwa dzięki intensywnemu rozwojowi technik doświadczalnych pozwalających na otrzymanie gazów Fermiego w jednorodnych pułapkach magnetooptycznych [94, 149].

Kolejnym aspektem prezentowanych badań dotyczących kwantowych przemian fazowych w nierównoważonych mieszaninach Fermiego jest kwestia występowania zjawisk multikrytycznych. Poprzez analizę struktury efektywnego działania dla pola porządku ϕ w fazie normalnej pokazaliśmy, że można otrzymać punkt Lifszycza zlokalizowany pomiędzy fazą normalną, fazą typu FFLO oraz jednorodną nadcieczą, który może zostać dostrojony do zerowej temperatury poprzez modyfikację długości rozpraszania. Co więcej obserwacja ta dotyczy mieszanin realizowanych eksperymentalnie oraz fizycznie istotnego doboru parametrów układu. Otrzymany w ten sposób kwantowy

punkt Lifszycy (a także jego otoczenie) wykazywałby w trzech wymiarach do tej pory niezbadaną sytuację, która potencjalnie związana byłaby z niegaussowską przemianą w zerowej temperaturze. Może to mieć ważne konsekwencje dla badanego układu, które wymagają dalszych badań (w szczególności wykorzystujących teorię renormalizacji). Na przykład kształt linii krytycznej T_c może w tym przypadku nie być już opisywany przy pomocy relacji $T_c \sim (\kappa_0 - \kappa_0^{(0)})^{z/(d+z-2)}$, lecz być w zamian kontrolowany przez wykładnik długości korelacji ν podobnie jak ma to miejsce dla dwuwymiarowego kwantowego modelu Isinga [192]. Warto zwrócić uwagę, że w przypadku punktu Lifszycy mamy dwa różne wykładniki krytyczne ($\nu_\perp$ oraz $\nu_\parallel$) charakteryzujące zachowanie funkcji korelacji [55].

Następnie zbadaliśmy własności kolektywnych wzbudzeń fononowych (tzw. modów Andersona-Bogoliubowa) związanych z łamaniem ciągłej symetrii $U(1)$. Wzbudzenia te są modami Goldstone'a i pełnią istotną rolę w opisie przemian fazowych zachodzących w badanym układzie. Szczególną uwagę poświęciliśmy problemowi występowania tłumienia Landaua w fazie uporządkowanej oraz normalnej, które ma wpływ na dynamiczne własności modów Goldstone'a. Prowadząc szczegółową analizę rozwinięcia gradientowego dla elementów macierzowych propagatora fluktuacji parowania $\mathbb{F}_q$ (otrzymanego przy wykorzystaniu przybliżenia fazy losowej, co jest równoważne z uwzględnieniem fluktuacji gaussowskich parametru porządku) pokazaliśmy obecność wkładów nielokalnych w czasie $\sim \frac{|q_0|}{|q|}$, które nie były dyskutowane w żadnych dotychczasowych badaniach. Człony te są odpowiedzialne za pojawianie się zespolonego bieguna propagatora $\mathbb{F}_q$, co oznacza występowanie tłumienia modów kolektywnych. Pokazaliśmy, że tłumienie Landaua jest aktywowane poprzez zwiększenie niezrównoważenia mieszaniny nawet w granicy $T \rightarrow 0$ (w przeciwieństwie do układów zbilansowanych, tj. $h = 0$ oraz $r = 1$). Efekt ten jest związany z występowaniem dużego niedopasowania pomiędzy powierzchniami Fermiego składników mieszaniny. Wyprowadziliśmy analityczne kryterium występowania tłumienia (patrz nierówności (6.25)) i podaliśmy jego intuicyjną interpretację odwołującą się do mechanizmu tłumienia Landaua w mieszaninach Fermiego. Wychoząc poza rozwinięcie gradientowe pokazaliśmy, że nasze przewidywania analityczne w pełni pokrywają się z współczynnikami tłumienia otrzymanymi numerycznie poprzez znalezienie zespolonych pierwiastków analitycznie przedłużonego wyznacznika macierzy odwrotnego propagatora fluktuacji parowania $\det \mathbb{F}_q^{-1}(\mathbf{q}, z_q) = 0$. Analogiczna analiza w fazie normalnej wykazała brak występowania tłumienia Landaua w przypadku niskoenergetycznych wzbudzeń bozonowych.

Jak ustaliliśmy, jedną z charakterystycznych cech badanego układu jest występowanie tłumienia Landaua, które pojawia się wyłącznie wewnątrz fazy uporządkowanej. Wyraz opisujący tłumienie Landaua ma postać $\sim \rho_0 \frac{|q_0|}{|q|}$ ($\sqrt{\rho_0}$ to parametr porządku) i pojawia się jedynie w odwrotnym propagatorze podłużnego modu σ . Tłumienie w sposób efektywny uwzględnia sprzęganie się modów kolektywnych z fermionowymi wzbudzeniami kwazicząstkowymi wzdłuż powierzchni Fermiego. Jego obecność modyfikuje dynamikę układu i typowo prowadzi do zmiany wartości dynamicznego wykładnika krytycznego z . W celu ustalenia wpływu tłumienia Landaua przeprowadziliśmy obliczenia wykorzystując nieperturbacyjne sformułowanie teorii renormalizacji. Nasze wyniki wskazują, że występowanie tłumienia zakłóca płynięcie grupy renormalizacji w kierunku rozwiązania

wykazującego niezmienniczość skalowania (związaną z występowaniem punktu stałego Wilsona-Fishera). Fizycznie oznacza to możliwe występowanie nieciągłej przemiany fazowej wywołanej poprzez sprzęganie się bozonowych modów kolektywnych (związanych z fluktuacjami parametru porządku) z fermionowymi wzbudzeniami kwazicząstkowymi. Otrzymana niestabilność pojawia się jedynie w bardzo niskich temperaturach. W wyższych temperaturach odtwarzany jest reżim krytycznego skalowania kwantowego, który jest scharakteryzowany przez wykładnik $z = 1$. Oznacza to, że tłumienie Landaua nie ma wpływu na fizyczne właściwości układu. W realistycznej sytuacji można się spodziewać, że dla T odpowiednio wysokich otrzymywane skalowanie jest analogiczne jak w przypadku kwantowego modelu Isinga dla $d = 3$, lecz zachowanie to jest obcięte w niskich temperaturach. Analogicznej niestabilności można spodziewać się także w przypadku kwantowego punktu Lifszycza, lecz problem ten wymaga bardziej wnikliwej analizy. Przy braku tłumienia Landaua w układzie obserwuje się ciągle przejście między reżimem kwantowym rządzone przez gaussowski punkt stały ($T = 0$), a sektorem w którym niezmienniczość skalowania jest związana z klasycznym punktem stałym Wilsona-Fishera ($T > 0$). Przejście między tymi zachowaniami następuje dla skali $s_{\text{cross}} \sim -\frac{1}{z} \ln T$. Otrzymywana w tym przypadku linia krytyczna $T_c(\kappa_0)$ jest dana prawem potęgowym, które jest scharakteryzowane przez wykładnik przesunięcia $\psi = z/(d + z - 2)$ w zgodzie z przewidywaniami teorii Hertza-Millisa.

Niedawno zrealizowane mieszaniny Fermiego w których występuje duża różnica mas składników stanowią potencjalnych kandydatów na eksperymentalne zbadanie problemu analizowanego w tej dysertacji. Jednym z obiecujących kandydatów jest mieszanina atomów ^{161}Dy oraz ^{40}K [185, 186], która to ze względu na występowanie szerokiego rezonansu Feshbacha [38] może być manipulowana w bardziej elastyczny sposób w porównaniu do wcześniej badanej mieszaniny ^6Li oraz ^{40}K [103, 225, 227, 239].

Zaprezentowana tutaj analiza zakładała występowanie w pełni rozwiniętego uporządkowania dalekozasięgowego. Bardzo interesującym kierunkiem dalszych badań może być próba odpowiedzi na pytanie w jaki sposób zmieni się zachowanie układu przy uwzględnieniu efektów fluktuacji w przypadku niskowymiarowym. W tego typu układach dalekozasięgowe uporządkowanie zostaje zdegradowane do porządku algebraicznego i otrzymuje się fazę Kosterlitz-Thoulessa. Innym interesującym zagadnieniem jest kwestia obserwowanego widma wzbudzeń dla przypadku w którym uwzględnione są także fluktuacje parametru porządku typu FFLO, które charakteryzują się niezerowym całkowitym pędem środka masy $\mathbf{Q}$ dla par Coopera. Mimo iż badania teoretyczne sugerują niestabilność nadcieczy typu FFLO w skończonych temperaturach to nadal prawdopodobnie są one obecne w stanie podstawowym układu [105, 178, 206, 245]. Kolejnym interesującym problemem jest zagadnienie dotyczące wpływu niezerowności mieszaniny na tłumienie modu amplitudowego (Higgsa), który został niedawno zaobserwowany eksperymentalnie [18, 91, 125, 134, 195].

Problem dotyczący kwantowych punktów krytycznych w układach nadciekłych fermionów stanowi nadal w dużej mierze nie zgłębioną dziedzinę badań. W tego typu układach nie można pominąć sprzęgania się fermionowych oraz bozonowych stopni swobody. Dotyczy to zarówno jednorodnych nadcieczy i odpowiadającej im kwantowej krytyczności (która była dyskutowana w tej roz-

prawie), ale także hipotetycznych kwantowych punktów krytycznych występujących w niejednorodnych stanach typu FFLO [170, 172]. Pełne zrozumienie takich układów stanowi interesujące wyzwanie w którym ważne jest wzajemne oddziaływanie fluktuacji fermionowych oraz bozonowych, a także istotne jest uwzględnienie aspektów topologicznych w przypadku faz Kosterlitz-Thoulessa w dwóch wymiarach. W szczególności zbadanie selfenergii fermionowych może prowadzić do zidentyfikowania obszaru na diagramie fazowym w pobliżu kwantowego punktu krytycznego w którym układ wykazuje cechy cieczy nielandauowskiej. Przykładowy mechanizm prowadzący do tego typu zachowania w przypadku nie zrównoważonych mieszanin Fermiego w $d = 2$ został opisany w pracy [219].

