

UNIwersytet Warszawski
Wydział Fizyki



Praca doktorska

Kwantowy Efekt Zenona dla pomiaru ciągłego

Autor:
Stanisław M. Sołtan

Promotor:
dr hab. Adam Bednorz

6 października 2021

„In the Institute in Copenhagen (...) we used, when in trouble, often to comfort ourselves with jokes, among them the old saying of the two kinds of truth. To the one kind belong statements so simple and clear that the opposite assertion obviously could not be defended. The other kind, so-called "deep truths" are statements in which the opposite also contains deep truth. Now, the development in a new field will usually pass through stages in which chaos becomes gradually replaced by order; but it is not least in the intermediate stage where deep truth prevails that the work is really exciting and inspires the imagination to search for a firmer hold."

Niels Bohr [1]

Streszczenie

Kwantowy Efekt Zenona dla pomiaru ciągłego

Stanisław M. SOŁTAN

Kwantowy efekt Zenona polega na spowolnieniu ewolucji układu kwantowego wskutek powtarzanych pomiarów sprawdzających, czy układ jest w swoim stanie początkowym. Przyspieszenie ewolucji układu pod wpływem takiej procedury nosi z kolei miano kwantowego efektu Anty-Zenona. Przy czasie pomiędzy pomiarami (rzutowymi) zbiegającym do zera, uzyskiwany jest paradoksalny wynik, że ewolucja w czasie mierzonego układu jest zupełnie zatrzymana. Powszechnie przyjmowanym rozwiązaniem tego problemu jest uwzględnianie modelu detektora w dyskusji pomiaru, czyli stosowanie teorii pomiarów uogólnionych, kiedy czasy pomiędzy pomiarami są bardzo krótkie.

W niniejszej rozprawie za układ kwantowy obrany jest model, w którym pojedynczy stan (wybierany jako początkowy) sprzężony jest z kontinuum stanów. Zastosowanie czynnika lorentzowskiego sprzężenia między nimi ułatwia znacząco rachunki ścisłe i numeryczne dzięki tzw. metodzie pseudomodów. Praca zawiera analizę ww. efektów dla modelu pomiaru ciągłego (czyli takiego, w którym przeprowadzono ww. przejście graniczne), w którym w każdej chwili układ obserwowany oddziałuje słabo z osobną sondą, niezależną od innych. Można przyjąć, że układ oddziałuje ze strumieniem cząstek (sond) o stacjonarnym przepływie. Wynikiem pomiaru w każdej chwili jest wielkość ciągła; korelacje tej wielkości w różnych chwilach czasu odpowiadają korelacjom operatorów kwantowych będących obserwablami – tu jest to rzut na stan początkowy. Korelacje te można obliczyć z pomocą równania Lindblada dla układu obserwowanego.

Z tych też powodów kryteria na zachodzenie ww. efektów zdefiniowane są w oparciu o wartości oczekiwane i korelacje dwupunktowe wyników pomiarów zamiast o prawdopodobieństwo ciągu pozytywnych wyników. To drugie podejście jest standardowe, więc w pierwszej kolejności nowe kryteria zastosowane są na próbę do powtarzanych pomiarów rzutowych. Forma tych kryteriów okazuje się jakościowo taka sama co w podejściu standardowym. Jednakże, przejście z wielkościami do reżimu rzadkich pomiarów i tłumionych oscylacji prawdopodobieństwa stanu początkowego (kiedy nie może być mowy o ww. efektach) jest łagodne w przeciwieństwie do przypadku z kryterium standardowym (co zbadano dla czynnika lorentzowskiego). Oprócz tego efekt Anty-Zenona przydarza się dla mniejszego zakresu parametrów. Stwierdzono także, że pomiar słaby z użyciem tylko dwóch sond (bez granicy krótkich czasów) pozwala uzyskać tzw. wartość słabą obserwabli. Przy małym sprzężeniu stanu początkowego do kontinuum prosty warunek na wartość słabą odtwarza kryteria w standardowym podejściu.

Ww. wyniki uznają za uwiarygadniające zaproponowane kryteria, więc stosują je też w przypadku pomiaru ciągłego. Dla długich czasów trwania eksperymentu i słabego sprzężenia z kontinuum poprawki na wskutek pomiaru przyjmują postać modyfikacji do Złotej Reguły Fermiego. Uzyskano także poprawki dla krótkich czasów. Przeprowadzono także obliczenia bez przybliżeń i analizę numeryczną dla czynnika Lorentzowskiego. Wyniki są tu jakościowo podobne do wyników zastosowania nowych kryteriów dla pomiarów rzutowych. W zasadzie zidentyfikowano tym sposobem możliwy efekt rezonansu układu pomiarowego z detektorem, ale wpływ na wyniki ma ten rezonans znikomy.

W ostatnim rozdziale poza podsumowaniem wskazuję na trudności, jakie spotkałaby próba definicji ciągu pozytywnych wyników przy ciągłym pomiarze. Ten problem jest wart dalszych badań.

Abstract

Quantum Zeno Effect for continuous measurement

Stanisław M. SOŁTAN

Slowing down of a quantum system time evolution due to repeated measurements that check, if the system is in its initial state is called the quantum Zeno effect. Conversely, the speed up of the evolution under such procedure is called Anti-Zeno effect. When the time between (projective) measurements approaches zero, a paradoxical theoretical result is obtained, that the time evolution of the observed system is stopped. It is universally accepted that to solve this problem one has to take detector into account in detection model, that is, apply the generalised measurement theory when the times between measurements are very short.

In this dissertation the quantum system is modelled by a single state (taken as initial one) coupled to a continuum of states. Calculations and numerical analysis are greatly simplified by taking Lorentzian form factor as describing this coupling. This is due to the so-called method of pseudomodes. The PhD thesis contains the analysis of aforementioned effects for a continuous measurement (that is, the limit of zero time intervals has been taken) in which the observed system interacts weakly with a different probe at any instance of time, independent of other probes. It could be assumed, that the system interacts with a stationary flow of particles (probes). The outcome of such measurement is a continuous variable assigned to every moment of time. Correlations of these values taken at different moments are expressed by correlations of observables. Here the observable is taken as a projection onto the initial state. These correlations can be calculated with the help of a Lindblad equation for the observed system.

Due to these circumstances, criteria for Zeno or Anti-Zeno effects to occur are defined with the use of the expectation values and the two-point time correlations of the measurement outcomes. This is in contrast with a standard approach of analysing the probability of a chain of positive results. Therefore, criteria are firstly tested in the case of repeated projective measurements and are found to reproduce a qualitatively the same form of results as standard ones. However, the transition to the regime of sparse measurements and damped oscillations of the probability of the initial state (a case where the investigated effects are undefined) is smooth as compared to the case of standard criteria (this was investigated for the Lorentzian form factor). Additionally the Anti-Zeno effect occurs for smaller range of controlled parameters. Furthermore, a weak measurement using exactly two probes (with no limit of short times) allows to obtain the so-called weak value of the observable. A condition for this quantity reproduce standard criteria provided the coupling of initial state to the continuum is small.

I consider these results justify the proposed criteria. Thus, I apply them to the case of continuous measurements. For long duration time of the experiment and weak coupling with a continuum, the corrections due to the measurement take the form of modified Fermi Golden Rule. Corrections for short times are also obtained. Exact calculations and numerical analysis were performed for the case of the Lorentzian form factor. In principle, a possible effect was identified of a resonance between a detector and a measured system, but the influence of this resonance on outcomes are negligible.

In the last chapter I also point out the difficulties in defining a chain of positive results of the continuous measurement. This problem is worth further investigations.

Podziękowania

Deo gratias!

W pierwszej kolejności gorąco dziękuję mojemu promotorowi, dr. hab. Adamowi Bednorzowi, za opiekę i przewodnictwo przez ostatnie sześć lat studiów doktoranckich i wcześniej. Niniejsza rozprawa jest powrotem do tematu mojej pracy licencjackiej, pisanej także pod Jego kierownictwem. Obecne zainteresowania naukowe zawdzięczam w dużej mierze temu początkowemu impulsowi.

Serdecznie dziękuję też prof. dr hab. Iwo Białynickiemu-Biruli za czas spędzony na stażu pod Jego kierownictwem w 2015 roku w Centrum Fizyki Teoretycznej PAN. Profesor oferuje zawsze mnóstwo czasu i cierpliwości swoim stażystom, a korzystanie z Jego doświadczenia było nieocenione. Jemu i całemu środowisku CFT PAN zawdzięczam dużo więcej, niż jestem w stanie tu wyrazić.

I would also like to thank prof. dr Wolfgang Belzig for the inquisitive discussions and fruitful comments that, apart from scientific input, helped me formulate scientific concepts much clearer.

Studentom, dla których prowadziłem ćwiczenia, dziękuję za każde zadane pytanie i życzę lepszych nauczycieli!

I am also in debt to many people whom I never met. For example, this work would look much worse if not for the .tex template by S. Gunn and S. Patel, as well as numerous advices at tex.stackexchange.com. The same goes for numerical calculations and the people of stackoverflow.com. It really is nice to give anything freely, out of passion.

Najdroższym Rodzicom, Małgorzacie i Andrzejowi, dziękuję gorąco za wszystko – a między innymi za wsparcie, wychowanie, rozum i serce. Ich pasja oraz praca naukowa są dla mnie i zawsze będą wzorem i inspiracją. Chciałbym też podziękować Babci Zofii za każdą chwilę rozmowy, i Dziadkowi Wojciechowi, którego kiedyś, mniemam, jeszcze będę mógł zapytać, co o tym wszystkim sądzi.

Wreszcie dziękuję ukochanej Paulinie, bez której wsparcia w ostatnim czasie trudno powiedzieć, co by w ogóle było. Dzielić z taką Osobą życie, pasję i plany to zaszczyt i radość!

Spis treści

Streszczenie	iii
Abstract	v
Podziękowania	vii
Wstęp	1
1 Definicje, metody, cele	5
Konwencje dotyczące transformaty Fouriera – Efekt Zenona (Skale czasowe i Złota Reguła Fermiego, Niestandardowe definicje) – Złota Reguła Fermiego – Pomiar ciągły (Pomiar słaby, Przejście do pomiaru ciągłego) – Efekty klasyczne a efekty kwantowe – Postać Hamiltonianu (Ograniczenia modelu, Wartości funkcyjne zmiennych, Czynniki lorentzowski) – Szczegółowe cele, przegląd wyników, struktura pracy	
2 Pomiar rzutowy	19
Standardowe kryteria ZE / AZE – Wartość oczekiwana rzutu (Przybliżenia prawdopodobieństw powrotów, Porównanie kryteriów)	
3 Wartości słabe i korelacje dla pomiarów słabych	27
Pomiar wartości słabych – Kryterium ZE / AZE (Krótkie czasy i słabe sprzężenie z rezerwuarem, Długie czasy i FGR)	
4 Pomiar ciągły	33
Konwencje dotyczące transformaty Laplace’a – Rozwiązanie zanikowe równania Lindblada (Funkcje pomocnicze, Granica braku pomiarów) – Rachunek iteracyjny dla stanu Fermiego (Przybliżenia dla małego wykładnika, Punkt wyjścia, Modyfikacja FGR) – Wartość oczekiwana – Korelacje (Równania Lindblada, Wyrażenia przy długich czasach)	
5 Przypadek szczególny, lorentzowski	43
Metoda pseudomodów (Rozwiązania równania Schrödingera, Prawdopodobieństwa powrotów po negatywnych wynikach) – Wartości słabe – Przypadek pomiarów ciągłych (Rozwiązania zanikowe równania Lindblada, Zachowanie rezonansowe wskutek oddziaływania z detektorem, Korelacje)	
6 Wnioski i podsumowanie	55
Kryteria na ZE i AZE – Możliwe kierunki dalszych badań	
Dodatki	59
A Złota Reguła Fermiego	61
Rozwiązania zanikowe równania Schrödingera – Inne rozwiązania równań – Stan Fermiego (Jednoznaczność stanu Fermiego, Poprawki do FGR)	
B Operatory Krausa dla pomiaru Gaussowskiego	65
Teoria pomiaru uogólnionego – Konstrukcja operatorów Krausa	

C	Formalizm operatorów Krausa z użyciem pseudomodów	69
	Uciąglenie operatorów Krausa – Korelacje – Zastosowanie do metody pseudomodów (Zastosowanie metody pseudomodów do fizycznych wzorów na korelacje, Korelacje drugiego rzędu obliczone dla niehermitowskiego Hamiltonianu) – Równanie Lindblada (Wyprowadzenie, Korelacje drugiego rzędu dla rzutu)	
D	Uzupełnienia do rozdziału 2.	77
	Uproszczenie macierzy przejścia – Obliczenie elementu macierzy przejścia – Prawdopodobieństwo drugiego powrotu – Pominiecie wyrażeń ze względu na destrukcyjną interferencję – Indukcja dla dalszych prawdopodobieństw powrotów	
E	Uzupełnienia do rozdziału 4.	83
	Rozwiązanie równania Lindblada przez zadane funkcje pomocnicze – Niehermitowska ewolucja – Krok II – Funkcje pierwotne	
F	Uzupełnienia do rozdziału 5.	87
	Pomiar rzutowy dla sumy Lorentzianów – Uzyskanie rozwiązań zanikowych równania Lindblada – Elementy macierzy gęstości rozwiązującej równania Lindblada	
	Bibliografia	91

Wstęp

W sytuacji gdy układ kwantowy przygotowany w stanie zanikającym w czasie podlega często powtarzanym pomiarom rzutowym, mechanika kwantowa przewiduje efekt Zenona (ZE, od ang. *Zeno effect*) lub anty-Zenona (AZE, od ang. *Anti-Zeno effect*): oczekiwana ewolucja zanikowa w czasie podlega spowolnieniu przy ZE (lub przyspieszeniu przy AZE). Są to zjawiska potwierdzone doświadczalnie [2–11]. Teoria ZE jest ogólnym wynikiem mechaniki kwantowej charakterystycznym dla właściwie wszystkich modeli kwantowych poza pewnymi przypadkami granicznymi. Stąd można oczekiwać szerokiego jego rozpowszechnienia. Możliwe, że stabilizacja chiralnych izomerów pod wpływem monitorowania ich środowiska także jest przykładem ZE[12], co stanowiłoby prawdopodobnie przykład największego układu kwantowego, dla którego ten efekt jest znany. Wysuwano też hipotezę, że ZE odpowiada za długi czas życia protonu (tj. za brak znanych przypadków spontanicznego rozpadu protonu), ale hipotezę tę raczej należy odrzucić [13].