Dodatek A

Sumy Matsubary

A.1 Suma typu $S = \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\beta} \sum_n \ln(ik_n - E_k^\sigma)$

Policzymy fermionową sumę $S = \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\beta} \sum_n (ik_n - E_k^\sigma) e^{i\omega_n 0^+}$ rozważając następującą całkę po konturze przedstawionym na rys. A.1:

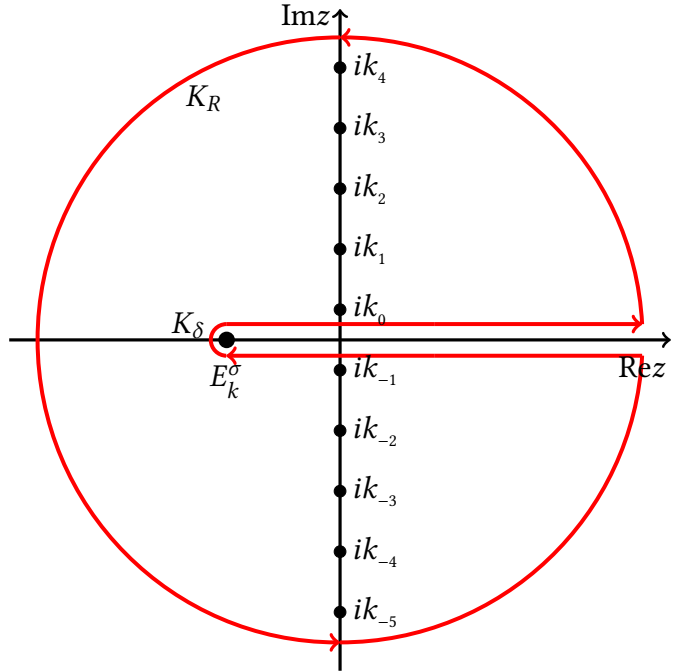
$$I_{\mathbf{k}} = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \ln(z - E_k^\sigma) f(z) e^{z0^+}, \quad (\text{A.1})$$

przy czym $f(z) = (\exp(\beta z) + 1)^{-1}$ to rozkład Fermiego-Diraca. Funkcja $\ln(z - E_k^\sigma)$ posiada cięcie (ang. *branch cut*) wzdłuż osi rzeczywistej dla $\text{Re} z > E_k^\sigma$, co sprawia, że konieczne jest wykorzystanie konturu C przedstawionego na rys. A.1. Przekroczenie cięcia powoduje przejście na inną gałąź badanej funkcji. Czynniki uzbiegające $e^{ik_n 0^+}$ sprawia, że całki po dużym okręgu o promieniu $R \rightarrow \infty$ i po małym półokręgu o promieniu $\delta \rightarrow 0$ znikają, co można łatwo oszacować podstawiając $z = Re^{i\varphi}$ dla dużego okręgu oraz odpowiednio $z = \delta e^{i\varphi}$ dla małego półokręgu.

Bieguny $f(z)$ znajdujące się wewnątrz konturu C są dane przez $z_n = ik_n$, gdzie $k_n = \frac{2\pi}{\beta}(n + \frac{1}{2})$ są fermionowymi częstościami Matsubary. Oznacza to, że residua funkcji podcałkowej $g(z) = \ln(z - E_k^\sigma) f(z)$ mają postać $\text{Res}_{z=z_n} g(z) = -\frac{1}{2\pi i \beta} \ln(ik_n - E_k^\sigma)$. Korzystając z twierdzenia Cauchy'ego o residuach otrzymujemy, że

$$I_{\mathbf{k}} = 2\pi i \sum_{z_n} \text{Res}_{z=z_n} g(z) = -\frac{1}{\beta} \sum_n \ln(ik_n - E_k^\sigma), \quad (\text{A.2})$$

czyli $S = - \int_{\mathbf{k}} I_{\mathbf{k}}$.



Rys. A.1: Kontur całkowania.

Z drugiej strony możemy wprost wykonać całkę I_k korzystając z tego, że jedynie całkowanie po dwóch półprostych od E_k^σ do ∞ powyżej i poniżej osi rzeczywistej będzie prowadziło do niezerowego wkładu. Obserwacja ta prowadzi do zależności

$$\begin{aligned} I_k &= \int_{E_k^\sigma}^{\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi i} \ln(\epsilon + i0^+ - E_k^\sigma) f(\epsilon) + \int_{\infty}^{E_k^\sigma} \frac{d\epsilon}{2\pi i} \ln(\epsilon - i0^+ - E_k^{(+)\sigma}) f(\epsilon) \\ &= \int_{E_k^\sigma}^{\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi i} f(\epsilon) \left[\ln(\epsilon + i0^+ - E_k^\sigma) - c.c. \right] \end{aligned} \quad (A.3)$$

Korzystając z tożsamości $f(\epsilon) = -\frac{1}{\beta} \frac{d}{d\epsilon} \ln |1 + \exp(-\beta\epsilon)|$ i wykonując całkowanie przez części dostajemy

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{1}{\beta} \int_{E_k^\sigma}^{\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi i} \ln |1 + e^{-\beta\epsilon}| \frac{d}{d\epsilon} \left[\ln(\epsilon + i0^+ - E_k^\sigma) - c.c. \right] \\ &= \frac{1}{\beta} \int_{E_k^\sigma}^{\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi i} \ln |1 + e^{-\beta\epsilon}| \left[-2\pi i \delta(\epsilon - E_k^\sigma) \right] \\ &= -\frac{1}{\beta} \ln(1 + e^{-\beta E_k^\sigma}), \end{aligned} \quad (A.4)$$

czyli ostatecznie

$$S = \int_k \frac{1}{\beta} \sum_n \ln(ik_n - E_k^\sigma) = \frac{1}{\beta} \int_k \ln(1 + e^{-\beta E_k^\sigma}). \quad (A.5)$$

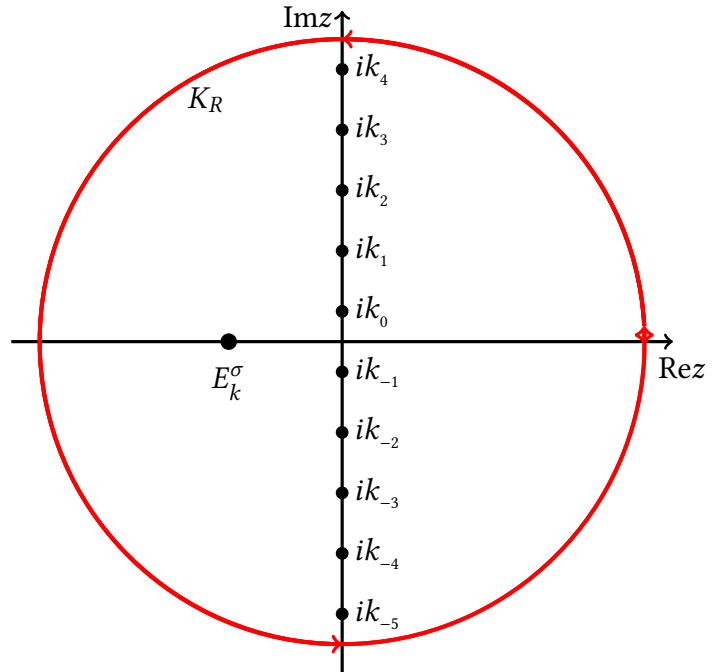
A.2 Suma typu $S = \frac{1}{\beta} \sum_n (ik_n - E_k^\sigma)^{-1}$

Wykonamy teraz sumę typu $S = \frac{1}{\beta} \sum_n (ik_n - E_k^\sigma)^{-1} e^{i\omega_n 0^+}$, którą zamienimy na całkę po konturze o postaci

$$I_k = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{z - E_k^\sigma} e^{z0^+}, \quad (A.6)$$

przy czym jako kontur całkowania wybieramy okrąg o promieniu R jak na rys. A.2. Całka po okręgu znika eksponencjalnie dzięki czynnikowi $e^{z0^+} f(z)$.

Rozkład Fermiego-Diraca posiada bieguny w punktach dla których $e^{\beta z} = -1$, które prowadzi do $z_n = ik_n$, gdzie $k_n = \frac{2\pi}{\beta}(n + 1/2)$ to fermionowe częstości Matsubary. Rozważana funkcja $h(z) = \frac{f(z)}{z - E_k^\sigma}$ ma w tych punktach residua wynoszące $\text{Res}_{z=z_n} h(z) = -\frac{1}{2\pi i \beta} \frac{1}{z_n - E_k^\sigma}$. Poza tym funkcja $h(z)$ posiada biegun jeszcze w punkcie $z' = E_k^\sigma$, któremu odpowiada residuum $\text{Res}_{z=z'} h(z) =$



Rys. A.2: Kontur całkowania.

$f(z')/2\pi i$. Oznacza to, że korzystając z twierdzenia o residuach dostajemy, że

$$I_k = 2\pi i \left[\sum_{z_n} \text{Res}_{z=z_n} h(z) + \text{Res}_{z=z'} h(z) \right] = -\frac{1}{\beta} \sum_n \frac{1}{ik_n - E_k^\sigma} + f(E_k^\sigma) = 0, \quad (\text{A.7})$$

czyli $S = f(E_k^\sigma)$. Warto tu podkreślić, że w przypadku, gdy sumę wykonujemy dla funkcji $(ik_n - E_k^\sigma)^{-1}$ w której ik_n zostało zastąpione przez $ik_n + iq_m$ wynik pozostaje ten sam. Dzieje się tak, gdyż $e^{iq_m\beta} = 1$, czyli $e^{i(q_m+k_n)\beta} = e^{iq_m\beta} e^{ik_n\beta} = -1$.

Dodatek B

Przedłużenie analityczne $M_{ij}(\mathbf{q}, iq_0)$

Przedłużenie analityczne elementów macierzowych $M_{ij}(\mathbf{q}, iq_0)$ odwrotnego propagatora fluktuacji parowania $\mathbb{F}_q^{-1}$ z górnej półpłaszczyzny zespolonej do dolnej ma postać

$$\tilde{M}_{ij}(\mathbf{q}, \omega - i\epsilon) = M_{ij}(\mathbf{q}, \omega - i\epsilon) + 2\pi i A_{ij}(\mathbf{q}, \omega + i\epsilon), \quad (\text{B.1})$$

gdzie $A_{ij}(\mathbf{q}, \omega + i\epsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} M_{ij}(\mathbf{q}, \omega + i\epsilon)$ oraz $\epsilon > 0$. Możemy ten wynik uzasadnić odwołując się do analizy zaprezentowanej w pracy [144]. W celu zilustrowania tej procedury dla prostoty przyjmujemy, że $m_+ = m_-$.

Dla niskoenergetycznych wzbudzeń kolektywnych wyrazami w $M_{ij}(\mathbf{q}, iq_0)$ odpowiedzialnymi za pojawianie się zespolonego bieguna propagatora fluktuacji parowania są te w których występuje czynnik $[f(E_{k+q/2}^\pm) - f(E_{k-q/2}^\pm)]$. Gdy $|\mathbf{q}|$ jest małe, wtedy wkłady pochodzące od tych członów są jednakowe dla wszystkich elementów macierzowych (patrz podrozdział 6.2.1). Wkłady dla retardowanych $M_{ij}^{(R)}$ (tj. $iq_0 \mapsto \omega + i\epsilon$) mają postać

$$\delta M(\mathbf{q}, \omega + i\epsilon) = -2 \int_{\mathbf{k}} u_k^2 v_k^2 \left(\frac{\nabla_{\mathbf{k}} f(E_k^+) \cdot \mathbf{q}}{\omega + i\epsilon + 2\mathbf{q} \cdot \mathbf{w}} - \frac{\nabla_{\mathbf{k}} f(E_k^-) \cdot \mathbf{q}}{\omega + i\epsilon - 2\mathbf{q} \cdot \mathbf{w}} \right), \quad (\text{B.2})$$

gdzie $\mathbf{w} = \nabla_{\mathbf{k}} E_k$. Oznaczenie δM należy rozumieć jako wkład do M_{ij} , który jest odpowiedzialny za powstawanie zespolonego bieguna propagatora fluktuacji parowania. W powyższym równaniu możemy wykonać całkowanie po kątach co prowadzi do wyrażenia

$$\begin{aligned} \delta M(\mathbf{q}, \omega + i\epsilon) = & - \int \frac{dk}{(2\pi)^2} u_k^2 v_k^2 [f'(E_k^+) + f'(E_k^-)] \times \\ & \times \left(2 + \frac{\omega}{2q\mathbf{w}} \ln \left(\frac{\omega + 2q\mathbf{w} + i\epsilon}{\omega - 2q\mathbf{w} + i\epsilon} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Przedłużenie analityczne funkcji δM do dolnej półpłaszczyzny zespolonej, które będziemy oznaczać jako $\delta \tilde{M}$, możemy wykonać poprzez wykorzystanie własności analitycznych funkcji $\ln z$, która posiada cięcie wzdłuż osi rzeczywistej dla $\text{Re} z > 0$.

Logarytm występujący w awansowanym elemencie macierzowym $\delta M(\mathbf{q}, \omega - i\epsilon)$ należy obliczyć na innej powierzchni Riemanna, co prowadzi do

$$\ln(\omega - i\epsilon - 2q\mathbf{w}) = \ln |\omega - i\epsilon - 2q\mathbf{w}| + i [\arg(\omega - i\epsilon - 2q\mathbf{w}) + 2\pi\theta(1 - x)], \quad (\text{B.4})$$

dla $x = \frac{\omega}{2q\omega} > 0$, lub

$$\ln(\omega - i\epsilon - 2q\omega) = \ln|\omega - i\epsilon - 2q\omega| + i[\arg(\omega - i\epsilon - 2q\omega) + 2\pi\theta(1+x)], \quad (\text{B.5})$$

dla $x = \frac{\omega}{2q\omega} < 0$. Funkcja schodkowa w powyższych wyrażeniach sprawdza czy przy przechodzeniu na dolną półpłaszczyznę zespoloną przekraczamy cięcie funkcji $\ln z$, tj. czy $\text{Re} z > 0$, co skutkuje zmianą wartości logarytmu o $2\pi i$. Prosta algebra prowadzi do wniosku, że powyższa procedura jest równoważna zdefiniowaniu przedłużenia analitycznego retardowanego elementu macierzowego na dolną półpłaszczyznę zespoloną $\delta\tilde{M}(\mathbf{q}, \omega - i\epsilon)$ jako

$$\delta\tilde{M}(\mathbf{q}, \omega - i\epsilon) = \delta M(\mathbf{q}, \omega - i\epsilon) - 2i\text{Im}\delta M(\mathbf{q}, \omega + i\epsilon), \quad (\text{B.6})$$

przy czym człon $2i\text{Im}\delta M(\mathbf{q}, \omega + i\epsilon)$ uwzględnia skok wartości funkcji przy przechodzeniu na inną płaszczyznę Riemanna. Równanie (B.6) prowadzi do relacji (B.1), którą wykorzystaliśmy do numerycznego wyznaczenia zespolonego bieguna propagatora $\mathbb{F}_q$.

Otrzymana własność jest spełniona także dla funkcji Greena, co wiąże się z występowaniem logarytmicznej osobliwości wzdłuż osi rzeczywistej [157]. W tym przypadku korzystając z tego, że $G_{ret} = G_{adv}^*$ [1] otrzymujemy, że przedłużenie analityczne retardowanej funkcji Greena na dolną półpłaszczyznę $\tilde{G}_{ret}$ wynosi

$$\tilde{G}_{ret}(\omega) = G_{adv}(\omega) + [G_{ret}^*(\omega) - G_{ret}(\omega)] = G_{adv}(\omega) + 2\pi i A(\omega), \quad (\text{B.7})$$

gdzie $A(\omega) = -\frac{1}{\pi}\text{Im}G_{ret}(\omega)$ jest funkcją spektralną, przy czym $[G_{ret}^*(\omega) - G_{ret}(\omega)] = -2i\text{Im}G_{ret}(\omega)$ jest skokiem funkcji G_{ret} przy przechodzeniu na dolną półpłaszczyznę zespoloną i jest on niezerowy tylko, gdy przechodzimy przez cięcie tej funkcji [157].

Dodatek C

Wyprowadzenie $\beta_\kappa^{qu,\sigma}$

Przedstawimy tutaj wyprowadzenie wkładu kwantowego $\beta_\kappa^{qu,\sigma}$ do równania płynięcia $\dot{\kappa}_k$. Pozostałe wkłady wyprowadza się analogicznie. Wykonanie całek występujących w tym przypadku jest najbardziej skomplikowane z tego powodu decydujemy się jedynie na analizę tego wyrazu.

Wyjściowe równanie płynięcia ma postać

$$\dot{\rho}_0 = \frac{1}{2} \int_q \left[3\dot{R}^\sigma \gamma_{\sigma,\sigma}^{-2}(\rho_0) + \dot{R}^\pi \gamma_{\pi\pi}^{-2}(\rho_0) \right], \quad (C.1)$$

gdzie pomijamy indeks k dla płynących stałych ρ_0 oraz λ . Pierwszy wkład w powyższej całce jest przedmiotem naszego zainteresowania. Przeskalowujemy $\rho_0 = Z_\pi^{-1} k^{d-2} \kappa$, co prowadzi do relacji $\dot{\kappa} = (2-d)\kappa + Z_\pi k^{2-d} \dot{\rho}_0$. Dzięki temu możemy napisać, że

$$\beta_\kappa^{qu,\sigma} = 3Z_\pi k^{2-d} T \sum_{q_0 > 0} \int_q \dot{R}^\sigma \gamma_{\sigma,\sigma}^{-2}(\rho_0). \quad (C.2)$$

Przeskalowując $\gamma_{\sigma,\sigma} = Z_\sigma k^2 \tilde{\gamma}_{\sigma,\sigma}$, wykorzystując funkcję obcięcia Litima $R^\sigma = \mathcal{X}_\sigma \theta(\mathcal{X}_\sigma)$, gdzie $\mathcal{X}_\sigma = Z_\sigma (k^2 - q^2)^2 - Z_\sigma^0 q_0^2 - L\rho_0 \frac{|q_0|}{|q|}$, a także zamieniając zmienne całkowania na $y = \frac{q^2}{k^2}$ otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \beta_\kappa^{qu,\sigma} = & \frac{3A_d T}{2\tilde{Z}Z_\sigma} \sum_{q_0 > 0} \int_0^\infty dy y^{d/2-1} \left[y + \frac{Z_\sigma^0}{Z_\sigma} q_0^2 + L \frac{k^{d-5}}{Z_\sigma Z_\pi} \kappa \frac{|q_0|}{\sqrt{y}} + \frac{2u\kappa}{\tilde{Z}} + \frac{R^\sigma}{Z_\sigma k^2} \right]^{-2} \times \\ & \times \left[2Z_\sigma k^2 - \frac{Lk^{d-5}}{Z_\pi} (\dot{\kappa} + (d-2)\kappa) \frac{|q_0|}{\sqrt{y}} \right] \theta \left(1 - y - \frac{Z_\sigma^0 q_0^2}{Z_\sigma k^2} - \frac{Lk^{d-5}}{Z_\sigma Z_\pi} \kappa \frac{|q_0|}{\sqrt{y}} \right), \end{aligned} \quad (C.3)$$

gdzie $\tilde{Z} = Z_\sigma/Z_\pi$, a $A_d = \frac{S^{d-1}}{(2\pi)^d}$ jest czynnikiem pochodzącym z miary całki oraz całkowania po kątach.

Całkowanie w powyższym wyrażeniu prowadzi do niezerowego wyniku pod warunkiem, że argument funkcji schodkowej jest dodatni, co można zapisać w postaci nierówności

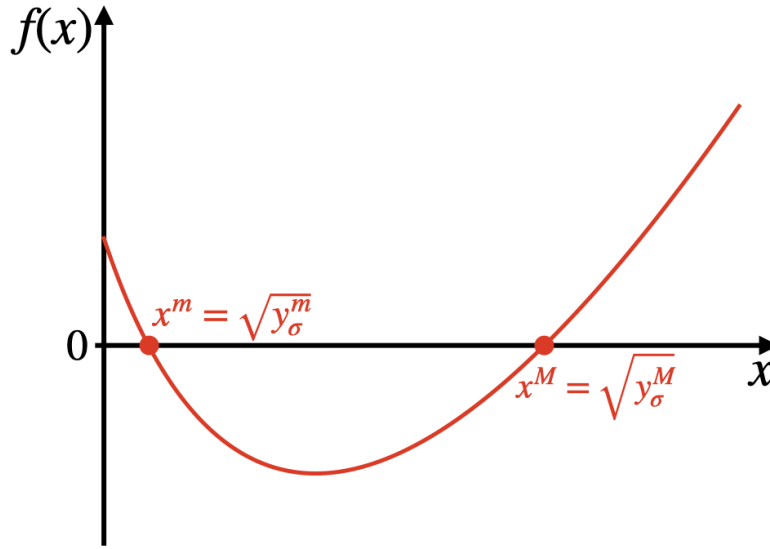
$$x^3 - \underbrace{\left(1 - \frac{Z_\sigma^0 q_0^2}{Z_\sigma k^2} \right)}_a x + \underbrace{\frac{Lk^{d-5}}{Z_\sigma Z_\pi} \kappa q_0}_{b > 0} < 0, \quad (C.4)$$

gdzie $x = \sqrt{y} \in [0, \infty[$, poza tym widzimy, że stała b jest dodatnia w naszym przypadku. Możemy zbadać w jakich warunkach spełniona jest powyższa nierówność analizując funkcję $f(x) = x^3 -$

$ax + b$. Widzimy, że rozważana funkcja jest dodatnia na krańcach swej dziedziny, tj. $f(0) > 0$ oraz $f(\infty) > 0$. Funkcja ta ma minimum w $x_{min} = \sqrt{\frac{a}{3}}$ co oznacza, że całka w równaniu (C.3) posiada niezerową wartość na pewnym przedziale $[y_\sigma^m, y_\sigma^M]$, gdy $f(x_{min}) < 0$, co prowadzi do warunku, że $a > 3(2)^{-3/2}b^{2/3}$, co można zapisać jako

$$q_0^2 \frac{Z_\sigma^0}{Z_\sigma k^2} + 3(2)^{-2/3} \left(\frac{LZ_\pi^{-2}}{\tilde{Z}} k^{d-5} \kappa_k q_0 \right)^{2/3} - 1 < 0. \quad (C.5)$$

Nierówność ta pozwala znaleźć wartości q_0 dla których funkcja schodkowa w równaniu (C.3) jest niezerowa i największą wartość ją spełniającą oznaczamy jako $\tilde{q}_0^\sigma$.