Przy przejściu granicznym z czasami pomiędzy pomiarami do zera ewolucja przewidywana na bazie podstawowych aksjomatów mechaniki kwantowej ulegałaby całkowitemu zatrzymaniu. Rezultat ten znany jest pod nazwą paradoksu Zenona [14]. Ogólniej, dowolna seria pomiarów sprawdzających przebywanie układu w stanie zmiennym w czasie w sposób ciągły zadaje we wspomnianej granicy ewolucję w postaci mierzonego stanu [15, 16], stąd alternatywna, choć mniej rozpowszechniona nazwa: zdominowana ewolucja w czasie (DTE, od ang. *dominated time evolution*) [16]. Sama nazwa paradoksu Zenona nawiązuje do rozważań przypisywanych przez Arystotelesa Zenonowi z Elei, w szczególności do tzw. strzały Zenona [14]. W skrócie, jak patrzy się na wystrzeloną strzałę, to zawsze widzi się ją spoczywającą w konkretnym miejscu, a zatem nie może się poruszać; stąd obserwacje zmysłowe są sprzeczne, a obserwowane zjawiska ruchu są iluzją. Odpór tego argumentu w ramach mechaniki klasycznej daje zastosowanie rachunku różniczkowego, co pozwala strzale przypisać w dowolnym momencie prędkość; innymi słowy, stan strzały jest elementem przestrzeni fazowej obejmującej nie tylko położenia ale i pędy, czego migawkowe 'zdjęcie' lecącej strzały nie jest w stanie uchwycić.

Z kolei zjawisko kwantowomechaniczne opisane wyżej nazwano paradoksem w następującym znaczeniu [14]: dla kompletności mechaniki kwantowej przyjmuje się postulat, że przejściu układu pomiędzy dwoma ortogonalnymi stanami kwantowymi (czy, ogólniej, dwoma ortogonalnymi podzbiorami przestrzeni Hilberta) w jakiejś chwili eksperymentu przypisać można pewne prawdopodobieństwo. Odnosi się ono do wyniku pomiaru, w którym układ jest monitorowany w sposób ciągły. Jednakże, to ciągłe monitorowanie, rozumiane jako przejście z czasem pomiędzy pomiarami do zera, zatrzymuje ewolucję. Stąd wspomnianego prawdopodobieństwa nie można zdefiniować, co przeczy wyżej wyłożonemu rozumieniu kompletności. Skądinąd wypada zauważyć, że skoki kwantowe w dawnym rozumieniu Bohra i innych jako momentalne przejście pomiędzy jednym stanem kwantowym a drugim można fizycznie zdefiniować dopiero w kontekście regularnie i często powtarzanych pomiarów [17]. Spośród możliwych rozwiązań tak rozumianego paradoksu (patrz dyskusja w [14]) obecnie powszechnie przyjmuje się, że opis ciągłego monitorowania układu kwantowego jako granica zerowego czasu pomiędzy pomiarami rzutowymi jest nieadekwatna, i konieczny jest model opisujący realistycznie oddziaływanie układu kwantowego z obserwowanym detektorem [18–22]. O tym, że pomiar rzutowy jest tu nie do końca właściwy, świadczy też to, że reżim krótkich czasów,

zgodnie z zasadą nieoznaczoności, powinien wprowadzać dużą nieoznaczoność energii [15]. Sam efekt DTE sugeruje, że w tej granicy 'pomiar rzutowy' traci sens i znaczenie pomiaru.

Przypadek, w którym wpływ detektora na układ jest minimalizowany (kosztem precyzji), nazywać będę pomiarem słabym. Z modelu słabego pomiaru opartego na gaussowskich operatorach Krausa [23] można uzyskać model pomiaru ciągłego w granicy poprzednio prowadzącej do paradoksu Zenona [24]. Sama zaś nieodwracalna ewolucja kwantowa jest, standardowo, modelowana przez uwzględnienie przejść ze stanu początkowego do ciągłego, nieskończonego kontinuum stanów zwanego dalej rezerwuarem. Dla wytłumaczenia specyfiki tego podejścia na tle innych, należy dokonać następujących obserwacji:

1. Przede wszystkim, nie jest stosowane przybliżenie unitarne, tj. akt pomiaru detektora nie jest pomijany [22]. Wiąże się to z tym, że zamiast oddziaływania z pojedynczym detektorem, układ w modelu oddziałuje z szeregiem sond, w każdej chwili czasu z inną sondą, których stan po tym oddziaływaniu jest mierzony. Tak można np. symulować oddziaływanie elektronów przepływających przez kropkę kwantową (będącą tu układem badanym), jak np. w [25, 26]. Są jednak istotne różnice. Przede wszystkim, zamiast rozpatrywania układu wielu elektronów stanowiących detektor, przyjmuje się istnienie stacjonarnego przepływu i rozpatruje oddziaływanie z pojedynczym elektronem w każdej chwili (a także stosuje się przejście graniczne dla czasów pomiędzy oddziaływaniami z detektorem). Dalej, strumień cząstek jest tutaj przyjęty za stały, tj. wpływ układu obserwowanego na tempo przepływu jest uznany za zanedbywalnie mały. Stąd łącznie, w którym umieszczono badany układ kwantowy, klasyfikuje się jako mezoskopowe [27, 28]. Innym możliwym zastosowaniem prezentowanego opisu byłby dwupoziomowy atom, którego stan monitorowany jest z pomocą słabej wiązki laserowej.
2. W standardowej definicji ZE/AZE rozpatruje się nie tyle średnie wartości obserwabli czy korelacje, ale prawdopodobieństwo uzyskania szeregu wyników pozytywnych, tj. świadczących o tym, że układ pozostaje w stanie początkowym. Taki opis jest tu zarzucony na rzecz badania wartości oczekiwanej i korelacji drugiego rzędu. Powodem tego jest przede wszystkim możliwość zastosowania równania Lindblada z członem dekoherencyjnym [24], co znacząco upraszcza zagadnienie. Jest jednak też powód bardziej fundamentalny: wynikiem pomiaru w danej chwili czasu jest wartość ciągła, której momenty statystyczne są powiązane z korelacjami obliczonymi dla operatora będącego obserwabłą. Definicja w takim przypadku, co stanowi prawdopodobieństwo pozostawania w stanie początkowym, nie jest oczywista.
3. Efekt oddziaływania z detektorem można w pewnych przypadkach sprowadzić do badania ewolucji stanu układu w oparciu o niehermitowski, optyczny Hamiltonian [21, 29]. W stosowanym zaś równaniu Lindblada dekoherencji ulegają tylko pozadiagonalne elementy macierzy opisujące przejścia między stanem początkowym a rezerwuarem.
4. Rozpatrywany jest tylko najprostszy przypadek pomiaru bezpośredniego, gdy obserwabłą jest operator rzutowy na stan początkowy. Pożądana byłaby analiza pomiaru pośredniego (jak np. [22, 30]), tzn. z użyciem nietrywialnej obserwabli zdefiniowanej w oparciu o stany rezerwuaru.
5. W standardowym podejściu skutek pomiaru z wynikiem pozytywnym rezerwuar powraca do stanu początkowego. Nie jest to konieczne, rezerwuar może ulegać zmianie i w tym sensie stanowić 'pamięć' układu o dotychczasowych wykonanych pomiarach. Trzeba to uwzględnić np. przy wyjściu poza tzw. przybliżenie rotującej fali [31]. W niniejszym modelu rezerwuar też posiada 'pamięć', z dwóch powodów: gdyż zamiast

pomiaru rzutowego stosowany jest pomiar słaby, oraz gdyż dopuszczone jest uzyskiwanie negatywnych wyników, co i w przypadku pomiarów rzutowych pozostawiałoby ślady dotychczasowej ewolucji w rezerwuarze.

Ze względu na punkt 2 proste porównanie wyników ilościowych ze standardową teorią z pomiarem rzutowym nie jest tutaj zasadne. Dużą część przygotowawczą pracy stanowi z tego powodu analiza alternatywnych definicji z punktu 2 wyżej dla pomiaru rzutowego. Ta analiza sama w sobie może być użyteczna przy planowaniu eksperymentów w oparciu o pomiary rzutowe czy pulsowe. Demonstracja wykaże, że tym sposobem można równie dobrze zdefiniować ZE i AZE. Jakościowo efekty są takie same, choć mogą się różnić ilościowo. Natomiast stracony jest kontekst skoków kwantowych. Przy tej okazji, warunek konieczny na AZE odtworzyć można z pomocą tzw. wartości słabej operatora, łamiącej klasyczne intuicje dotyczące pomiaru [32] (choć nie wprowadza ona w tym kontekście żadnych paradoksów).

Oprócz przybliżonych rachunków dla przypadków, przeprowadziłem też rachunki numeryczne dla szczególnego przypadku oddziaływania układu z rezerwuarem, tzw. czynnika lorentzowskiego. Jest to powszechnie stosowany punkt odniesienia dla dyskutowanych zjawisk [22, 25, 26, 31], z racji możliwego sprowadzenia zagadnienia do modelu dwupoziomowego z zanikiem jednego ze stanów [31, 33–35].

Obliczenia które, jak miemam, nie są konieczne do śledzenia wyvodu, umieściłem w dodatkach do poszczególnych rozdziałów. Oprócz tego w trzech pierwszych dodatkach zawarłem dłuższe obliczenia, po części odtwarzające wyniki ze znanej literatury, i także niekonieczne do śledzenia wyvodu (ozn. np. C). Odwołanie w rozdziale X do wzoru x zapisywane jest w konwencji (x) . Odwołanie w rozdziale $Y \neq X$ do tego samego wzoru jest z kolei oznaczane przez $(X.x)$.

Rozdział 1

Definicje, metody, cele

Spis treści

1.1	Konwencje dotyczące transformaty Fouriera	5
1.2	Efekt Zenona	5
1.2.1	Skale czasowe i Złota Reguła Fermiego	6
1.2.2	Niestandardowe definicje	8
1.3	Złota Reguła Fermiego	8
1.4	Pomiar ciągły	9
1.4.1	Pomiar słaby	10
1.4.2	Przejście do pomiaru ciągłego	11
1.5	Efekty klasyczne a efekty kwantowe	12
1.6	Postać Hamiltonianu	12
1.6.1	Ograniczenia modelu	13
1.6.2	Wartości funkcyjne zmiennych	14
1.6.3	Czynnik lorentzowski	14
1.7	Szczegółowe cele, przegląd wyników, struktura pracy	15

Przedstawię tu przegląd wiadomości o efekcie Zenona, jak również podstawowe informacje o stosowanym modelu pomiaru ciągłego. Opiszę przy tej okazji wielkości, które mogą posłużyć do sformułowania niestandardowych kryteriów na zachodzenie efektu Zenona lub anty-Zenona. Omówię też pokrótce Złotą Regułę Fermiego i stosowaną w pracy postać Hamiltonianu. Na koniec wskazuję konkretne cele pracy i streszczam uzyskane wyniki z kolejnych rozdziałów.