Rys. C.1: Schematyczna ilustracja typowego kształtu funkcji $f(x) = x^3 - ax + b$. Na wykresie zaznaczono granice całkowania, które prowadzą do niezerowej wartości całki występującej w $\beta_\kappa^{qu,\sigma}$.

Granice całkowania dla których argument funkcji schodkowej jest niezerowy wyznaczamy jako dodatnie pierwiastki równania (patrz rys. C.1)

$$x^3 - \left(1 - \frac{Z_\sigma^0 q_0^2}{Z_\sigma k^2} \right) x + \frac{Lk^{d-5}}{Z_\sigma Z_\pi} \kappa q_0 = 0. \quad (C.6)$$

Oba omawiane warunki zostały podane w głównej części tekstu (patrz równania (7.38) oraz (7.39)). Co więcej możemy zaobserwować, że gdy znajdujemy się w przedziale zadanym powyższymi warunkami także funkcja schodkowa w propagatorze $\gamma_{\sigma,\sigma}^{-1}(\rho_0)$ jest równa jedności, co prowadzi do wyrażenia

$$\beta_\kappa^{qu,\sigma} = \frac{3A_d T}{2\tilde{Z}Z_\sigma} \sum_{q_0 > 0}^{\tilde{q}_0^\sigma} \int_{y_\sigma^m}^{y_\sigma^M} dy y^{d/2-1} \frac{2Z_\sigma k^2 - \frac{Lk^{d-5}}{Z_\pi} (\dot{\kappa} + (d-2)\kappa) \frac{|q_0|}{\sqrt{y}}}{\left[1 + \frac{2u\kappa}{\tilde{Z}} \right]^2}, \quad (C.7)$$

co po wykonaniu całkowania po y prowadzi do równania (7.36). W analogiczny sposób możemy wykonać całkowanie w pozostałych członach zarówno w równaniu $\dot{\kappa}$ oraz $\dot{u}$.

Bibliografia

- [1] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, I. E. Dzyaloshinski. *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*. Courier Corporation, 2012.
- [2] A. Altland, B. D. Simons. *Condensed Matter Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, wydanie 2, 2010.
- [3] E. Altman, E. Demler, M. D. Lukin. Probing many-body states of ultracold atoms via noise correlations. *Phys. Rev. A*, 70(1):013603, 2004.
- [4] A. Altmeyer, S. Riedl, C. Kohstall, M. J. Wright, R. Geursen, M. Bartenstein, C. Chin, J. H. Denschlag, R. Grimm. Precision Measurements of Collective Oscillations in the BEC-BCS Crossover. *Phys. Rev. Lett.*, 98(4):040401, 2007.
- [5] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell. Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor. *Science*, 269(5221):198–201, 1995.
- [6] P. W. Anderson. Random-Phase Approximation in the Theory of Superconductivity. *Phys. Rev.*, 112(6):1900–1916, 1958.
- [7] P. W. Anderson. More Is Different. *Science*, 177(4047):393–396, 1972.
- [8] P. W. Anderson. Superconductivity in High Tc Cuprates: The Cause is No Longer A Mystery. *Phys. Scr.*, 2002(T102):10, 2002.
- [9] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle. Observation of Interference Between Two Bose Condensates. *Science*, 275(5300):637–641, 1997.
- [10] N. W. Ashcroft, N. Mermin. *Fizyka ciała stałego*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 1986.
- [11] J. E. Baarsma, J. Armaitis, R. A. Duine, H. T. C. Stoof. Polarons in extremely polarized Fermi gases: The strongly interacting ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ mixture. *Phys. Rev. A*, 85(3):033631, 2012.
- [12] J. E. Baarsma, K. B. Gubbels, H. T. C. Stoof. Population and mass imbalance in atomic Fermi gases. *Phys. Rev. A*, 82(1):013624, 2010.
- [13] J. E. Baarsma, H. T. C. Stoof. Inhomogeneous superfluid phases in 6 Li- 40 K mixtures at unitarity. *Phys. Rev. A*, 87(6):063612, 2013.
- [14] J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer. Theory of Superconductivity. *Phys. Rev.*, 108(5):1175–1204, 1957.

- [15] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. H. Denschlag, R. Grimm. Collective Excitations of a Degenerate Gas at the BEC-BCS Crossover. *Phys. Rev. Lett.*, 92(20):203201, 2004.
- [16] J. Bauer, P. Jakubczyk, W. Metzner. Critical temperature and Ginzburg region near a quantum critical point in two-dimensional metals. *Phys. Rev. B*, 84(7):075122, 2011.
- [17] J. G. Bednorz, K. A. Müller. Possible high T_c superconductivity in the BaLaCuO system. *Z. Physik B - Condensed Matter*, 64(2):189–193, 1986.
- [18] A. Behrle, T. Harrison, J. Kombe, K. Gao, M. Link, J.-S. Bernier, C. Kollath, M. Köhl. Higgs mode in a strongly interacting fermionic superfluid. *Nature Physics*, 14(8):781–785, 2018.
- [19] D. Belitz, T. R. Kirkpatrick. Fluctuation-Driven Quantum Phase Transitions in Clean Itinerant Ferromagnets. *Phys. Rev. Lett.*, 89(24):247202, 2002.
- [20] D. Belitz, T. R. Kirkpatrick, T. Vojta. How generic scale invariance influences quantum and classical phase transitions. *Rev. Mod. Phys.*, 77(2):579–632, 2005.
- [21] J. Berges, N. Tetradis, C. Wetterich. Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics. *Physics Reports*, 363(4):223–386, 2002.
- [22] D. Bitko, T. F. Rosenbaum, G. Aeppli. Quantum Critical Behavior for a Model Magnet. *Phys. Rev. Lett.*, 77(5):940–943, 1996.
- [23] I. Bloch, J. Dalibard, S. Nascimbène. Quantum simulations with ultracold quantum gases. *Nature Physics*, 8(4):267–276, 2012.
- [24] I. Bloch, J. Dalibard, W. Zwerger. Many-body physics with ultracold gases. *Rev. Mod. Phys.*, 80(3):885–964, 2008.
- [25] I. Boettcher, J. Braun, T. K. Herbst, J. M. Pawłowski, D. Roscher, C. Wetterich. Phase structure of spin-imbalanced unitary Fermi gases. *Phys. Rev. A*, 91(1):013610, 2015.
- [26] I. Boettcher, T. K. Herbst, J. M. Pawłowski, N. Strodthoff, L. von Smekal, C. Wetterich. Sarma phase in relativistic and non-relativistic systems. *Physics Letters B*, 742:86–93, 2015.
- [27] I. Boettcher, I. F. Herbut. Critical phenomena at the complex tensor ordering phase transition. *Phys. Rev. B*, 97(6):064504, 2018.
- [28] N. N. Bogoljubov, V. V. Tolmachov, D. V. Širkov. A New Method in the Theory of Superconductivity. *Fortschritte der Physik*, 6(11-12):605–682, 1958.
- [29] T. Bourdel, L. Khaykovich, J. Cubizolles, J. Zhang, F. Chevy, M. Teichmann, L. Tarruell, S. J. J. M. F. Kokkelmans, C. Salomon. Experimental Study of the BEC-BCS Crossover Region in Lithium 6. *Phys. Rev. Lett.*, 93(5):050401, 2004.
- [30] D. Boyanovsky, H. de Vega, D. Schwarz. Phase Transitions in the Early and Present Universe. *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 56(1):441–500, 2006.

- [31] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, R. G. Hulet. Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 75(9):1687–1690, 1995.
- [32] H. Bruus, K. Flensberg. *Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics: An Introduction*. Oxford Graduate Texts. Oxford University Press, Oxford, New York, 2004.
- [33] T. M. Brzozowski, M. Maczynska, M. Zawada, J. Zachorowski, W. Gawlik. Time-of-flight measurement of the temperature of cold atoms for short trap-probe beam distances. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 4(1):62–66, 2002.
- [34] H. Caldas, A. L. Mota, R. L. S. Farias, L. A. Souza. Superfluidity in two-dimensional imbalanced Fermi gases. *J. Stat. Mech.*, 2012(10):P10019, 2012.
- [35] J. Cardy. *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*. Cambridge Lecture Notes in Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [36] F. Chevy, C. Mora. Ultra-cold polarized Fermi gases. *Rep. Prog. Phys.*, 73(11):112401, 2010.
- [37] C. Chin, M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, J. H. Denschlag, R. Grimm. Observation of the Pairing Gap in a Strongly Interacting Fermi Gas. *Science*, 305(5687):1128–1130, 2004.
- [38] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, E. Tiesinga. Feshbach resonances in ultracold gases. *Rev. Mod. Phys.*, 82(2):1225–1286, 2010.
- [39] A. Chlebicki, P. Jakubczyk. Criticality of the $O(2)$ model with cubic anisotropies from nonperturbative renormalization. *Phys. Rev. E*, 100(5):052106, 2019.
- [40] S. Chu, L. Hollberg, J. E. Bjorkholm, A. Cable, A. Ashkin. Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 55(1):48–51, 1985.
- [41] L. Classen, I. F. Herbut, M. M. Scherer. Fluctuation-induced continuous transition and quantum criticality in Dirac semimetals. *Phys. Rev. B*, 96(11):115132, 2017.
- [42] R. W. Cline, D. A. Smith, T. J. Greytak, D. Kleppner. Magnetic Confinement of Spin-Polarized Atomic Hydrogen. *Phys. Rev. Lett.*, 45(26):2117–2120, 1980.
- [43] R. Combescot, M. Y. Kagan, S. Stringari. Collective mode of homogeneous superfluid Fermi gases in the BEC-BCS crossover. *Phys. Rev. A*, 74(4):042717, 2006.
- [44] M. Continentino. *Quantum Scaling in Many-Body Systems: An Approach to Quantum Phase Transitions*. Cambridge University Press, Cambridge, wydanie 2, 2017.
- [45] M. A. Continentino. Local criticality close to a quantum Lifshitz point. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 272-276:231–233, 2004.
- [46] L. N. Cooper. Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas. *Phys. Rev.*, 104(4):1189–1190, 1956.
- [47] N. Cooper, J. Dalibard, I. Spielman. Topological bands for ultracold atoms. *Rev. Mod. Phys.*, 91(1):015005, 2019.