1.1 Konwencje dotyczące transformaty Fouriera

$$\begin{aligned}\bar{f}(x) &= \int dk f(k) e^{ikx}, & f(k) &= \frac{1}{2\pi} \int dx \bar{f}(x) e^{-ikx}, \\ \bar{f}^*(x) &= \int dk f^*(k) e^{-ikx}, & f^*(k) &= \frac{1}{2\pi} \int dx \bar{f}^*(x) e^{ikx}, \\ \bar{\psi}(x, y) &= \int \int dk dq \psi(k, q) e^{ikx - iqy} \quad \text{i td.}\end{aligned}$$

1.2 Efekt Zenona

Niech będzie dany układ kwantowy, który jest przygotowany w konkretnym czystym stanie kwantowym i który ewoluje od tego stanu w sposób nieodwracalny, tj. prawdopodobieństwo $p(t)$ przebywania w stanie początkowym zbiega do zera, kiedy czas $t \rightarrow \infty$. Można wyrazić $p(t) = 1 - q(t)$, gdzie $q(t)$ to prawdopodobieństwo opuszczenia stanu pierwotnego. Układ ten

poddany będzie pomiarom rzutowym przeprowadzanym co krótki czas τ , sprawdzającym, czy pozostaje on w swoim stanie początkowym. Wynik pomiaru świadczący o tym, że owszem, pozostaje, nazywać będę pozytywnym. Niech $P(t)$, $t = \tau N$ będzie prawdopodobieństwem wyniku pozytywnego w szeregu N pomiarów. Dla τ krótkich w porównaniu z t , $P(t)$ może być traktowana jako zanikająca funkcja wykładnicza postaci:

$$P(t) = e^{-Rt}, \quad R = \frac{q(\tau)}{\tau}. \quad (1)$$

Dla krótkich czasów zachodzi $P(t) > p(t)$. Wynika to z rozwinięcia prawdopodobieństwa w szereg dla krótkich czasów:

$$q(t) = 1 - p(t) = \frac{t^2}{\tau_z^2}, \quad (2)$$

gdzie τ_z wyznacza skalę czasową zachowania kwadratowego. ZE (AZE) zdefiniować można warunkiem $P(t) > p(t)$ ($P(t) < p(t)$). Ponieważ zanik kwadratowy jest wolniejszy od wykładniczego, dla dostatecznie krótkich czasów zawsze zachodzi ZE. Dla $\tau \rightarrow 0$ obowiązuje $P(t) \rightarrow 1$ – ww. paradoks Zenona. W literaturze spotkać można także inne definicje: oparte na porównaniu eksponencjalnego wykładnika R z wykładnikiem obliczonym ze Złotej Reguły Fermiego [22], czy też oparte na kryterium dynamicznym $dR/d\tau < 0$ ($dR/d\tau > 0$): spowolnienia (przyspieszenia) zaniku przy zmniejszeniu czasu τ identyfikowanego jako ZE (AZE). [36]. W skrajnym przypadku definicja jest rozszerzona na każde zaburzenie wykładnika zaniku pod wpływem otoczenia [22, 37–39].

Ta sekcja obejmuje dalej omówienie związku ZE / AZE ze Złotą Regułą Fermiego oraz charakterystycznych skal czasowych dla ZE. Dalej, na potrzeby dalszych rozważań, zaproponuję inne możliwe definicje ZE / AZE.

1.2.1 Skale czasowe i Złota Reguła Fermiego

Przy oznaczeniu stanu początkowego przez $|\Omega\rangle$ a Hamiltonianu obserwowanego układu przez $\hat{H}$, obowiązuje:

$$\frac{\hbar^2}{\tau_z^2} = \langle \Omega | \hat{H}^2 | \Omega \rangle - \langle \Omega | \hat{H} | \Omega \rangle^2 = \frac{1}{\hbar^2} \sum_i |g_i|^2, \quad (3)$$

gdzie wprowadziłem oznaczenie $g_i = \langle i | \hat{H} | \Omega \rangle$ indeks i przebiega po wszystkich stanach bazowych różnych od $|\Omega\rangle$, ostatnia równość zaś zachodzi ze względu na rozkład jedynki $\hat{1} = |\Omega\rangle \langle \Omega| + \sum_i |i\rangle \langle i|$. Jeśli obserwowany układ można rozpatrywać jako uwięziony w lokalnej pułapce potencjału, czas τ_z jest przy tym średnią geometryczną z dwóch innych czasów charakterystycznych [16]:

$$\tau_z = \sqrt{\tau_d \tau_t}, \quad \tau_t < \tau_z < \tau_d, \quad (\tau_t = \tau_j). \quad (4)$$

Czas τ_t jest czasem przejścia (indeks t od ang. *traversal*) przez obszar klasycznie dozwolony, lub związany z tunelowaniem przez obszar klasycznie zabroniony. W kontekście ZE ten czas jest częściej nazywany czasem skoku i oznaczany τ_j [21] (indeks j od ang. *jump*). Czas τ_d jest charakterystyczną skalą zaniku wykładniczego (indeks d od ang. *decay*) stanu kwantowego, jeśli taka skala czasowa w danym układzie istnieje – inaczej wzór nie obowiązuje. By zanik wykładniczy wskutek powtarzanych pomiarów był odróżnialny od zwykłego zaniku wykładniczego, ze względu na (1) i (2) powinna zachodzić nierówność

$$\frac{t\tau}{\tau_z^2} < \frac{t}{\tau_d}, \quad \text{czyli} \quad \tau < \frac{\tau_z^2}{\tau_d} = \tau_j. \quad (5)$$

Innymi słowy, czas τ zgodnie z (4) winien być mniejszy niż τ_j . Tu już czas skoku definiowany jest bez zawężania klasy dyskutowanych układów kwantowych.

Złotą Regułę Fermiego (FGR, od ang. *Fermi Golden Rule*) będę tu rozumiał jako spełnianą przez wiele układów w niestabilnym stanie kwantowym zależność dla długich czasów:

$$p(t) \simeq Z_{fgr} e^{-R_{fgr} t}, \quad (6)$$

przy czym $R_{fgr} = \frac{1}{\tau_d}$ jest wyrażone konkretnym wzorem. Zagadnienie ZE / AZE można ująć jako modyfikacja do FGR ze względu na pomiary [19, 30].

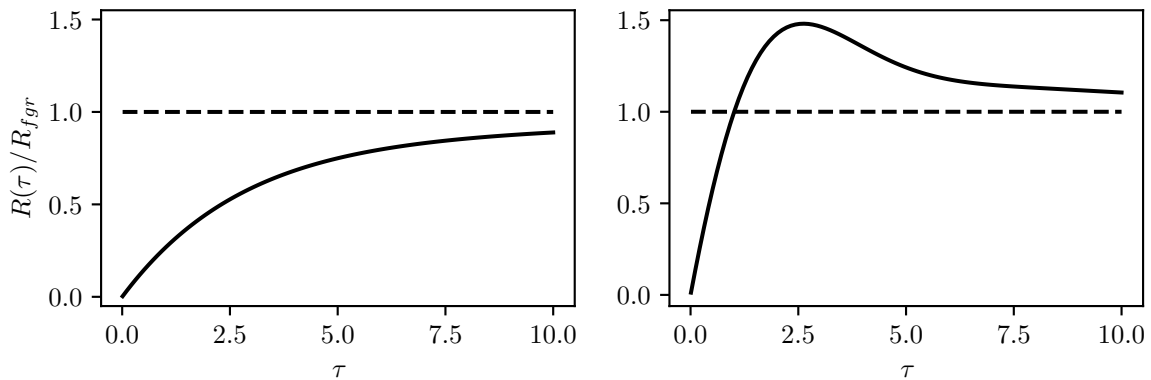
Stała Z_{fgr} w powyższym wzorze zależy od układu i jego początkowego stanu. Jej wartość pozwala napisać kryterium, czy w danym układzie możliwe jest zachodzenie AZE przy definicji opartej na porównaniu R z R_{fgr} . Kryterium to nie opiera się na przybliżeniu (1). Rozumowanie, za [22], jest następujące. Jako, że dla czasów τ zbiegających do zera zawsze zachodzi ZE, AZE może zajść, jeśli istnieje rozwiązanie równania:

$$R(\tau^*) = R_{fgr}. \quad (7)$$

AZE zachodzi dla $\tau > \tau^*$, przy czym dla $\tau \rightarrow \infty$ zaczyna obowiązywać Złota Reguła Fermiego. Asymptotyczna postać $R(\tau)$ w tej granicy, z (6) to

$$R(\tau) = R_{fgr} - \frac{\log Z}{\tau}, \quad (8)$$

z czego wynika, że jeśli $Z < 1$, $R(\tau)$ dąży do R_{fgr} od góry. W przeciwnym przypadku dąży od dołu. Oba zachowania zilustrowano na rys. 1. Ponieważ, zgodnie z paradoksem Zenona,



RYSUNEK 1: Przykładowy stosunek $R(\tau)$ do R_{fgr} dla $Z < 1$ po lewej, i $Z > 1$ po prawej. Czas τ w jednostkach umownych.

$R(0) = 0$, w tym pierwszym przypadku zależność $R(\tau)$ musi przyjmować wartość R_{fgr} dla jakiegoś $\tau \in [0, \infty[$. Stąd (7) ma rozwiązanie. Kryterium

$$Z < 1 \quad (9)$$

nazywane będzie warunkiem koniecznym na zachodzenie AZE (ale nie wystarczającym). Do podanych skal czasowych można dodać czas optymalny dla obserwacji AZE. Zgodnie z powyższą dyskusją wypadałby on w maksimum $R(\tau)$.

Jeśli wyrażenia g_i uznać za małe wielkości, to dla krótkich czasów można rozwinąć operator ewolucji w szereg w kolejnych potęgach g_i zamiast kolejnych potęg τ , co prowadzi do wzoru

[22, 36]

$$q(\tau) = \tau^2 \sum_i |g_i|^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{E_i \tau / \hbar}{2} \right) = \tau R(\tau) \quad (10)$$

gdzie $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, zaś $E_i = \langle i | \hat{H} | i \rangle$, przy czym baza stanów i zadana jest teraz przez wektory własne Hamiltonianu po odjęciu odeń operatorów przejść pomiędzy $|\Omega\rangle$ a dowolnymi innymi stanami. Wzór ten w oparciu o kryterium dynamiczne pozwala zidentyfikować odpowiednie efekty w zależności od przekrywania się dwóch zsumowanych funkcji. Wyznaczenie maksimum $R(\tau)$, o ile istnieje, z warunku zerowania się pochodnej prowadzi do uwikłanej definicji τ_{az} czasu optymalnego do obserwacji AZE.

1.2.2 Niestandardowe definicje

Badanie prawdopodobieństwa $p(t)$ przebywania w stanie początkowym wiąże zagadnienie spowodowania (tudzież przyspieszenia) ewolucji z obserwacją 'skoków kwantowych'. Poniższe kryteria wciąż pozwalają kwantyfikować opóźnienie ewolucji, lecz potencjalnie nie wiążą się już z możliwością wykrywania skoków kwantowych. Zresztą, inne modele pomiaru mogą być tego zjawiska pozbawione. Oznaczam:

$$h_0(t_1, t_2) \equiv p(t_1, t_2) - p(t_2) = p(t_1)p(t_2 - t_1) - p(t_2), \quad (11)$$

gdzie $p(t_1, t_2)$ to prawdopodobieństwo wykrycia za pomocą pomiarów rzutowych w chwilach t_1 i t_2 za każdym razem stanu pierwotnego. Wartość $h_0(\tau, 2\tau)/\tau^2$ kwantyfikuje natężenie ZE lub AZE (zależnie od znaku h_0) w kontekście początkowego zachowania się prawdopodobieństw. Dla $\tau \rightarrow 0$ to wyrażenie dąży do swej najwyższej wartości. W układach, w których obowiązuje FGR, wskaźnikiem ZE / AZE w rozumieniu porównania R z R_{FGR} jest wartość $h_0(t, t + \tau)/p(t + \tau)$ dla długich czasów t . wreszcie w takich układach dla t_1 i $t_2 - t_1$ dążących do nieskończoności, $h(t_1, t_2) < 0$ odtwarza warunek konieczny do AZE (9). Niech $\hat{O}$ oznacza rzut na stan początkowy; wyrażenie (11) można przepisać jako różnicę korelacji i wartości oczekiwanej dla tego operatora w pomiarze rzutowym:

$$h_0(t_1, t_2) = \langle o(t_1)o(t_2) \rangle_{p0} - \langle o(t_2) \rangle_{p0} \quad (12)$$

(indeks P od ang. *projective* – rzutowy, indeks 0 by zaznaczyć brak innych pomiarów poza tymi w chwilach t_1 i t_2). Wypada zauważyć, że przypadek $h(t_1, t_2) < 0$ świadczy o tym, że na pewno $p(t_1, t_2)/p(t_2) \neq p(t_2|t_1)$, czyli innymi słowy pomiar rzutowy jest inwazyjny, i rozkłady prawdopodobieństwa dla scenariuszy z jednym i z dwoma pomiarami są różne.

Dla porównania, zachodzi $P(t_1)P(t_2 - t_1) - P(t_2) = 0$ z racji wykładniczej postaci $P(t)$. Także, jeśli pomiary są przeprowadzane z częstością $\nu = \frac{1}{\tau}$, obowiązuje

$$\langle o(t_1)o(t_2) \rangle_{p\nu} - \langle o(t_2) \rangle_{p\nu} \geq 0, \quad (13)$$

gdyż w tym przypadku i korelacja i wartość oczekiwana oparte są na tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa, a wynikiem każdego pomiaru jest albo 0 albo 1.

1.3 Złota Reguła Fermiego

Niech układ będzie taki, że prawdopodobieństwo stanu początkowego dla długich czasów ma postać asymptotyczną:

$$p(\tau) = Z_{fgr} e^{-R_{fgr} \tau}. \quad (14)$$

Jak powiedziano, dla krótkich czasów i odpowiedniej klasy Hamiltonianów stosować można wzór (10). Po rozwinięciu (10) i (14) w kolejnych potęgach g_i , powinno uzyskać się zgodność w

każdym rzędzie. W szczególności zatem można wyprowadzić równania w najniższym rzędzie:

$$1 - p(t) = 1 + Z_{fgr} - R_{fgr}t. \quad (15)$$

W konsekwencji, co pokazano w dodatku A,

$$\begin{aligned} R_{fgr} &= 2\pi G(0), & G(E) &= \sum_i |g_i|^2 \delta(E_\Omega - E_i), \\ Z_{fgr} &= 1 + \int dz \sum_i |g_i|^2 |z| e^{-iE_i z}, \end{aligned} \quad (16)$$

przy czym $E_\Omega = \langle \Omega | \hat{H} | \Omega \rangle$, zaś na bazę $|i\rangle$ obowiązuje to samo ograniczenie co we wzorze (10). Jest to standardowe sformułowanie FGR, uzupełnione o wyrażenie na Z_{fgr} . W dodatku A przedstawiono także wyprowadzenie FGR łącznie z postacią wykładniczą (14) w oparciu o biegun amplitudy prawdopodobieństwa w reprezentacji położeniowej. Jest to uproszczone podejście bazujące na identyfikacji rezonansu (bieguna) propagatora [40–43]. Szczegółowa analiza rezonansu pozwala wprowadzić poprawki lub wyznaczyć odstępstwa od FGR [42]. W praktyce fizyki wysokich energii i nie tylko rezonanse propagatora identyfikuje się jako ślad nietrwałego stanu kwantowego lub cząstki. Ta sama zasada może być przyjęta i w tym przypadku. W istocie, w rozdziale 5 wyprowadzone są rozwiązania zanikowe równań Schrödingera, spoza przestrzeni Hilberta, z których jedno charakteryzuje się w przybliżeniu zanikiem z wykładnikiem R_{fgr} . Także, schemat obliczeń oparte na transformacji Laplace’a z dodatku A można powtórzyć w reprezentacji czasowej i znaleźć takie rozwiązania zanikowe. To z nich, którego wykładnik przybliżyć można przez R_{fgr} nazywać będę stanem Fermiego. Obliczenia prowadzące do modyfikacji FGR w różnych przypadkach będę równoważnie nazywał obliczeniami dla stanu Fermiego. Sens fizyczny takiego stanu samego w sobie nie będzie dyskutowany, lecz gwoili wyjaśnienia, wchodzi on wraz z innymi rozwiązaniami zanikowymi w skład sumy tworzącej fizyczny stan układu, ze współczynnikiem Z_{fgr} . Przykład tego jest w rozdziale 5. Stan Fermiego rozumieć będę jako stan zanikowy o najmniejszym wykładniku (tj. jego części rzeczywistej). Stąd dla długich czasów pozostałe rozwiązania zanikowe są do zaniechania w porównaniu ze stanem Fermiego, co prowadzi właśnie do FGR.

Istotnym warunkiem dla obowiązywania FGR jest to, by oddziaływanie układu z rezerwuarem było małe w porównaniu z szerokością zakresu stanów rezerwuaru, z którymi układ dostatecznie silnie oddziałuje. Gdyby współczynniki g_i zastąpić funkcją płaską i uciągnąć zagadnienie, model przewiduje zanik wykładniczy zgodny z FGR, przy $Z = 1$. Z kolei gdy ograniczyć przestrzeń stanów $|i\rangle$ do ich dyskretnej liczby, model sprowadza się do układu ze skończoną liczbą stanów i przewiduje oscylacje Rabego. Pomiedzy tymi dwoma przypadkami jest taki zestaw parametrów, dla którego zachodzi przejście od zaniku wykładniczego z FGR dla długich czasów do tłumionych oscylacji funkcji prawdopodobieństwa. W tym drugim przypadku identyfikacja ZE i AZE nie jest możliwa dla długich czasów, i musi się opierać na zachowaniu dla krótkich czasów.

Oprócz tego, przy ograniczeniu od dołu spektrum energetycznego układów kwantowych, dla bardzo długich czasów zanik wykładniczy jest zastępowany przez potęgowy [41, 44]. Tego efektu także nie będę tutaj dyskutować.

1.4 Pomiar ciągły

Niech $\hat{P}_a$ będzie rzutem odpowiadającym wynikowi a pomiaru. Stan końcowy po pomiarze zapisać można jako $\hat{P}_a \hat{\rho} \hat{P}_a$ po znormalizowaniu. Na potrzeby konstrukcji spójnej teorii ciągłego

pomiaru operator $\hat{P}_a$ zastąpiony będzie tzw. operatorem Krausa w postaci gaussowskiej:

$$\hat{K}(a) = (2g/\pi)^{\frac{1}{4}} e^{-g(a-\hat{A})^2}, \quad (17)$$

gdzie a będąca liczbą rzeczywistą jest wynikiem pojedynczego pomiaru. Operator ten opisuje wpływ detektora na obserwowany układ [23]. Teoria motywująca taką konstrukcję i sama konstrukcja przedstawione są w dodatku B. W tym co następuje, przedstawiona zostanie koncepcja tzw. pomiaru słabego i wreszcie procedura uciąglenia pomiaru.

1.4.1 Pomiar słaby

W granicy $g \rightarrow 0$ pomiar zadany przez (17) nazywany jest słabym. W szczególności, w tej granicy dla pomiarów obserwabli $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ (dla których wskaźniki odpowiadających im detektorów to a , b , c) obowiązują wzory [28, 45]:

$$\begin{aligned} \langle a(t_1) \rangle_{w0} &= \langle \hat{A}(t) \rangle = \langle a \rangle_{p0}, \\ \langle a(t_1)b(t_2) \rangle_{w0} &= \langle \{ \hat{A}(t_1), \hat{B}(t_2) \} \rangle / 2, \\ \langle a(t_1)b(t_2)c(t_3) \rangle_{w0} &= \langle \{ \hat{A}(t_1), \{ \hat{B}(t_2), \hat{C}(t_3) \} \} \rangle / 4 \end{aligned} \quad (18)$$

i td dla większej liczby pomiarów, przy czym $t_1 < t_2 < t_3$. Nawiasy klamrowe oznaczają antykomutator:

$$\{ \hat{A}, \hat{B} \} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}. \quad (19)$$

Operatory zależne od czasu wyrażone są w obrazie Heisenberga, zaś przez $\langle \cdot \rangle$ rozumie się wartość oczekiwaną wziętą dla początkowego stanu układu obserwowanego. Indeks w (od ang. *weak*) odnosi się do typu pomiaru, natomiast indeks 0 do faktu, że nie są wykonywane inne pomiary poza wyróżnionymi chwilami t_1 , t_2 , t_3 i td. Jeśli stan początkowy oznaczyć jako $\hat{\rho}$, to korzystając z własności śladu i antykomutatorów wzory (18) można przepisać:

$$\begin{aligned} \langle a(t_1) \rangle_q &= \text{Tr}[\{ \hat{A}(t_1), \hat{\rho} \}] / 2, \\ \langle a(t_1)b(t_2) \rangle_q &= \text{Tr}[\{ \hat{B}(t_2), \{ \hat{A}(t_1), \hat{\rho} \} \}] / 4 \text{ i td.} \end{aligned} \quad (20)$$

Ścisłe rzecz biorąc, z racji zastosowanego przejścia granicznego $g \rightarrow 0$ mogła być w zasadzie wykonana dowolna skończona liczba pomiarów. Lecz gdy liczba pomiarów rozbiega do nieskończoności, a czas pomiędzy nimi do zera, należy zastosować wyniki z następnej podsekcji.

Ponieważ obserwabla $\hat{O}$ jest rzutem, wyrażenie

$$\text{w.v.}(t_1, t_2) = \frac{\langle o(t_1)o(t_2) \rangle_{w0}}{\langle o(t_2) \rangle_{w0}} \quad (21)$$

jest tzw. wartością słabą operatora $\hat{O}$ (ang. *weak value*). Przez wartość słabą operatora $\hat{A}$ rozumie się wartość średnią wyników słabych pomiarów po dokonaniu post-selekcji stanów detektora – czy, równoważnie, wielkość średnią z pomiaru słabego bezpośrednio po którym wykonano rzutowanie, po znormalizowaniu. Związek pomiędzy uzyskanymi wzorami a naszkicowaną wyżej procedurą mierzenia wartości słabych naświetlony zostanie w rozdziale 3. Istnieje propozycja, że mierzone wartości słabe konstytuują pomiar wartości operatora podczas przejścia od stanu przygotowanego do wybranego stanu, dla którego dokonuje się post-selekcji [46]. Jednakże, skutek takiej post-selekcji wartość słaba operatora może przyjmować wielkości wykraczające poza zakres zmienności wartości własnych danego operatora [15, 28, 32]. Stąd też złamanie nierówności

$$\frac{\langle o(t_1)o(t_2) \rangle_{w0}}{\langle o(t_2) \rangle_{w0}} - 1 \leq 0 \quad (22)$$

byłoby przykładem takiego właśnie zachowania. Postać funkcyjna wielkości słabej jednocześnie przypomina wielkość (11), czy też raczej $p(t_1, t_2)/p(t_2)$, która pozwala sformułować odpowiednie kryterium ZE / AZE.

Nierówność (22) jest przykładem nierówności Leggetta-Garga [55], choć bez ograniczenia na możliwe wyniki pomiarów – wskaźnik $o(t)$ (nie średnia $\langle o(t) \rangle$ czy korelacja) w pojedynczym eksperymencie może przyjmować wartości większe niż 1. Stąd też nie jest to złamanie klasycznej nierówności na rozkład prawdopodobieństwa. Problem ten będzie niżej skomentowany.

1.4.2 Przejście do pomiaru ciągłego

Sekcja ta stanowi przegląd wyników z [24]. Poniekąd są one uzyskane w dodatku C, lecz dla niehermitowskiego Hamiltonianu – na potrzeby dalszej dyskusji. Niech pomiar wyrażony przez (17) będzie powtarzany co czas τ . Można przejść do granicy $\tau \rightarrow 0$, $g \rightarrow 0$ utrzymując jednak stały stosunek

$$\lambda = \frac{g}{\tau}. \quad (23)$$

Wtedy prawdopodobieństwo zaobserwowania wyników zgodnych z jakąś funkcją $a(t)$ można wyrazić jako spłot:

$$P[a] = \int Da' P_d[a - a'] P_q[a'], \quad (24)$$

gdzie $P_d[a]$ opisuje Gaussowski szum związany z pomiarem: $P_d[a] \propto e^{-2\lambda \int a^2(t) dt}$, zaś $P_q[a]$ jest kwaziprawdopodobieństwem na wzór dystrybucji Wignera [47–49]. W istocie, równania (18) i ich odpowiedniki podane niżej dla pomiaru ciągłego wprowadzają szczególny typ uporządkowania czasowego operatorów, które obliczyć można w ramach podejścia Wignera uogólnionego z pomocą całek po trajektoriach [50].

Macierz gęstości opisująca stan zmieszany układu podległego ciągłym pomiarom ewoluuje zgodnie z następującym równaniem Lindblada:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} \equiv \check{L}\hat{\rho}(t) = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)] - \lambda[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{\rho}(t)]]/2, \quad (25)$$

gdzie $\check{L}$ oznacza superoperator Liouville’a-Lindblada. Jeśli wyrazić $\hat{\rho}(t)$ w bazie stanów własnych $\hat{A}$, to można pokazać, że wyrazy pozadiagonalne są tłumione. Wprowadzając superoperator ewolucji $\check{U}(t) = \mathcal{T} \exp \int_0^t \check{L}$, tzn. $\hat{\rho}(t) = \check{U}(t)\hat{\rho}$, można obliczyć, że ($t_1 < t_2 < t_3$)

$$\begin{aligned} \langle a(t_1) \rangle_q &= \text{Tr}[\check{A}\check{U}(t_1)\hat{\rho}] = \text{Tr}[\hat{A}\hat{\rho}(t_1)], \\ \langle a(t_1)a(t_2) \rangle_q &= \text{Tr}[\check{A}\check{U}(t_1 - t_2)\check{A}\hat{\rho}(t_1)], \\ \langle a(t_1)a(t_2)a(t_3) \rangle_q &= \text{Tr}[\check{A}\check{U}(t_3 - t_2)\check{A}\check{U}(t_2 - t_1)\check{A}\hat{\rho}(t_1)] \text{ i td,} \end{aligned} \quad (26)$$

przy czym indeks q odnosi się do korelacji obliczonych na bazie kwaziprawdopodobieństwa $P_q[a]$, zaś $\check{A}\hat{B} = \{\hat{A}, \hat{B}\}/2$. Dla $\lambda = 0$ równania te sprowadzają się do (20), czyli równoważnie (18). Z racji (24), tak długo jak wyrażenia nie zawierają autokorelacji (tzn. potęg $a(t)$ dla tego samego czasu t), obowiązują:

$$\langle \cdot \rangle_{w\lambda} = \langle \cdot \rangle_q. \quad (27)$$

Kwaziprawdopodobieństwo $P_q[a]$, tak samo jak i prawdopodobieństwo $P[a]$, spełnia warunek, który można powiązać z nieinwazyjnością pomiaru:

$$\int da(t_1) P_q(a(t_1), a(t_2), \dots, a(t_n)) = P_q(a(t_2), \dots, a(t_n)) \quad (28)$$

(i tak samo dla dowolnych innych chwil czasu), lecz jednocześnie, jak widać z (26), pomiary w liczbie większej niż dwa łamią symetrię czasową [51].

Przy przejściu $\lambda \rightarrow 0$ funkcja $P_q[a]$ ma jasno określoną granicę, która pozwala stosować uzyskane kwaziprawdopodobieństwo do przypadku pomiarów słabych. Stąd powyższe obserwacje odnoszą się też do nich.