- [48] E. A. Cornell, C. E. Wieman. Nobel Lecture: Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments. *Rev. Mod. Phys.*, 74(3):875–893, 2002.
- [49] E. Dagotto. Correlated electrons in high-temperature superconductors. *Rev. Mod. Phys.*, 66(3):763–840, 1994.
- [50] J. Dalibard, F. Gerbier, G. Juzeliūnas, P. Öhberg. Colloquium: Artificial gauge potentials for neutral atoms. *Rev. Mod. Phys.*, 83(4):1523–1543, 2011.
- [51] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle. Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 75(22):3969–3973, 1995.
- [52] T. Debelhoir, N. Dupuis. Critical region of the superfluid transition in the BCS-BEC crossover. *Phys. Rev. A*, 93(2):023642, 2016.
- [53] B. Delamotte. An Introduction to the Nonperturbative Renormalization Group. A. Schwenk, J. Polonyi, redaktorzy, *Renormalization Group and Effective Field Theory Approaches to Many-Body Systems*, Lecture Notes in Physics, strony 49–132. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012.
- [54] B. DeMarco, D. S. Jin. Onset of Fermi Degeneracy in a Trapped Atomic Gas. *Science*, 285(5434):1703–1706, 1999.
- [55] H. W. Diehl. Critical Behavior at m -axial Lifshitz points. *Acta Phys. Slovaca*, 54(4):271 – 283, 2002.
- [56] H. W. Diehl, M. A. Shpot, R. K. P. Zia. Relevance of space anisotropy in the critical behavior of m -axial Lifshitz points. *Phys. Rev. B*, 68(22):224415, 2003.
- [57] R. B. Diener, R. Sensarma, M. Randeria. Quantum fluctuations in the superfluid state of the BCS-BEC crossover. *Phys. Rev. A*, 77(2):023626, 2008.
- [58] M. Drechsler, W. Zwerger. Crossover from BCS-superconductivity to Bose-condensation. *Annalen der Physik*, 504(1):15–23, 1992.
- [59] M. Dressel. Quantum criticality in organic conductors? Fermi liquid versus non-Fermi-liquid behaviour. *J. Phys.: Condens. Matter*, 23(29):293201, 2011.
- [60] N. Dupuis, L. Canet, A. Eichhorn, W. Metzner, J. M. Pawłowski, M. Tissier, N. Wschebor. The nonperturbative functional renormalization group and its applications. *Physics Reports*, 2021.
- [61] D. M. Eagles. Possible Pairing without Superconductivity at Low Carrier Concentrations in Bulk and Thin-Film Superconducting Semiconductors. *Phys. Rev.*, 186(2):456–463, 1969.
- [62] J. M. Edge, N. R. Cooper. Collective modes as a probe of imbalanced Fermi gases. *Phys. Rev. A*, 81(6):063606, 2010.
- [63] J. R. Engelbrecht, M. Randeria, C. A. R. Sáde Melo. BCS to Bose crossover: Broken-symmetry state. *Phys. Rev. B*, 55(22):15153–15156, 1997.
- [64] K. Essafi, J.-P. Kownacki, D. Mouhanna. Nonperturbative renormalization group approach to Lifshitz critical behaviour. *EPL*, 98(5):51002, 2012.

- [65] U. Fano. Effects of Configuration Interaction on Intensities and Phase Shifts. *Phys. Rev.*, 124(6):1866–1878, 1961.
- [66] A. E. Feiguin, M. P. A. Fisher. Exotic Paired States with Anisotropic Spin-Dependent Fermi Surfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 103(2):025303, 2009.
- [67] H. Feshbach. Unified theory of nuclear reactions. *Annals of Physics*, 5(4):357–390, 1958.
- [68] H. Feshbach. A unified theory of nuclear reactions. II. *Annals of Physics*, 19(2):287–313, 1962.
- [69] A. L. Fetter, J. D. Walecka. *Quantum Theory of Many-Particle Systems*. Courier Corporation, 2012.
- [70] S. Floerchinger, M. M. Scherer, C. Wetterich. Modified Fermi sphere, pairing gap, and critical temperature for the BCS-BEC crossover. *Phys. Rev. A*, 81(6):063619, 2010.
- [71] C. J. Foot. *Atomic Physics*. Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, 2005.
- [72] D. G. Fried, T. C. Killian, L. Willmann, D. Landhuis, S. C. Moss, D. Kleppner, T. J. Greytak. Bose-Einstein Condensation of Atomic Hydrogen. *Phys. Rev. Lett.*, 81(18):3811–3814, 1998.
- [73] P. Fulde, R. A. Ferrell. Superconductivity in a Strong Spin-Exchange Field. *Phys. Rev.*, 135(3A):A550–A563, 1964.
- [74] J. P. Gaebler, J. T. Stewart, T. E. Drake, D. S. Jin, A. Perali, P. Pieri, G. C. Strinati. Observation of pseudogap behaviour in a strongly interacting Fermi gas. *Nature Physics*, 6(8):569–573, 2010.
- [75] A. L. Gaunt, T. F. Schmidutz, I. Gotlibovych, R. P. Smith, Z. Hadzibabic. Bose-Einstein Condensation of Atoms in a Uniform Potential. *Phys. Rev. Lett.*, 110(20):200406, 2013.
- [76] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari. Theory of ultracold atomic Fermi gases. *Rev. Mod. Phys.*, 80(4):1215–1274, 2008.
- [77] N. Goldenfeld. *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*. CRC Press, 1992.
- [78] N. Goldenfeld, C. Woese. Life is Physics: Evolution as a Collective Phenomenon Far From Equilibrium. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 2(1):375–399, 2011.
- [79] J. Goldstone. Field theories with «Superconductor» solutions. *Nuovo Cim*, 19(1):154–164, 1961.
- [80] J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg. Broken Symmetries. *Phys. Rev.*, 127(3):965–970, 1962.
- [81] M. Greiner, C. A. Regal, D. S. Jin. Emergence of a molecular Bose-Einstein condensate from a Fermi gas. *Nature*, 426(6966):537–540, 2003.
- [82] G. F. Gribakin, V. V. Flambaum. Calculation of the scattering length in atomic collisions using the semiclassical approximation. *Phys. Rev. A*, 48(1):546–553, 1993.
- [83] K. B. Gubbels, J. E. Baarsma, H. T. C. Stoof. Lifshitz Point in the Phase Diagram of Resonantly Interacting ^6Li - ^{40}K Mixtures. *Phys. Rev. Lett.*, 103(19):195301, 2009.

- [84] K. B. Gubbels, M. W. J. Romans, H. T. C. Stoof. Sarma Phase in Trapped Unbalanced Fermi Gases. *Phys. Rev. Lett.*, 97(21):210402, 2006.
- [85] K. B. Gubbels, H. T. C. Stoof. Imbalanced Fermi gases at unitarity. *Physics Reports*, 525(4):255–313, 2013.
- [86] S. Gupta, Z. Hadzibabic, M. W. Zwierlein, C. A. Stan, K. Dieckmann, C. H. Schunck, E. G. M. v. Kempen, B. J. Verhaar, W. Ketterle. Radio-Frequency Spectroscopy of Ultracold Fermions. *Science*, 300(5626):1723–1726, 2003.
- [87] V. Gurarie, L. Radzihovsky. Resonantly paired fermionic superfluids. *Annals of Physics*, 322(1):2–119, 2007.
- [88] B. I. Halperin, T. C. Lubensky, S.-k. Ma. First-Order Phase Transitions in Superconductors and Smectic-A Liquid Crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 32(6):292–295, 1974.
- [89] J. A. Hertz. Quantum critical phenomena. *Phys. Rev. B*, 14(3):1165–1184, 1976.
- [90] J. Hofmann, F. Chevy, O. Goulko, C. Lobo. Collective modes of an imbalanced unitary Fermi gas. *Phys. Rev. A*, 97(3):033613, 2018.
- [91] S. Hoinka, P. Dyke, M. G. Lingham, J. J. Kinnunen, G. M. Bruun, C. J. Vale. Goldstone mode and pair-breaking excitations in atomic Fermi superfluids. *Nature Physics*, 13(10):943–946, 2017.
- [92] H. Hu, P. D. Drummond, X.-J. Liu. Universal thermodynamics of strongly interacting Fermi gases. *Nature Physics*, 3(7):469–472, 2007.
- [93] K. Huang, C. N. Yang. Quantum-Mechanical Many-Body Problem with Hard-Sphere Interaction. *Phys. Rev.*, 105(3):767–775, 1957.
- [94] K. Hueck, N. Luick, L. Sobirey, J. Siegl, T. Lompe, H. Moritz. Two-Dimensional Homogeneous Fermi Gases. *Phys. Rev. Lett.*, 120(6):060402, 2018.
- [95] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, W. Ketterle. Observation of Feshbach resonances in a Bose–Einstein condensate. *Nature*, 392(6672):151–154, 1998.
- [96] M. Iskin. Geometric contribution to the Goldstone mode in spin–orbit coupled Fermi superfluids. *Physica B: Condensed Matter*, 592:412260, 2020.
- [97] M. Iskin, A. L. Subaşı. Mass-imbalanced Fermi gases with spin-orbit coupling. *Phys. Rev. A*, 84(4):041610, 2011.
- [98] M. Iskin, C. A. R. Sá de Melo. BCS-BEC crossover of collective excitations in two-band superfluids. *Phys. Rev. B*, 72(2):024512, 2005.
- [99] M. Iskin, C. A. R. Sá de Melo. Two-Species Fermion Mixtures with Population Imbalance. *Phys. Rev. Lett.*, 97(10):100404, 2006.
- [100] M. Iskin, C. A. R. Sá de Melo. Evolution of Two-Band Superfluidity from Weak to Strong Coupling. *J. Low Temp. Phys.*, 149(1):29–40, 2007.