1.5 Efekty klasyczne a efekty kwantowe

Poczynione wyżej uwagi odnośnie wartości słabej operatora i rozkładach prawdopodobieństwa wymuszają szerszy komentarz odnośnie ZE i AZE jako efektów kwantowych. Proponuję na potrzeby tego komentarza następujące, nieostre definicje: dane zjawisko jest efektem kwantowym w szerszym znaczeniu, jeśli jest w dużym stopniu powszechne, wiąże się z ogólnym teoretycznym wynikiem realizowanym przez nawet bardzo różne układy; zaś efektem kwantowym w węższym znaczeniu jest wtedy, gdy nie ma ono analogu w mechanice klasycznej. W takim rozumieniu ZE i AZE nie są efektami kwantowymi w węższym znaczeniu [16]. Jednakże, ZE wynika z dwóch zjawisk obecnych wg mechaniki kwantowej w każdej fizycznej sytuacji: zaniku kwadratowego (2) i inwazyjności pomiarów rzutowych. Stąd też wypada go wręcz nazywać efektem kwantowym w szerszym znaczeniu. Podobnie jest z powiązaniem z problemem 'skoków kwantowych'. Z kolei AZE i nietypowe zachowanie wartości słabych są co prawda mniej powszechne, ale też są efektami kwantowymi w szerszym znaczeniu.

Różne sposoby, w jaki pomiar może być inwazyjny, demonstrują najlepiej korelacje trzeciego i wyższego rzędu, poczynając od trzeciego równania w (18). Jest ono w ogólności niesymetryczne ze względu na zamianę czasów pomiarów – np. gdyby zmienić t_3 na moment pomiędzy t_2 i t_1 . Ta własność wystarczy do pokazania łamania klasycznie rozumianych zasad zachowania [52, 53] co świadczy o inwazyjności pomiarów słabych. Z drugiej strony, pomiar w chwili t_3 (kiedykolwiek by to nie było) nie wpływa na korelacje drugiego rzędu wyników pozostałych pomiarów czy na wartości oczekiwane tamtych [51], co jest cechą nieinwazyjnych pomiarów klasycznych.

Przykładami zjawisk kwantowych w znaczeniu węższym jest łamanie nierówności Bella [54] czy Leggetta-Garga [55]. Łamanie ich jest niemożliwe przy klasycznych rozkładach prawdopodobieństwa (o ile inne postulaty, jak niezależność pomiarów lub brak komunikacji pomiędzy danymi obserwatorami, są spełnione). Formalnie rzecz biorąc, do wykazania łamania tych nierówności potrzeba odwołać się do korelacji czwartego rzędu – wynika to z przyjętych dla nich ograniczeń na wyniki pomiaru (tylko ± 1 są możliwe). W przypadku pomiaru ciągłego, jak napisano, tego ograniczenia na wyniki pomiarów nie ma. Zatem łamanie nierówności (22) przez pomiary słabe lub ciągle nie jest co prawda efektem kwantowym w węższym znaczeniu, ale istnieje możliwy związek z tą klasą zjawisk.

1.6 Postać Hamiltonianu

Cała analiza oparta będzie na hamiltonianie postaci:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{V}, \\ \hat{H}_0 &= \int dk \, k |k\rangle \langle k|, \quad \hat{V} = \int dk \, (V(k) |\Omega\rangle \langle k| + V^*(k) |k\rangle \langle \Omega|).\end{aligned}\tag{29}$$

Człon $\hat{H}_0$ i $\hat{V}$ będą nazywane dalej, odpowiednio, Hamiltonianem swobodnym rezerwuaru, i członem oddziaływania układu z rezerwuarem. Nazwy te zostaną za moment wyjaśnione. Jest to Hamiltonian działający w przestrzeni Hilberta rozpiętej przez stan $|\Omega\rangle$ i ciągle kontinuum

stanów k . Stanem początkowym we wszystkich rozważaniach będzie $|\Omega\rangle$. W Hamiltonianie pominięta jest energia tego stanu. Ta jednak może być uwzględniona w funkcji $V(k)$, przez przesunięcie o wartość energii całej funkcji. Nie jest to zatem ograniczenie modelu ani przybliżenie.

W dalszym ciągu pracy będę też stosować reprezentację położeniową:

$$\hat{H}|\psi\rangle = \int (-i\hbar\partial\psi(x)/\partial x)|x\rangle + \int dx\bar{V}(x)\psi_0|x\rangle + \int \bar{V}^*(x)\psi(x)dx|\Omega\rangle, \quad (30)$$

dla stanu $|\psi\rangle = \psi_0|\Omega\rangle + \psi(x)|x\rangle$. Zastosowanie transformaty Fouriera (TF) by uzyskać takie postacie funkcji może być formalnie niemożliwe ze względu na brak unormowania rozwiązań w nieskończoności. Będę zakładał, że rozwiązania da się zawsze unormować, wprowadzając np. zanik ze znikającym wykładnikiem $\epsilon \rightarrow 0^+$.

1.6.1 Ograniczenia modelu

Hamiltonian (29), zbliżony jest do tzw. modelu Friedrichs'a [56]. Stosując odpowiednią transformację, można rezerwuar w wielu przypadkach sprowadzić do takiej postaci [22]. Także, zależność stanów rezerwuaru definiujących $\hat{V}$ od pojedynczego, jednowymiarowego parametru k można wyprowadzić dla szeregu układów dwupoziomowych oddziałujących z polem elektromagnetycznym, wykorzystując przy tym kwantową teorię pola [57]. Tym niemniej należy zwrócić uwagę na szereg stosowanych tu przybliżeń.

Fizyczny układ może być opisany przez stan z przestrzeni Hilberta $\hat{H}_s \otimes \hat{H}_r$, gdzie s odnosi do przestrzeni Hilberta dwupoziomowego układu rozpiętego przez stan wzbudzony $|\Omega\rangle_s$ i podstawowy $|0\rangle_s$; z kolei r odnosi do rezerwuaru, z którym układ jest sprzężony. Może on opisywać pole elektromagnetyczne, czy np. stopnie swobody cząstki, która opuszczając stan $|\Omega\rangle$ uciekła ze studni potencjału. W rezerwuarze pojedyncze wzbudzenie to $|k\rangle_r$, a stan podstawowy bez wzbudzeń to $|0\rangle_r$. Tę przestrzeń Hilberta można obciąć do przestrzeni rozpiętej przez $|\Omega\rangle_s \otimes |0\rangle_r$ oraz kontinuum $|0\rangle_s \otimes |k\rangle_r$, o ile cały układ kwantowy zaczyna w tej podprzestrzeni, a ewolucja zadana Hamiltonianem z niej nie wyprowadza, tak jak to zachodzi dla (29). Przy obcięciu wprowadzonym powyżej przyjęte jest zatem założenie, że układ dwupoziomowy jest przygotowany w stanie $|\Omega\rangle_s$, a rezerwuar jest w stanie podstawowym $|0\rangle_r$. O ile układ dwupoziomowy będący na początku w superpozycji nie zmienia właściwie istoty przewidywań, to np. przyjęcie rezerwuaru w jakiejś temperaturze $T > 0$ wymaga użycia całej przestrzeni Hilberta $\hat{H}_s \otimes \hat{H}_r$.

Odwołanie się do kwantowej teorii pola (np. gdy rezerwuar jest polem elektromagnetycznym) wskazuje, że w użyciu jest także tzw. przybliżenie rotującej fali (RWA, od ang. *rotating wave approximation*): w pełnym operatorze pola pomijane są człony, które nie zachowują liczby wzbudzeń. Argumentem za tym przybliżeniem jest to, że w obrazie oddziaływania te człony są mnożone przez wyrażenia silnie oscylujące z czasem, tak że skutek uśredniania po oscylacji są one istotnie znacznie mniejsze od innych wyrażań. Analiza ZE/AZE dla pomiarów rzutowych, bez RWA i dla dyskutowanego Hamiltonianu i lorentzowskiej postaci $V(k)$ została przeprowadzona [31] – w takim przypadku pomiar rzutowy nie powoduje powrotu stanu rezerwuaru do swego stanu początkowego i rezerwuar pełni rolę 'pamięci' dotychczasowej ewolucji. Takiej pamięci spodziewam się i w tutaj rozważanych przypadkach, gdyż omawiana będzie wartość oczekiwana operatora $\hat{O} = |\Omega\rangle\langle\Omega|$ bez jakiegokolwiek ograniczenia na wynik pomiaru w trakcie eksperymentu.

Oprócz tych ograniczeń, wykorzystywany często przykład lorentzowskiego czynnika $|V(k)|^2$ nie ma dolnego ograniczenia w widmie energii. Stosowane jest zatem przybliżenie, że ze względu na zanikający charakter czynnika spektrum energii można rozszerzyć na całą oś rzeczywistą. Tym samym wspomniane wyżej zachowanie niewykładnicze dla bardzo długich czasów nie jest w ogóle dyskutowane. Oprócz tego, przy tym przybliżeniu nie da się uogólnić

rozważań do przypadku rezerwuaru będącego w stanie termicznym, ze względu na brak stanu podstawowego o najniższej energii.

1.6.2 Wartości funkcyjne zmiennych

Przy Hamiltonianie (29) zachodzi, zgodnie z (3) i FGR:

$$\tau_z^{-2} = \frac{1}{\hbar^2} \int dk |V(k)|^2 \equiv \frac{\gamma}{\hbar^2}, \quad R_{fgr} = 2\pi |V(0)|^2. \quad (31)$$

Na bazie nierówności (4) oczekuję

$$\frac{\sqrt{\gamma}}{\hbar} \gg 2\pi |V(0)|^2, \quad (32)$$

czyli, można powiedzieć, by czynnik $|V(k)|^2$ był bardziej szeroki niż wysoki. Przy tym warunku zachodzi także wzór (10), czyli

$$q(t) = t^2 \int dk |V(k)|^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{kt}{2} \right). \quad (33)$$

W przypadku niespełniania warunku (32) przestaje obowiązywać FGR, o czym będzie mowa w rozdziale (A). Niech czynnik $|V(k)|^2$ podlega faktoryzacji $|V(k)|^2 = \gamma \cdot g(k)$, gdzie $g(k)$ jest dodatnią funkcją znormalizowaną do jedynki. Jeśli $\sqrt{\gamma}$ można uznać za wielkość małą w porównaniu z innymi wielkościami, wtedy RHS nierówności (32) jest rzędu drugiej potęgi w małym parametrze (i, co więcej, jest na pewno ułamkiem tej wielkości), podczas gdy LHS jest rzędu pierwszej potęgi. Wtedy nierówność (32) jest bezpiecznie spełniona. Wreszcie, dla takiego Hamiltonianu FGR przyjmuje postać

$$\begin{aligned} R_{fgr} &= 2\pi |V(0)|^2, \\ Z_{fgr} &= 1 + 2\text{Re} \int dk \int dz |V(k)|^2 |z| e^{-ikz}. \end{aligned} \quad (34)$$

W dodatku A wyprowadzona jest też wersja FGR dla amplitudy prawdopodobieństwa stanu początkowego $\psi_0(t) = z_{fgr} e^{-i\omega_{fgr}t}$, gdzie

$$\begin{aligned} \omega_{fgr} &= \frac{1}{i\hbar} \int dx \int dy \theta(x-y) \bar{V}^*(x) \bar{V}(y), \\ z_{fgr} &= 1 + \frac{1}{\hbar} \int dx \int dy \theta(x-y) \bar{V}^*(x) \bar{V}(y) (x-y). \end{aligned} \quad (35)$$

Zachodzi $R_{fgr} = i\text{Im} \omega_{fgr}$ (co łatwo sprawdzić) oraz $Z_{fgr} \simeq |z_{fgr}|^2$.

1.6.3 Czynnik lorentzowski

Jako punkt odniesienia rozpatrywana będzie lorentzowska postać czynnika $|V(k)|^2$:

$$|V(k)|^2 = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{\Gamma}{(k - k_0)^2 + (\Gamma/2)^2}. \quad (36)$$

Jest on stosowany z powodzeniem np. dla przypadku elektronów w kropkach kwantowych mogących z nich tunelować [25, 26], ale także w rozważaniach ogólnych [22, 31]. Dla tego

przypadku zachodzi

$$R_{fgr} = \frac{1}{\tau_d} = \frac{\gamma\Gamma}{k_0^2 + (\Gamma/2)^2}, \quad \tau_j = \frac{\hbar^2\Gamma}{k_0^2 + (\Gamma/2)^2}, \quad (37)$$

zaś dla tzw. przypadku symetrycznego:

$$R_{fgr} = \frac{4\gamma}{\Gamma}, \quad \tau_j = \frac{4\hbar^2}{\Gamma}. \quad (38)$$

Przypadek obliczenia amplitudy prawdopodobieństwa stanu $|\Omega\rangle$ dla $|V(k)|^2$ będącego sumą Lorentzianów bądź ich potęg można sprowadzić do obliczeń dla przypadku o skończonej liczbie poziomów energetycznych poza $|\Omega\rangle$ – tzw. pseudomodów – podlegających niehermitowskiej ewolucji [33]. Analiza pojedynczego Lorentzianu jest najprostszym zastosowaniem tej metody. Tutaj pozwoli ona uzyskać ścisłe wyniki.