- [101] M. Iskin, C. A. R. Sá de Melo. Mixtures of ultracold fermions with unequal masses. *Phys. Rev. A*, 76(1):013601, 2007.
- [102] M. Iskin, C. A. R. Sá de Melo. Fermi-Fermi mixtures in the strong-attraction limit. *Phys. Rev. A*, 77(1):013625, 2008.
- [103] M. Jag, M. Zaccanti, M. Cetina, R. S. Lous, F. Schreck, R. Grimm, D. S. Petrov, J. Levinsen. Observation of a Strong Atom-Dimer Attraction in a Mass-Imbalanced Fermi-Fermi Mixture. *Phys. Rev. Lett.*, 112(7):075302, 2014.
- [104] P. Jakubczyk. Renormalized ϕ^6 model for quantum phase transitions in systems of itinerant fermions. *Phys. Rev. B*, 79(12):125115, 2009.
- [105] P. Jakubczyk. Renormalization theory for the Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov states at $T > 0$. *Phys. Rev. A*, 95(6):063626, 2017.
- [106] P. Jakubczyk, J. Bauer, W. Metzner. Finite temperature crossovers near quantum tricritical points in metals. *Phys. Rev. B*, 82(4):045103, 2010.
- [107] P. Jakubczyk, W. Metzner, H. Yamase. Turning a First Order Quantum Phase Transition Continuous by Fluctuations: General Flow Equations and Application to d -Wave Pomeranchuk Instability. *Phys. Rev. Lett.*, 103(22):220602, 2009.
- [108] P. Jakubczyk, P. Strack, A. A. Katanin, W. Metzner. Renormalization group for phases with broken discrete symmetry near quantum critical points. *Phys. Rev. B*, 77(19):195120, 2008.
- [109] R. A. Jishi. *Feynman Diagram Techniques in Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [110] L. P. Kadanoff. Scaling laws for ising models near T_c . *Physics Physique Fizika*, 2(6):263–272, Czerw. 1966.
- [111] M. Karmakar. Thermal transitions, pseudogap behavior, and BCS-BEC crossover in Fermi-Fermi mixtures. *Phys. Rev. A*, 97(3):033617, 2018.
- [112] W. Ketterle. Nobel lecture: When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser. *Rev. Mod. Phys.*, 74(4):1131–1151, 2002.
- [113] J. Kinast, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, A. Turlapov, J. E. Thomas. Evidence for Superfluidity in a Resonantly Interacting Fermi Gas. *Phys. Rev. Lett.*, 92(15):150402, 2004.
- [114] J. Kinast, A. Turlapov, J. E. Thomas, Q. Chen, J. Stajic, K. Levin. Heat Capacity of a Strongly Interacting Fermi Gas. *Science*, 307(5713):1296–1299, 2005.
- [115] S. N. Klimin, H. Kurkjian, J. Tempere. Anderson–Bogoliubov Collective Excitations in Superfluid Fermi Gases at Nonzero Temperatures. *J. Low Temp. Phys.*, 196(1):102–110, 2019.
- [116] S. N. Klimin, J. Tempere, J. P. A. Devreese. Pair Excitations and Parameters of State of Imbalanced Fermi Gases at Finite Temperatures. *J. Low Temp. Phys.*, 165(5):261, 2011.

- [117] S. N. Klimin, J. Tempere, J. T. Devreese. Pseudogap and preformed pairs in the imbalanced Fermi gas in two dimensions. *New J. Phys.*, 14(10):103044, 2012.
- [118] S. N. Klimin, J. Tempere, H. Kurkjian. Phononic collective excitations in superfluid Fermi gases at nonzero temperatures. *Phys. Rev. A*, 100(6):063634, 2019.
- [119] S. N. Klimin, J. Tempere, G. Lombardi, J. T. Devreese. Finite temperature effective field theory and two-band superfluidity in Fermi gases. *Eur. Phys. J. B*, 88(5):122, 2015.
- [120] P. Kopietz, L. Bartosch, F. Schütz. *Introduction to the Functional Renormalization Group*. Lecture Notes in Physics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.
- [121] B. Krippa. Pairing in asymmetric many-fermion systems: Functional renormalisation group approach. *Physics Letters B*, 744:288–292, 2015.
- [122] P. Kroiss, L. Pollet. Diagrammatic Monte Carlo study of a mass-imbalanced Fermi-polaron system. *Phys. Rev. B*, 91(14):144507, 2015.
- [123] A. Kujawa-Cichy, R. Micnas. Stability of superfluid phases in the 2D spin-polarized attractive Hubbard model. *EPL*, 95(3):37003, 2011.
- [124] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra. Concavity of the collective excitation branch of a Fermi gas in the BEC-BCS crossover. *Phys. Rev. A*, 93(1):013623, 2016.
- [125] H. Kurkjian, S. Klimin, J. Tempere, Y. Castin. Pair-Breaking Collective Branch in BCS Superconductors and Superfluid Fermi Gases. *Phys. Rev. Lett.*, 122(9):093403, 2019.
- [126] H. Kurkjian, J. Tempere. Absorption and emission of a collective excitation by a fermionic quasiparticle in a Fermi superfluid. *New J. Phys.*, 19(11):113045, 2017.
- [127] S. Lammers, I. Boettcher, C. Wetterich. Dimensional crossover of nonrelativistic bosons. *Phys. Rev. A*, 93(6):063631, 2016.
- [128] L. D. Landau, J. M. Lifszyc. *Mechanika kwantowa. Teoria nierelatywistyczna*. Fizyka teoretyczna. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2012.
- [129] A. I. Larkin, Y. N. Ovchinnikov. Nonuniform state of superconductors. *Zh.Eksp.Teor.Fiz.*, 47:1136–1146, 1964.
- [130] A. J. Leggett. Diatomic molecules and cooper pairs. A. Pękalski, J. A. Przystawa, redaktorzy, *Modern Trends in the Theory of Condensed Matter*, Lecture Notes in Physics, strony 13–27. Springer, Berlin, Heidelberg, 1980.
- [131] Q. Li, D. Belitz, J. Toner. Fluctuation-induced first-order transition in p -wave superconductors. *Phys. Rev. B*, 79(5):054514, 2009.
- [132] R. Liao, Y. Yi-Xiang, W.-M. Liu. Tuning the Tricritical Point with Spin-Orbit Coupling in Polarized Fermionic Condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 108(8):080406, 2012.
- [133] D. F. Litim. Optimized renormalization group flows. *Phys. Rev. D*, 64(10):105007, 2001.

- [134] B. Liu, H. Zhai, S. Zhang. Evolution of the Higgs mode in a fermion superfluid with tunable interactions. *Phys. Rev. A*, 93(3):033641, 2016.
- [135] W. V. Liu, F. Wilczek. Interior Gap Superfluidity. *Phys. Rev. Lett.*, 90(4):047002, 2003.
- [136] X.-J. Liu, H. Hu. BCS-BEC crossover in an asymmetric two-component Fermi gas. *EPL*, 75(3):364, 2006.
- [137] R. Lopes, C. Eigen, A. Barker, K. G. Viebahn, M. Robert-de Saint-Vincent, N. Navon, Z. Hadzibabic, R. P. Smith. Quasiparticle Energy in a Strongly Interacting Homogeneous Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 118(21):210401, 2017.
- [138] H. v. Löhneysen, A. Rosch, M. Vojta, P. Wölfle. Fermi-liquid instabilities at magnetic quantum phase transitions. *Rev. Mod. Phys.*, 79(3):1015–1075, 2007.
- [139] G. D. Mahan. *Many-Particle Physics*. Physics of Solids and Liquids. Springer US, wydanie 3, 2000.
- [140] M. B. Maple. High-temperature superconductivity. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 177-181:18–30, 1998.
- [141] M. Marini, F. Pistolesi, G. Strinati. Evolution from BCS superconductivity to Bose condensation: analytic results for the crossover in three dimensions. *Eur. Phys. J. B*, 1(2):151–159, 1998.
- [142] R. M. Martin, L. Reining, D. M. Ceperley. *Interacting Electrons: Theory and Computational Approaches*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [143] N. Masuhara, J. M. Doyle, J. C. Sandberg, D. Kleppner, T. J. Greytak, H. F. Hess, G. P. Kochanski. Evaporative Cooling of Spin-Polarized Atomic Hydrogen. *Phys. Rev. Lett.*, 61(8):935–938, 1988.
- [144] F. Matera, M. F. Wagner. Low-energy modes of spin-imbalanced Fermi gases in BCS phase. *Eur. Phys. J. D*, 71(11):293, 2017.
- [145] H. J. Metcalf, P. v. d. Straten. Laser Cooling and Trapping of Neutral Atoms. *The Optics Encyclopedia*. Wiley-VCH Verlag, 2007.
- [146] B. Michon, C. Girod, S. Badoux, J. Kačmarčík, Q. Ma, M. Dragomir, H. A. Dabkowska, B. D. Gaulin, J.-S. Zhou, S. Pyon, T. Takayama, H. Takagi, S. Verret, N. Doiron-Leyraud, C. Marcenat, L. Taillefer, T. Klein. Thermodynamic signatures of quantum criticality in cuprate superconductors. *Nature*, 567(7747):218–222, 2019.
- [147] A. J. Millis. Effect of a nonzero temperature on quantum critical points in itinerant fermion systems. *Phys. Rev. B*, 48(10):7183–7196, 1993.
- [148] C. Monroe, W. Swann, H. Robinson, C. Wieman. Very cold trapped atoms in a vapor cell. *Phys. Rev. Lett.*, 65(13):1571–1574, 1990.
- [149] B. Mukherjee, Z. Yan, P. B. Patel, Z. Hadzibabic, T. Yefsah, J. Struck, M. W. Zwierlein. Homogeneous Atomic Fermi Gases. *Phys. Rev. Lett.*, 118(12):123401, 2017.
- [150] N. Nagaosa. *Quantum Field Theory in Strongly Correlated Electronic Systems*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999.

- [151] Y. Nambu. Quasi-Particles and Gauge Invariance in the Theory of Superconductivity. *Phys. Rev.*, 117(3):648–663, 1960.
- [152] S. H. Naqib, R. S. Islam. Possible quantum critical behavior revealed by the critical current density of hole doped high- T_c cuprates in comparison to heavy fermion superconductors. *Scientific Reports*, 9(1):14856, 2019.
- [153] N. Navon, A. L. Gaunt, R. P. Smith, Z. Hadzibabic. Critical dynamics of spontaneous symmetry breaking in a homogeneous Bose gas. *Science*, 347(6218):167–170, 2015.
- [154] J. W. Negele, H. Orland. *Quantum Many-Particle Systems*. CRC Press, 2018.
- [155] E. Neri, A. Ciamei, C. Simonelli, I. Goti, M. Inguscio, A. Trenkwalder, M. Zaccanti. Realization of a cold mixture of fermionic chromium and lithium atoms. *Phys. Rev. A*, 101(6):063602, 2020.
- [156] H. Nishimori, G. Ortiz. *Elements of Phase Transitions and Critical Phenomena*. Oxford University Press, 2011.
- [157] P. Nozières. *Theory Of Interacting Fermi Systems*. CRC Press, 2018.
- [158] P. Nozières, S. Schmitt-Rink. Bose condensation in an attractive fermion gas: From weak to strong coupling superconductivity. *J Low Temp Phys*, 59(3):195–211, 1985.
- [159] N. Nygaard, B. I. Schneider, P. S. Julienne. Two-channel R -matrix analysis of magnetic-field-induced Feshbach resonances. *Phys. Rev. A*, 73(4):042705, 2006.
- [160] B. Obert, C. Husemann, W. Metzner. Low-energy singularities in the ground state of fermionic superfluids. *Phys. Rev. B*, 88(14):144508, 2013.
- [161] Y. Ohashi, A. Griffin. Superfluidity and collective modes in a uniform gas of Fermi atoms with a Feshbach resonance. *Phys. Rev. A*, 67(6):063612, 2003.
- [162] J. Orenstein, A. J. Millis. Advances in the Physics of High-Temperature Superconductivity. *Science*, 288(5465):468–474, 2000.
- [163] M. M. Parish, F. M. Marchetti, A. Lamacraft, B. D. Simons. Finite-temperature phase diagram of a polarized Fermi condensate. *Nature Physics*, 3(2):124–128, 2007.
- [164] M. M. Parish, F. M. Marchetti, A. Lamacraft, B. D. Simons. Polarized Fermi Condensates with Unequal Masses: Tuning the Tricritical Point. *Phys. Rev. Lett.*, 98(16):160402, 2007.
- [165] G. B. Partridge, W. Li, R. I. Kamar, Y.-a. Liao, R. G. Hulet. Pairing and Phase Separation in a Polarized Fermi Gas. *Science*, 311(5760):503–505, 2006.
- [166] G. B. Partridge, K. E. Strecker, R. I. Kamar, M. W. Jack, R. G. Hulet. Molecular Probe of Pairing in the BEC-BCS Crossover. *Phys. Rev. Lett.*, 95(2):020404, 2005.
- [167] R. K. Pathria, P. D. Beale. *Statistical Mechanics*. Elsevier, 2011.

- [168] C. J. Pethick, H. Smith. *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [169] W. D. Phillips. Nobel Lecture: Laser cooling and trapping of neutral atoms. *Rev. Mod. Phys.*, 70(3):721–741, 1998.
- [170] F. Piazza, W. Zwerger, P. Strack. FFLO strange metal and quantum criticality in two dimensions: Theory and application to organic superconductors. *Phys. Rev. B*, 93(8):085112, 2016.
- [171] P. Pieri, L. Pisani, G. C. Strinati. BCS-BEC crossover at finite temperature in the broken-symmetry phase. *Phys. Rev. B*, 70(9):094508, 2004.
- [172] D. Pimenov, I. Mandal, F. Piazza, M. Punk. Non-Fermi liquid at the FFLO quantum critical point. *Phys. Rev. B*, 98(2):024510, 2018.
- [173] D. Pines, P. Nozières. *Theory Of Quantum Liquids*. CRC Press, 2018.
- [174] M. Pini, P. Pieri, R. Grimm, G. C. Strinati. Beyond-mean-field description of a trapped unitary Fermi gas with mass and population imbalance. *Phys. Rev. A*, 103(2):023314, 2021.
- [175] F. Pistolesi, C. Castellani, C. Di Castro, G. C. Strinati. Renormalization-group approach to the infrared behavior of a zero-temperature Bose system. *Phys. Rev. B*, 69(2):024513, 2004.
- [176] C. Proust, L. Taillefer. The Remarkable Underlying Ground States of Cuprate Superconductors. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 10(1):409–429, 2019.
- [177] E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, D. E. Pritchard. Trapping of Neutral Sodium Atoms with Radiation Pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 59(23):2631–2634, 1987.
- [178] L. Radzihovsky. Fluctuations and phase transitions in Larkin-Ovchinnikov liquid-crystal states of a population-imbalanced resonant Fermi gas. *Phys. Rev. A*, 84(2):023611, 2011.
- [179] L. Radzihovsky, D. E. Sheehy. Imbalanced Feshbach-resonant Fermi gases. *Rep. Prog. Phys.*, 73(7):076501, 2010.
- [180] L. Radzihovsky, A. Vishwanath. Quantum Liquid Crystals in an Imbalanced Fermi Gas: Fluctuations and Fractional Vortices in Larkin-Ovchinnikov States. *Phys. Rev. Lett.*, 103(1):010404, 2009.
- [181] R. Ramazashvili. Quantum Lifshitz point. *Phys. Rev. B*, 60(10):7314–7320, 1999.
- [182] M. Randeria, J.-M. Duan, L.-Y. Shieh. Bound states, Cooper pairing, and Bose condensation in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 62(9):981–984, 1989.
- [183] M. Randeria, J.-M. Duan, L.-Y. Shieh. Superconductivity in a two-dimensional Fermi gas: Evolution from Cooper pairing to Bose condensation. *Phys. Rev. B*, 41(1):327–343, 1990.
- [184] A. Rançon, N. Dupuis. Kosterlitz-Thouless signatures in the low-temperature phase of layered three-dimensional systems. *Phys. Rev. B*, 96(21):214512, 2017.

- [185] C. Ravensbergen, V. Corre, E. Soave, M. Kreyer, E. Kirilov, R. Grimm. Production of a degenerate Fermi-Fermi mixture of dysprosium and potassium atoms. *Phys. Rev. A*, 98(6):063624, 2018.
- [186] C. Ravensbergen, E. Soave, V. Corre, M. Kreyer, B. Huang, E. Kirilov, R. Grimm. Resonantly Interacting Fermi-Fermi Mixture of ^{161}Dy and ^{40}K . *Phys. Rev. Lett.*, 124(20):203402, 2020.
- [187] C. A. Regal, M. Greiner, D. S. Jin. Observation of Resonance Condensation of Fermionic Atom Pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 92(4):040403, 2004.
- [188] D. Roscher, J. Braun, J. E. Drut. Inhomogeneous phases in one-dimensional mass- and spin-imbalanced Fermi gases. *Phys. Rev. A*, 89(6):063609, 2014.
- [189] D. Roscher, J. Braun, J. E. Drut. Phase structure of mass- and spin-imbalanced unitary Fermi gases. *Phys. Rev. A*, 91(5):053611, 2015.
- [190] S. K. Ruddell, D. H. White, A. Ullah, D. Baillie, M. D. Hoogerland. Calorimetry of a harmonically trapped Bose gas. *Phys. Rev. A*, 92(6):063622, 2015.
- [191] S. Sachdev. Quantum Criticality: Competing Ground States in Low Dimensions. *Science*, 288(5465):475–480, 2000.
- [192] S. Sachdev. *Quantum Phase Transitions*. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [193] Y. Sagi, T. E. Drake, R. Paudel, R. Chapurin, D. S. Jin. Breakdown of the Fermi Liquid Description for Strongly Interacting Fermions. *Phys. Rev. Lett.*, 114(7):075301, 2015.
- [194] L. Salasnich. Low-temperature thermodynamics of the unitary Fermi gas: Superfluid fraction, first sound, and second sound. *Phys. Rev. A*, 82(6):063619, 2010.
- [195] L. Salasnich. Goldstone and Higgs Hydrodynamics in the BCS–BEC Crossover. *Condensed Matter*, 2(2):22, 2017.
- [196] L. Salasnich, F. Toigo. Extended Thomas-Fermi density functional for the unitary Fermi gas. *Phys. Rev. A*, 78(5):053626, 2008.
- [197] K. V. Samokhin. Goldstone modes in Larkin-Ovchinnikov-Fulde-Ferrell superconductors. *Phys. Rev. B*, 81(22):224507, 2010.
- [198] G. Sarma. On the influence of a uniform exchange field acting on the spins of the conduction electrons in a superconductor. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 24(8):1029–1032, 1963.
- [199] A. Schirotzek, Y.-i. Shin, C. H. Schunck, W. Ketterle. Determination of the Superfluid Gap in Atomic Fermi Gases by Quasiparticle Spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.*, 101(14):140403, 2008.
- [200] A. J. Schofield. Non-Fermi liquids. *Contemporary Physics*, 40(2):95–115, 1999.
- [201] J. R. Schrieffer. *Theory Of Superconductivity*. Avalon Publishing, 1999.
- [202] C. H. Schunck, Y.-i. Shin, A. Schirotzek, W. Ketterle. Determination of the fermion pair size in a resonantly interacting superfluid. *Nature*, 454(7205):739–743, 2008.