1.7 Szczegółowe cele, przegląd wyników, struktura pracy

W świetle powyższego przeglądu cele szczegółowe niniejszej analizy dzielą się na dwie grupy. Pierwsza grupa dotyczy nowych kryteriów ZE/AZE w odniesieniu do oryginalnego schematu pomiarów rzutowych:

1. Porównanie kryterium ZE/AZE dla wartości oczekiwanej opartego na wielkości $\langle o(t) \rangle_{p\nu} - p(t)$ z kryteriami standardowymi opartymi na (11). Okazuje się, że przy stosunkowo płaskim czynniku $|V(k)|^2$ wprowadzona jest poprawka:

$$\langle o(t) \rangle = P(t) \cosh(rt) = e^{-Rt} \cosh(rt), \quad (39)$$

przy czym czynnik r jest mniejszy od R . Zatem dla bardzo długich czasów obserwuje się zmodyfikowany zanik z wykładnikiem $R - r$; dla mniejszych czasów jest pewne odejście od czystego zaniku wykładniczego. Punkt ten jest omówiony w rozdziale 2.

2. Zbadanie na tej samej zasadzie kryterium opartego o wartość słabą operatora $\hat{O}$. W stosowanym reżimie kryteria na bazie wartości słabej są dokładnie takie same, jak dla odpowiednich wielkości w pomiarze rzutowym, co pokazuję w rozdziale 3. Na przykład, w granicy nieskończonych czasów wartość słaba przyjmuje postać:

$$\text{w.v.}(t_1, t_2) = \text{Re } z_{fgr} - 1, \text{ gdzie } Z_{fgr} = |z_{fgr}|^2, \quad (40)$$

co też dla małych γ pozwala sformułować kryteria na AZE tak samo dobrze, jak kwadrat modułu po prawej.

Z kolei powyższa prezentacja pomiarów ciągłych sugeruje następujące analogi powyższych, tj. kryteria oparte na:

3. wartości oczekiwanej

$$\langle o(t) \rangle_{w\lambda}. \quad (41)$$

Należy ją porównać z $\langle o(t) \rangle_{w0} = p(t)$. Kryterium to uwiarygodniłaby zasadność kryterium z pkt. 1. Przy małym γ lecz dla długich czasów uzyskuje się znany z innych modeli [22] wynik, uzupełniony o czynnik Z_λ :

$$\begin{aligned} \langle o(t) \rangle_{w\lambda} &= Z_\lambda e^{-R_{fgr,\lambda} t}, & R_{fgr,\lambda} &= -\frac{2}{\hbar} \int dq \frac{\lambda |V(q)|^2}{q^2 + \lambda^2}, \\ Z_\lambda &= 1 - \frac{2}{\hbar} \int dq |V(q)|^2 \partial_q \frac{\lambda}{q^2 + \lambda^2}. \end{aligned} \quad (42)$$

Z kolei dla krótkich czasów zachodzi:

$$\langle o(t) \rangle_q = 1 + 2\text{Re} \frac{1}{\hbar^2} \int dk |V(k)|^2 \left(\frac{it}{k + i\lambda} + \frac{e^{-ikt + \lambda t} - 1}{(k + i\lambda)^2} \right). \quad (43)$$

Oba rezultaty można uzupełnić o poprawki wyższych rzędów. Schemat do dalszych kroków jest też zarysowany.

4. wielkości przypominająca wartość słabą:

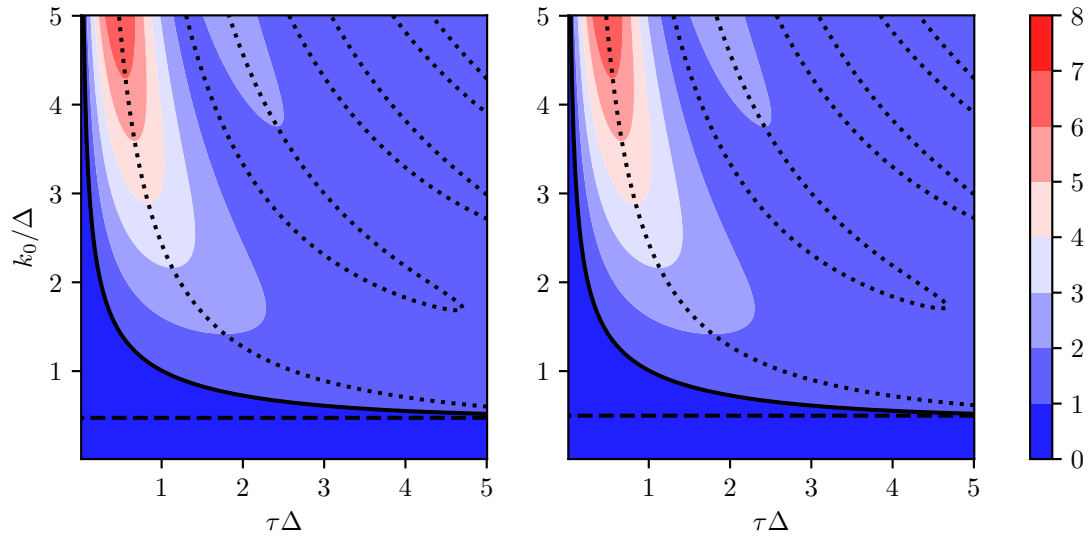
$$\frac{\langle o(t_1)o(t_2) \rangle_{w\lambda}}{\langle o(t_2) \rangle_{w\lambda}}. \quad (44)$$

Zastosowanie tego wzoru do kryterium ZE / AZE nie jest oczywiste, jako że przypadek $\lambda = 0$ (wartości słabe) w reżimie obowiązywania FGR odtwarza kryterium dla pomiarów rzutowych oparte na h_0 z (11), czyli dla $\lambda \rightarrow \infty$. Różnica tu jednak polega na tym, że w przeciwieństwie do h_0 i do wartości słabych, tu układ podlega pomiarowi cały czas, nie tylko w chwilach t_1 i t_2 . Z tej perspektywy powyższą wielkość należy porównać po prostu z wartością słabą, tu traktowaną po prostu jako przypadek pewnej wielkości dla $\lambda = 0$, nie potencjalne kryterium. W ogólnym przypadku, postać tej korelacji dla małych γ jest podobna co w równaniu (40). Brak jednak tutaj ogólnej analizy dla krótkich czasów.

Powyższe wyrażenia uzyskane są w rozdziale 4.

W przestrzeni możliwych parametrów układu i pomiaru można wykreślić obszary, w których mają miejsce ZE, AZE czy inne efekty. Przykład takiego „wykresu fazowego” jest na rys. 2. Tego typu wykresy i identyfikacja „przebiegów fazowych” będą istotnym narzędziem przy dyskusji rozwiązań. Będę używać określenia „faza”, „przejścia fazowe” i tp. wzorem [22] na pewne rezultaty ze względu na podobieństwa do tych pojęć w fizyce statystycznej, lecz nie jest to ścisły użytek i do takiego nie pretenduje. Wykresy (i związane z nimi obserwacje) dla ścisłych rozwiązań dla przypadku Lorentzowskiego uzupełniają analizy w wyżej wyliczonych rozdziałach. Obliczenia ścisłe i dalsza dyskusja dla tego przypadku zawarta jest w rozdziale 5.

Pracę zamyka podsumowanie 6, w którym także wskazane są możliwe kierunki dalszych badań w zarysowanym temacie. Z dodatków do nn. rozprawy wypada wymienić trzy pierwsze. Dodatek A poświęcony jest wyprowadzeniu reguły Fermiego w oparciu o identyfikację rezonansu w amplitudzie prawdopodobieństwa w reprezentacji energetycznej. Dodatek B omawia elementy współczesnej teorii pomiaru na przykładzie. Dodatek C zawiera powtórzenie wyników [24], lecz przy założeniu niehermitowskiej ewolucji badanego układu. To założenie poczynione jest na potrzeby rozdziału 5 i nie zmienia metod ani istoty wywodu. Pozostałe dodatki zawierają szczegółowe uzupełnienia rachunkowe do konkretnych rozdziałów.



RYSUNEK 2: Odtworzony wykres z [22]. Kolorem zaznaczono wartość R/R_{FGR} . Po lewej $\Gamma = 10\sqrt{\gamma}$, po prawej $\Gamma = 40\sqrt{\gamma}$. Linia ciągła oddziela ZE na dole od AZE powyżej. Linia kreskowana to warunek $Z = 1$. Linie kropkowane to lokalne maxima AZE.

Rozdział 2

Pomiar rzutowy

Spis treści

2.1	Standardowe kryteria ZE / AZE	19
2.2	Wartość oczekiwana rzutu	20
2.2.1	Przybliżenia prawdopodobieństw powrotów	22
2.2.2	Porównanie kryteriów	24

Rozważania zacznę od obliczeń dla kryteriów standardowych ZE / AZE. Dalej przeprowadzę obliczenia wartości oczekiwanej operatora $\hat{O}$. Ogólna postać wartości oczekiwanej jest także dobrym przybliżeniem w przypadku ogólnym, co argumentuję dalej. Rozdział zamyka analiza kryterium ZE / AZE dla wartości oczekiwanej.

2.1 Standardowe kryteria ZE / AZE

Prawdopodobieństwo szeregu wyników pozytywnych wynosi $P(t) = \exp(-Rt)$, gdzie $R = q(\tau)/\tau$, $q(\tau)$ jest prawdopodobieństwem opuszczenia stanu początkowego po czasie τ , τ zaś jest odstępem pomiędzy pomiarami rzutowymi. Uzyskać ten wynik można, stosując przybliżenie:

$$(1-x)^N = \left(1 - \frac{xt}{\tau N}\right)^N \simeq e^{-\frac{x}{\tau}t}. \quad (1)$$

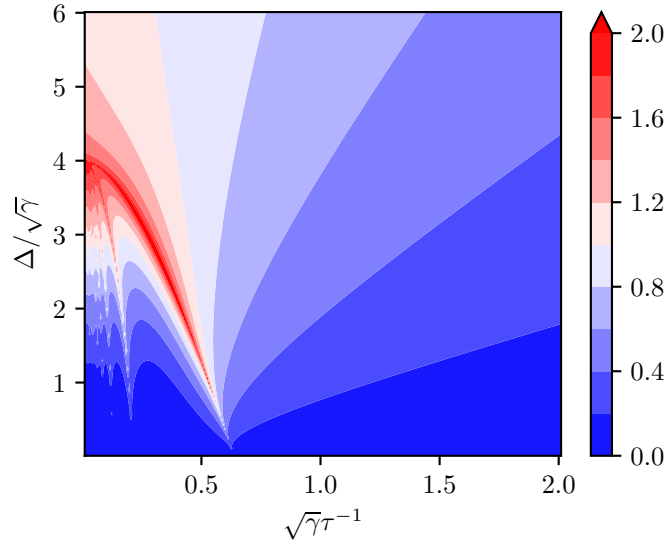
W najniższym nieznikającym rzędzie można wykorzystać wzór (1.33):

$$q(t) = t^2 \int dk |V(k)|^2 \text{sinc}^2\left(\frac{kt}{2}\right), \quad (2)$$

gdzie $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Wzór ten zostanie za moment wyprowadzony.

Gwoli przypomnienia, wyrażenie (1.11) może posłużyć do dyskusji ZE / AZE w porównaniu z zachowaniem $p(t)$ dla krótkich i dla długich czasów. W pierwszym przypadku, odwołując się do (1.11), można badać wielkość:

$$\begin{aligned} h(\tau, 2\tau)/\tau^2 &= [1 - q(\tau)]^2/\tau^2 - [1 - q(2\tau)]/\tau^2 \simeq p(2\tau)/\tau^2 - 2p(\tau)/\tau^2 \\ &= \int dk |V(k)|^2 \left[4\text{sinc}^2(k\tau) - 2\text{sinc}^2\left(\frac{k\tau}{2}\right) \right] \\ &= 2 \int dk |V(k)|^2 \text{sinc}^2\left(\frac{k\tau}{2}\right) \cos(k\tau). \end{aligned} \quad (3)$$



RYSUNEK 3: Stosunek $-\log P(\tau)/\tau$ do R_{fgr} , dla czynnika Lorentzowskiego, przy $\gamma = 0.01\Delta^2$. Odcienie niebieskiego (odp. czerwonego) odpowiadają wartościom mniejszym (odp. większym) od 1, czyli ZE (odp. AZE). Obszar w prawym dolnym rogu wykresu odpowiada oscylacjom Raabego mierzonym rzadko, tzn. czas pomiaru jest dłuższy od okresu oscylacji. Dla wyższych wartości częstotliwości i szerokości Δ linie stałej wartości owego stosunku rozchodzą się jakby radialnie.