- [203] K. Seo, L. Han, C. A. R. Sá de Melo. Topological phase transitions in ultracold Fermi superfluids: The evolution from Bardeen-Cooper-Schrieffer to Bose-Einstein-condensate superfluids under artificial spin-orbit fields. *Phys. Rev. A*, 85(3):033601, 2012.
- [204] D. E. Sheehy, L. Radzihovsky. BEC–BCS crossover, phase transitions and phase separation in polarized resonantly-paired superfluids. *Annals of Physics*, 322(8):1790–1924, 2007.
- [205] H. Shen, W. Zheng. Landau damping in a mixture of Bose and Fermi superfluids. *Phys. Rev. A*, 92(3):033620, 2015.
- [206] H. Shimahara. Phase Fluctuations and Kosterlitz-Thouless Transition in Two-Dimensional Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov Superconductors. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 67(6):1872–1875, 1998.
- [207] C. Shkedrov, Y. Florshaim, G. Ness, A. Gandman, Y. Sagi. High-Sensitivity rf Spectroscopy of a Strongly Interacting Fermi Gas. *Phys. Rev. Lett.*, 121(9):093402, 2018.
- [208] L. A. Sidorenkov, M. K. Tey, R. Grimm, Y.-H. Hou, L. Pitaevskii, S. Stringari. Second sound and the superfluid fraction in a Fermi gas with resonant interactions. *Nature*, 498(7452):78–81, 2013.
- [209] I. F. Silvera, J. T. M. Walraven. Stabilization of Atomic Hydrogen at Low Temperature. *Phys. Rev. Lett.*, 44(3):164–168, 1980.
- [210] E. Smith, H. J. Morowitz. The phase transition paradigm for emergence. *The Origin and Nature of Life on Earth: The Emergence of the Fourth Geosphere*, strony 424–538. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [211] S. L. Sondhi, S. M. Girvin, J. P. Carini, D. Shahar. Continuous quantum phase transitions. *Rev. Mod. Phys.*, 69(1):315–333, 1997.
- [212] J. Spalek. Correlated fermions: a new paradigm in physics on the example of solid-state physics? *Eur. J. Phys.*, 21(6):511–534, 2000.
- [213] J. Spalek. Świat skorelowanych fermionów : lokalizacja Motta i cieczy kwantowe superciężkich kwazicząstek. *Postępy Fizyki*, 51(1):1–15, 2000.
- [214] J. Spalek. Kwantowe przejścia fazowe i zjawiska krytyczne: nowy typ zachowania materii. *Postępy Fizyki*, 57(5):200–210, 2006.
- [215] J. Stenger, S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, D. E. Pritchard, W. Ketterle. Bragg Spectroscopy of a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 82(23):4569–4573, 1999.
- [216] J. T. Stewart, J. P. Gaebler, D. S. Jin. Using photoemission spectroscopy to probe a strongly interacting Fermi gas. *Nature*, 454(7205):744–747, 2008.
- [217] H. T. C. Stoof, D. B. M. Dickerscheid, K. Gubbels. *Ultracold Quantum Fields*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer Netherlands, 2009.
- [218] P. Strack, P. Jakubczyk. Phase boundary and finite temperature crossovers of the quantum Ising model in two dimensions. *Phys. Rev. B*, 80(8):085108, 2009.

- [219] P. Strack, P. Jakubczyk. Fluctuations of Imbalanced Fermionic Superfluids in Two Dimensions Induce Continuous Quantum Phase Transitions and Non-Fermi-Liquid Behavior. *Phys. Rev. X*, 4(2):021012, 2014.
- [220] G. C. Strinati, P. Pieri, G. Röpke, P. Schuck, M. Urban. The BCS–BEC crossover: From ultra-cold Fermi gases to nuclear systems. *Physics Reports*, 738:1–76, 2018.
- [221] C. A. R. Sá de Melo. When fermions become bosons: Pairing in ultracold gases. *Physics Today*, 61(10):45–51, 2008.
- [222] C. A. R. Sá de Melo, M. Randeria, J. R. Engelbrecht. Crossover from BCS to Bose superconductivity: Transition temperature and time-dependent Ginzburg-Landau theory. *Phys. Rev. Lett.*, 71(19):3202–3205, 1993.
- [223] J. Tempere, J. P. A. Devreese. Path-Integral Description of Cooper Pairing. *Superconductors - Materials, Properties and Applications*, 2012.
- [224] M. K. Tey, L. A. Sidorenkov, E. R. S. Guajardo, R. Grimm, M. J. H. Ku, M. W. Zwierlein, Y.-H. Hou, L. Pitaevskii, S. Stringari. Collective Modes in a Unitary Fermi Gas across the Superfluid Phase Transition. *Phys. Rev. Lett.*, 110(5):055303, 2013.
- [225] T. G. Tiecke, M. R. Goosen, A. Ludewig, S. D. Gensemer, S. Kraft, S. J. J. M. F. Kokkelmans, J. T. M. Walraven. Broad Feshbach Resonance in the ^6Li - ^{40}K Mixture. *Phys. Rev. Lett.*, 104(5):053202, 2010.
- [226] U. Toniolo, B. Mulkerin, X.-J. Liu, H. Hu. Larkin-Ovchinnikov superfluidity in a two-dimensional imbalanced atomic Fermi gas. *Phys. Rev. A*, 95(1):013603, 2017.
- [227] A. Trenkwalder, C. Kohstall, M. Zaccanti, D. Naik, A. I. Sidorov, F. Schreck, R. Grimm. Hydrodynamic Expansion of a Strongly Interacting Fermi-Fermi Mixture. *Phys. Rev. Lett.*, 106(11):115304, 2011.
- [228] D. Tsarev, A. Trofimova, A. Alodjants, A. Khrennikov. Phase transitions, collective emotions and decision-making problem in heterogeneous social systems. *Scientific Reports*, 9(1):18039, 2019.
- [229] C. M. Varma, Z. Nussinov, W. van Saarloos. Singular or non-Fermi liquids. *Physics Reports*, 361(5):267–417, 2002.
- [230] G. Veeravalli, E. Kuhnle, P. Dyke, C. J. Vale. Bragg Spectroscopy of a Strongly Interacting Fermi Gas. *Phys. Rev. Lett.*, 101(25):250403, 2008.
- [231] M. Vojta. Quantum phase transitions. *Rep. Prog. Phys.*, 66(12):2069–2110, 2003.
- [232] T. Vojta. Quantum phase transitions in electronic systems. *Annalen der Physik*, 9(6):403–440, 2000.
- [233] C. W. von Keyserlingk, G. J. Conduit. Itinerant ferromagnetism in an interacting Fermi gas with mass imbalance. *Phys. Rev. A*, 83(5):053625, 2011.
- [234] J. Wang, Y. Che, L. Zhang, Q. Chen. Enhancement effect of mass imbalance on Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov type of pairing in Fermi-Fermi mixtures of ultracold quantum gases. *Scientific Reports*, 7(1):39783, 2017.

- [235] J. Wang, Y. Che, L. Zhang, Q. Chen. Instability of Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov states in atomic Fermi gases in three and two dimensions. *Phys. Rev. B*, 97(13):134513, 2018.
- [236] J. Wang, H. Guo, Q. Chen. Exotic phase separation and phase diagrams of a Fermi-Fermi mixture in a trap at finite temperature. *Phys. Rev. A*, 87(4):041601, 2013.
- [237] C. Wetterich. Exact evolution equation for the effective potential. *Physics Letters B*, 301(1):90–94, 1993.
- [238] B. Widom. Equation of State in the Neighborhood of the Critical Point. *J. Chem. Phys.*, 43(11):3898–3905, 1965.
- [239] E. Wille, F. M. Spiegelhalder, G. Kerner, D. Naik, A. Trenkwalder, G. Hendl, F. Schreck, R. Grimm, T. G. Tiecke, J. T. M. Walraven, S. J. J. M. F. Kokkelmans, E. Tiesinga, P. S. Julienne. Exploring an Ultracold Fermi-Fermi Mixture: Interspecies Feshbach Resonances and Scattering Properties of ^6Li and ^{40}K . *Phys. Rev. Lett.*, 100(5):053201, 2008.
- [240] K. G. Wilson. Renormalization Group and Critical Phenomena. I. Renormalization Group and the Kadanoff Scaling Picture. *Phys. Rev. B*, 4(9):3174–3183, 1971.
- [241] K. G. Wilson. Renormalization Group and Critical Phenomena. II. Phase-Space Cell Analysis of Critical Behavior. *Phys. Rev. B*, 4(9):3184–3205, 1971.
- [242] H. Yamase. Electronic nematic phase transition in the presence of anisotropy. *Phys. Rev. B*, 91(19):195121, 2015.
- [243] H. Yamase, P. Jakubczyk, W. Metzner. Nematic quantum criticality without order. *Phys. Rev. B*, 83(12):125121, 2011.
- [244] W. Yi, L.-M. Duan. Detecting the Breached-Pair Phase in a Polarized Ultracold Fermi Gas. *Phys. Rev. Lett.*, 97(12):120401, 2006.
- [245] S. Yin, J.-P. Martikainen, P. Törmä. Fulde-Ferrell states and Berezinskii-Kosterlitz-Thouless phase transition in two-dimensional imbalanced Fermi gases. *Phys. Rev. B*, 89(1):014507, 2014.
- [246] D. Zappalà. Isotropic Lifshitz point in the $O(N)$ theory. *Physics Letters B*, 773:213–218, 2017.
- [247] D. Zappalà. Indications of isotropic Lifshitz points in four dimensions. *Phys. Rev. D*, 98(8):085005, 2018.
- [248] P. Zdybel, P. Jakubczyk. Effective potential and quantum criticality for imbalanced Fermi mixtures. *J. Phys.: Condens. Matter*, 30(30):305604, 2018.
- [249] P. Zdybel, P. Jakubczyk. Damping of the Anderson-Bogolyubov mode in Fermi mixtures by spin and mass imbalance. *Phys. Rev. A*, 100(5):053622, 2019.
- [250] P. Zdybel, P. Jakubczyk. Quantum Lifshitz points and fluctuation-induced first-order phase transitions in imbalanced Fermi mixtures. *Phys. Rev. Research*, 2(3):033486, 2020.
- [251] S.-S. Zhang, X.-L. Yu, J. Ye, W.-M. Liu. Collective modes of spin-orbit-coupled Fermi gases in the repulsive regime. *Phys. Rev. A*, 87(6):063623, 2013. Publisher: American Physical Society.

- [252] X. Zhang, C.-L. Hung, S.-K. Tung, C. Chin. Observation of Quantum Criticality with Ultracold Atoms in Optical Lattices. *Science*, 335(6072):1070–1072, 2012.
- [253] X. Zhang, C.-L. Hung, S.-K. Tung, N. Gemelke, C. Chin. Exploring quantum criticality based on ultracold atoms in optical lattices. *New J. Phys.*, 13(4):045011, 2011. Publisher: IOP Publishing.
- [254] Z. Zhang, W. V. Liu. Finite-temperature damping of collective modes of a BCS-BEC crossover superfluid. *Phys. Rev. A*, 83(2):023617, 2011.
- [255] P. Zou, H. Hu, X.-J. Liu. Low-momentum dynamic structure factor of a strongly interacting Fermi gas at finite temperature: The Goldstone phonon and its Landau damping. *Phys. Rev. A*, 98(1):011602, 2018.
- [256] W. Zwerger. *The BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi Gas*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [257] M. W. Zwierlein, J. R. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C. H. Schunck, W. Ketterle. Vortices and superfluidity in a strongly interacting Fermi gas. *Nature*, 435(7045):1047–1051, 2005.
- [258] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, W. Ketterle. Condensation of Pairs of Fermionic Atoms near a Feshbach Resonance. *Phys. Rev. Lett.*, 92(12):120403, 2004.
- [259] G. Zürn, T. Lompe, A. N. Wenz, S. Jochim, P. S. Julienne, J. M. Hutson. Precise Characterization of ^6Li Feshbach Resonances Using Trap-Sideband-Resolved RF Spectroscopy of Weakly Bound Molecules. *Phys. Rev. Lett.*, 110(13):135301, 2013.