Wyrażenie to dla $\tau = 0$ przyjmuje swą najwyższą wartość $2 \int dk |V(k)|^2$. Z kolei dla długich czasów, z pomocą FGR (1.34) można zbadać:

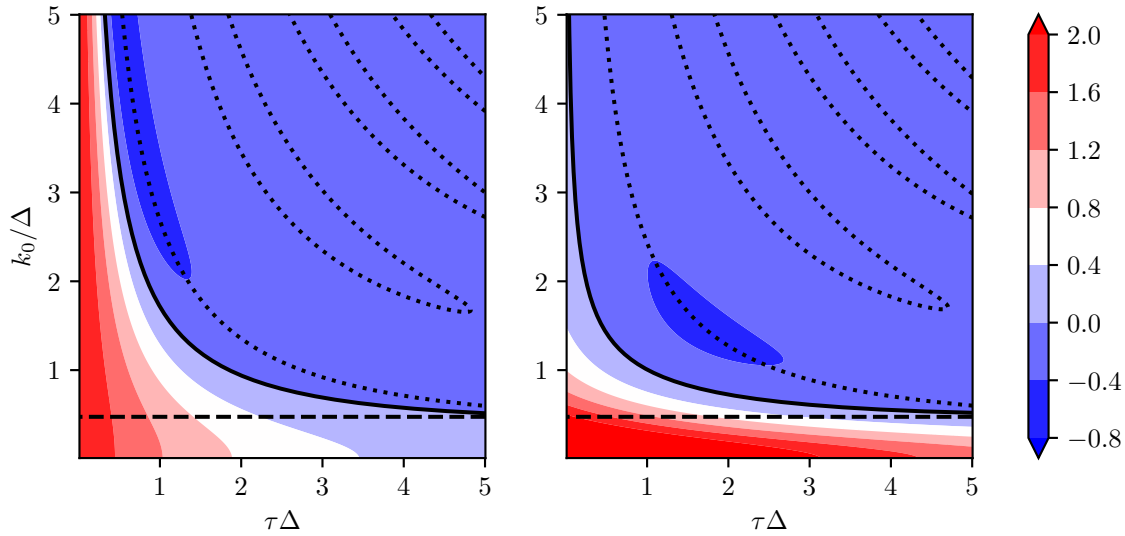
$$\frac{1}{\tau} \log \left(\frac{p(t)p(\tau)}{p(t+\tau)} \right) \simeq R_{FGR} - \frac{p(\tau)}{\tau}. \quad (4)$$

Na rys. 3 przedstawiono zależność wykładnika zaniku prawdopodobieństwa od częstości $1/\tau$ dla lorentzowskiego czynnika (1.36) w przypadku symetrycznym $k_0 = 0$ przy różnej jego szerokości Δ . Zakres małych Δ i $1/\tau$ odpowiada sytuacji, gdy tłumione oscylacje Raabego są sondowane przez pomiar co czas dłuższy niż okres oscylacji. Powoduje to chaotyczne (w znaczeniu chaosu deterministycznego [58]) zachowanie prawdopodobieństwa, tj. duże zmiany wyniku (prawdopodobieństwo) przy małej zmianie parametru (częstość). Dla szerszych czynników i wciąż niskich częstości obserwuje się AZE (który dla naprawdę małych częstości powinien być nieodróżnialny od FGR). Zakres częstości, przy których obserwuje się AZE, zmniejsza się wraz ze wzrostem Δ ('spłaszczaniem' czynnika $|V(k)|^2$).

Z kolei na rys. 4 kryteria (3) i (4) są zilustrowane na przykładzie tego samego czynnika dla $k_0 \neq 0$.

2.2 Wartość oczekiwana rzutu

Niech q_n będzie prawdopodobieństwem uzyskania wyniku negatywnego w n -tym pomiarze, zaś $p_n = 1 - q_n$ prawdopodobieństwem powrotu, tj. uzyskania wyniku pozytywnego w n -tym pomiarze po wyniku negatywnym (w tym p_0 jako prawdopodobieństwo pozostania w stanie początkowym). W przeciwieństwie do wyniku pozytywnego, uzyskiwane pod rząd wyniki negatywne nie wiążą się ze zresetowaniem układu do konkretnego jednego stanu. Natomiast na bazie tego, jak długa seria negatywnych wyników nastąpiła do danej chwili można jednoznacznie określić aktualną funkcję falową. Tym samym poszczególne stany inne niż $|\Omega\rangle$



RYSUNEK 4: Wzięte dla lorentzowskiego czynnika ściśle wartości $h(\tau, 2\tau)/\tau$ po lewej oraz $\frac{1}{\tau} \log \left(\frac{p(t)p(\tau)}{p(t+\tau)} \right)$ po prawej (gdzie funkcja $h(t_1, t_2)$ dana jest wzorem (1.11)) podzielone przez γ . Oba wykresy w tej samej skali; $\Delta = 10\sqrt{\gamma}$, choć wykresy są w dużej mierze niewrażliwe na zmiany Δ tak długo, jak $\sqrt{\gamma}$ może być uznane za małe. Ciągła linia oddziela przypadek ZE poniżej tej linii od AZE powyżej. Kropkowanymi liniami zaznaczono zerowanie się pochodnej po τ – kropkowana linia najbliższa ciągłej linii odpowiada maksimum AZE. Linia przerywaną zaznaczono $Z_{fgr} = 1$.

zindeksować można długością poprzedzającą je serii negatywnych wyników. Z kolei indeks 0 można przypisać stanowi przygotowanemu, czy też odzyskanemu wskutek pomiaru z pozytywnym wynikiem. W takim ujęciu eksperyment z powtarzanymi pomiarami można rozumieć jako proces Markowa, jako że stan po ostatnim pomiarze zależy wyłącznie od stanu po poprzednim. Dla procesu Markowa można zdefiniować jednostkowy wektor stanu, którego poszczególne składowe to prawdopodobieństwa przebywania w którymś ze stanów, oraz macierz transferu o jeden krok czasowy (tu: o jeden pomiar). Przyjmuję, że kolejne składowe wektora odpowiadają stanom o rosnącym indeksie opisanym wyżej. Dla tej konwencji macierz transferu to

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \\ q_0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & q_1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & q_2 & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Wielkość, którą należy zbadać, to

$$\langle A \rangle = X^T \mathcal{P}^N X, \quad (6)$$

gdzie $X^T = (1, 0, 0, 0, \dots)$ odpowiada przygotowanemu stanowi przed wykonaniem pomiarów. Problem można znacznie uprościć, jeśli poszczególne wyrazy ze wspomnianego ciągu można zapisać (przynajmniej w przybliżeniu) jako:

$$\begin{aligned} q_0 \ q_1 \ p_2 &= w \ q_0 \ p_1, \\ q_0 \ q_1 \ q_2 \ p_3 &= w^2 \ q_0 \ p_1, \\ q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ p_4 &= w^3 \ q_0 \ p_1 \text{ i td.} \end{aligned} \quad (7)$$

Fizycznie czynnik w jest pewnego rodzaju miarą podobieństwa stanów rezerwuaru przed i po negatywnym wyniku. W dodatku D.1 pokazano, że wzór (6) przy obowiązywaniu (7) da ten sam wynik, jeśli zastąpić $\mathcal{P}$ macierzą 2×2 :

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & w \end{pmatrix} \quad (8)$$

a wektor X – wektorem $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Macierz P nie jest macierzą transferu i nie pozwala uzyskać prawdopodobieństwa przebywania układu w innym stanie niż pierwotny. To jednak wystarczy do obliczenia wartości oczekiwanej:

$$\langle \hat{O}(t) \rangle = \frac{\lambda_+^{N+1} - \lambda_-^{N+1} - w(\lambda_+^N - \lambda_-^N)}{\sqrt{\Delta}}, \quad (9)$$

gdzie $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(p_0 + w \pm \sqrt{\Delta})$, zaś $\Delta = (p_0 - w)^2 + 4q_0p_1 > 0$. Wynik ten wyprowadzony jest w dodatku D.2. Dla czynnika postaci Lorentzowskiej (1.36), równania (7) obowiązują ściśle, przy czym $w = p_0$, co upraszcza wyrażenia do postaci:

$$\langle \hat{O}(t) \rangle = \frac{\lambda_+^N + \lambda_-^N}{2} = \frac{(p_0 + \sqrt{q_0p_1})^N + (p_0 - \sqrt{q_0p_1})^N}{2} \quad (10)$$

Niżej twierdzę, że wzór powyższy jest też dobrym przybliżeniem w przypadku ogólnym, o ile czynnik $|v(k)|^2$ traktować można raczej jako płaskie wyrażenie. Dalej przeprowadzę w oparciu o te wzory analityczne porównanie kryteriów na ZE i AZE.

2.2.1 Przybliżenia prawdopodobieństw powrotów

Oznaczam

$$\hat{U} = e^{-i\hat{H}\tau/\hbar}. \quad (11)$$

Do wyznaczenia q_0 , potrzeba wpierw znaleźć amplitudę prawdopodobieństwa:

$$\beta(\tau, k) \equiv \langle k | \hat{U} | \Omega \rangle. \quad (12)$$

Dla krótkich τ wystarczą dwa najniższe nieznikające wyrazy z rozwinięcia:

$$e^{-i\hat{H}t/\hbar} = e^{-iH_0t} \left(1 - i \int_0^t dt' \hat{V}(t') + (-i)^2 \int_0^t dt' \hat{V}(t') \int_0^{t'} dt'' \hat{V}(t'') + \dots \right), \quad (13)$$

$$\hat{V}(t) = e^{iH_0t} \hat{V} e^{-iH_0t} = \int dk V(k) |e\rangle \langle k| e^{-ikt} + \text{H.c.},$$

co prowadzi do wzoru (2):

$$q_0 = \int dk |\beta(\tau, k)|^2 = \tau^2 \int dk |V(k)|^2 \text{sinc}^2\left(\frac{k\tau}{2}\right), \quad p_0 = 1 - q_0. \quad (14)$$

By wyznaczyć prawdopodobieństwo powrotu po pierwszym negatywnym wyniku, p_1 , potrzebny jest tym razem analog amplitudy prawdopodobieństwa $p_1 = |\alpha(2\tau)|^2$:

$$\alpha(2\tau) = \langle \Omega | \hat{U} \frac{\int dk |k\rangle \langle k|}{\sqrt{q_0}} \hat{U} | \Omega \rangle \quad (15)$$

Dla standardowego ZE, przybliżenia w niskich potęgach γ przeprowadzane są dla wielkości $\log P(t)$. W duchu tego przybliżenia każdy występujący powyżej operator ewolucji będę rozwijał osobno aż do potęgi $\sqrt{\gamma}^2$ (co oznacza w tym przypadku rozwinięcie do potęgi pierwszej $\sqrt{\gamma}$, gdyż w rozwinięciu pozostają tylko nieparzyste potęgi):

$$\begin{aligned}\sqrt{q_0} \cdot \alpha(2\tau) &= - \int d\vec{k} \langle \Omega | e^{-i\hat{H}_0\tau} \int_0^t dt' \hat{V}(t') | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | e^{-i\hat{H}_0\tau} \int_0^t dt'' \hat{V}(t'') | \Omega \rangle \\ &= \tau^2 \int dk |V(k)|^2 e^{-ik\tau} \text{sinc}^2\left(\frac{k\tau}{2}\right).\end{aligned}\quad (16)$$

Stąd

$$q_0 p_1 = \tau^4 \left| \int dk |V(k)|^2 e^{-ik\tau} \text{sinc}^2\left(\frac{k\tau}{2}\right) \right|^2. \quad (17)$$

Analogicznie, by wyznaczyć prawdopodobieństwo powrotu po dwóch pierwszych negatywnych wynikach, należy znaleźć:

$$\alpha(3\tau) = \langle \Omega | \hat{U} \frac{\int dk |k\rangle \langle k|}{\sqrt{q_1}} \hat{U} \frac{\int dq |q\rangle \langle q|}{\sqrt{q_0}} \hat{U} | \Omega \rangle. \quad (18)$$

Stosując to samo rozwinięcie, z operatorów ewolucji po lewej i prawej stronie zostaje tylko jeden wyraz, natomiast ze środkowego – dwa: 1 oraz wyraz kwadratowy. Wyraz 1 prowadzi tu do takiego samego wyrazu jak uzyskany wcześniej. Wprowadzam oznaczenie

$$\alpha'(3\tau) = \langle \Omega | \hat{U} \frac{\int dk |k\rangle \langle k|}{\sqrt{q_1}} (\hat{U} - 1) \frac{\int dq |q\rangle \langle q|}{\sqrt{q_0}} \hat{U} | \Omega \rangle. \quad (19)$$

Przy czym, jak łatwo zauważyć, $\alpha(3\tau) = \alpha(2\tau) + \alpha'(3\tau)$. Szczegółowe rachunki przeprowadzone w dodatku D.3 prowadzą do:

$$\begin{aligned}\sqrt{q_0 q_1} \alpha'(3\tau) &= \sqrt{q_0} \alpha(2\tau) \int dk |V(k)|^2 \frac{e^{-ik\tau} - 1}{k^2}, \\ &+ \int dk |V(k)|^2 \frac{e^{-ik\tau} - 1}{k^2} \int dq |V(q)|^2 \frac{e^{iq\tau} - 1}{q} e^{-2iq\tau} \frac{1 - e^{-i(k-q)\tau}}{k - q}.\end{aligned}\quad (20)$$

W dodatku D.4 argumentuję, że przy szerokim czynniku $|V(k)|^2$ ostatnia linia jest zanedbywalnie mała – w szczególności, znika dla płaskiego $|V(k)|^2$. Stąd pomijam całe to wyrażenie. Skoro zaś $\alpha(3\tau) = \alpha(2\tau) + \alpha'(3\tau)$, to w najniższym rzędzie przybliżenia:

$$\begin{aligned}q_0 q_1 p_2 &= q_0 p_1 \left(1 + 2\text{Re} \int dk |V(k)|^2 \frac{e^{-ik\tau} - 1}{k^2} \right) \\ &= q_0 p_1 \left(1 - \tau^2 \int dk |V(k)|^2 \text{sinc}^2\left(\frac{k\tau}{2}\right) \right) \\ &= q_0 p_1 p_0,\end{aligned}\quad (21)$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z (14). Zatem w przybliżeniu $q_0 q_1 p_2 = w q_0 p_1$, przy czym $w = p_0$. W dodatku D.5 na końcu tego rozdziału pokazuję, że pozostałe zależności (7) także są w przybliżeniu spełnione dla tego w . W rozdziale 5 jest wykazana ścisłość tego wyrażenia dla czynnika lorentzowskiego bez stosowania przybliżenia słabych oddziaływań.

2.2.2 Porównanie kryteriów

W równaniu (10)

$$\langle o(t) \rangle = \frac{(1 - q_0 + \sqrt{q_0 p_1})^N + (1 - q_0 - \sqrt{q_0 p_1})^N}{2} \quad (22)$$

zarówno q_0 wyrażone w (14) jak i $q_0 p_1$ zadane przez (17) są przy małym γ wielkościami małymi w porównaniu z 1. Z racji, że $N = t/\tau$, można zastosować przybliżenie (1):

$$\begin{aligned} \langle \hat{O}(t) \rangle &= e^{-Rt} \cosh(rt), \quad R = \tau \int dk |V(k)|^2 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{k\tau}{2} \right), \\ r &= \tau \left| \int dk |V(k)|^2 e^{-ik\tau} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{k\tau}{2} \right) \right|. \end{aligned} \quad (23)$$

W porównaniu z $P(t) = e^{-Rt}$, ZE (AZE, jeśli możliwy) jest dla wartości oczekiwanej silniejszy (słabszy). Współczynnik r znika dla $\tau \rightarrow \infty$. W tej granicy funkcja $\operatorname{sinc}^2(x) \propto \delta(x)$, można więc wyciągnąć $|V(k)|^2$ spod całki i uzyskać:

$$r \simeq |V(0)|^2 \tau \left| \int dk e^{-ik\tau} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{k\tau}{2} \right) \right| = 0, \quad (24)$$

co łatwo sprawdzić, korzystając z informacji z dodatku A. Dla $\tau = 0$ także zachodzi $r = 0$.

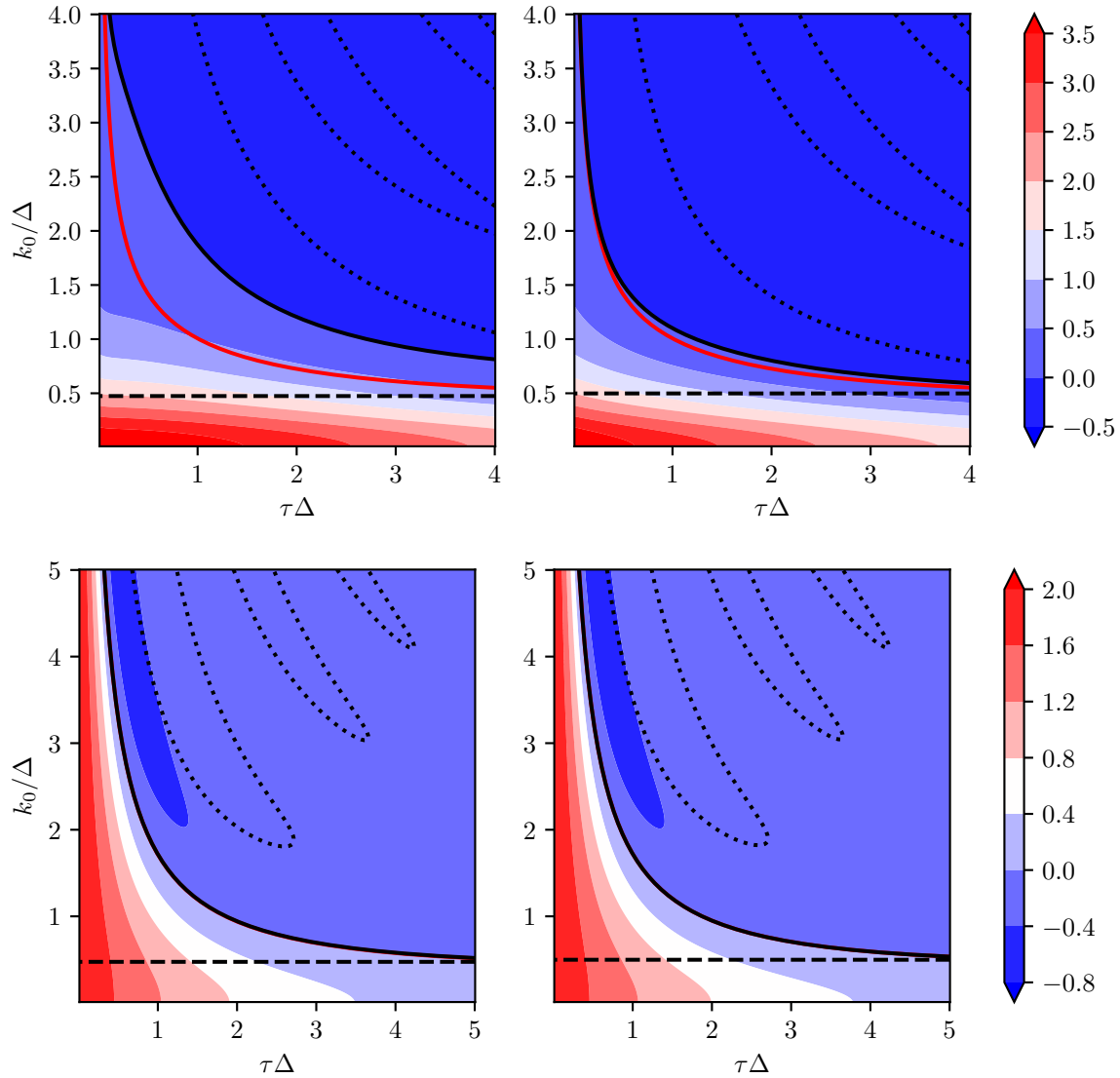
Ze wzoru (23) wynika, że wraz ze wzrostem t wartość oczekiwana coraz bardziej zbliża się do $\exp(-(R-r)t)$. Innymi słowy należy się spodziewać, że ZE dla wartości oczekiwanej będzie bardziej powszechny niż dla prawdopodobieństwa – co zresztą ilustrują górne wykresy na rys. 5. Dla mniejszych szerokości Δ linia przejścia fazowego ZE / AZE dla wartości oczekiwanej odbiega istotnie od linii obliczonej dla prawdopodobieństwa. Dla wartości τ rzędu t oba podejścia powinny dawać zbliżone kryteria, co ilustrują dolne wykresy na 5. W sytuacji pośredniej następuje odejście od kształtu zadanego przez eksponent, co widać wyraźnie przy porównaniu rys. 3 z 6.

Przybliżenie (23) jest błędne przy nie-małym γ , czyli w szczególności w przypadku tłumionych oscylacji Rabego. Lecz w tym reżimie może się też zdarzyć przypadek $1 - q_0 < \sqrt{q_0 p_1}$. Wtedy średnia $\langle o(t) \rangle$ zadana przez (10) może zmieniać się dramatycznie przy zmianie liczby pomiarów o 1. W celu jednak utemperowania zachowania, można uśrednić wartość oczekiwaną w czasie, po dwóch kolejnych pomiarach:

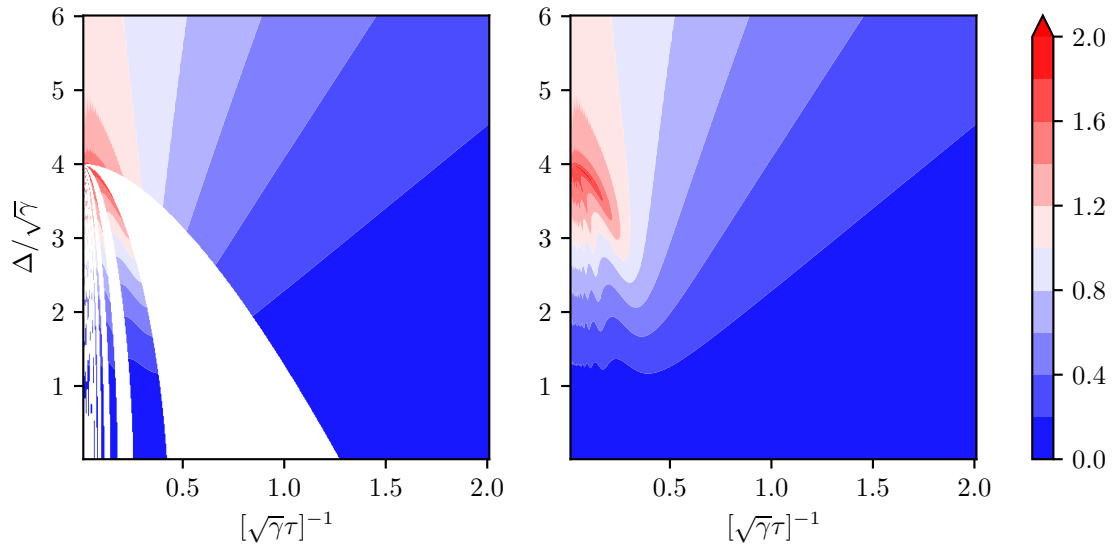
$$\langle o(t) \rangle \rightarrow \frac{\langle o(t) \rangle + \langle o(t + \tau) \rangle}{2} \quad (25)$$

lub też po większej liczbie pomiarów. Efekty tej procedury ilustruje rys. 6. Widać, że dla tłumionych oscylacji Rabego rzadkie pomiary wprowadzają jedynie niewielkie oscylacje wraz ze zmianą częstości do niezaburzonej wartości średniej. Oprócz tego warto zwrócić uwagę, że linie stałego wykładnika rozchodzą się pod mniejszymi kątami niż na rys. 3.

Porównanie rysunków: 5 z 4 oraz 6 z 3 pozwala stwierdzić, że ZE / AZE w obu przypadkach są jakościowo te same; mogą jednak różnić się w przewidywaniach ilościowych, tj. we wskazaniu przejścia fazowego między ZE i AZE, czy też maksimum AZE. Dla tłumionych oscylacji i rzadkich pomiarów nie można mówić ani o ZE i AZE. Tym niemniej warto zwrócić uwagę na odmienne zachowanie kluczowych wielkości. Wartość oczekiwana (uśredniona po dwóch kolejnych pomiarach) przejawia dużo bardziej utemperowane zachowanie i łagodniejsze przejście fazowe z obszaru tłumionych oscylacji do obszaru (zmodyfikowanego) zaniku wykładniczego.



RYSUNEK 5: Powyżej: wzięta dla czynnika Lorentzowskiego zależność $[R_{FGR} - \log(\langle o(t) \rangle_{p\nu})/t]/\gamma$ obliczona ściśle dla długiego czasu t , przy $\Delta = 10\sqrt{\gamma}$ po lewej i $\Delta = 40\sqrt{\gamma}$ po prawej. Czarna linia jest dla tego stosunku równego 1. Czerwoną ciągłą linią zaznaczono granicę między ZE a AZE dla prawdopodobieństwa, czarną ciągłą zaś – dla wartości oczekiwanej. Linia kreskowana to warunek $Z_{FGR} = 1$. Linie kropkowane to lokalne maxima AZE. Poniżej: ta sama analiza przeprowadzona dla wielkości $[\langle o(2\tau) \rangle - p(2\tau)]\tau^{-2}/\gamma$, przy czym czarna ciągła linia prawie całkiem przekrywa czerwoną.



RYSUNEK 6: Po lewej: ścisły stosunek $-\log O(t)/t$ do R_{fgr} , dla symetrycznego czynnika Lorentzowskiego, przy $\gamma = 0.01\Delta^2$, $t = 375\sqrt{\gamma}$. Obszary puste to te, dla których $1 - q_0 < \sqrt{q_0 p_1}$. Po prawej: ten sam wykres, w którym jednak zastąpiono $O(t)$ przez średnią $[O(t) + O(t + \tau)]/2$.

Rozdział 3

Wartości słabe i korelacje dla pomiarów słabych

Spis treści

3.1	Pomiar wartości słabych	27
3.2	Kryterium ZE / AZE	28
3.2.1	Krótkie czasy i słabe sprzężenie z rezerwuarem	29
3.2.2	Długie czasy i FGR	30

Wielkość

$$\text{w.v.}(t_1, t_2) = \frac{\langle o(t_1)o(t_2) \rangle_{w0}}{\langle o(t_2) \rangle_{w0}} \quad (1)$$

jest, ściśle rzecz biorąc, częścią rzeczywistą wartości słabej operatora $\hat{O}$ [46]. Części urojonej nie będę jednak szerzej dyskutować, choć jeśli jej wartość jest mała, to część rzeczywista może służyć do wykrywania ZE / AZE również wtedy, gdy oddziaływanie z rezerwuarem nie może być do końca uznane za małe.

W tym, co następuje, najpierw dyskutuję pokrótce pomiar wartości słabych, tj. uzasadniam zdanie, że wyrażenie (1) można uzyskać dokonując post-selekcji wyników pomiarów. Następnie odtwarzam kryterium ZE / AZE w oparciu o wartości słabe dla słabego oddziaływania z rezerwuarem tudzież krótkich czasów, by potem przejść do czasów długich (przy obowiązywaniu FGR).

3.1 Pomiar wartości słabych

Jak wynika z analizy równań (1.18) zastosowanych do korelacji operatora rzutowego $\hat{O}$ (różno-czasowych), ostatni pomiar słaby potrzebny do zmierzenia korelacji można zastąpić pomiarem rzutowym. Widać to od razu z równań (1.20). W tych równaniach najbardziej zewnętrzny komutator, ze względu na cykliczność śladu, sprowadza się do wzięcia wartości oczekiwanej pozostałych wyrażań w ostatniej wyróżnionej chwili czasowej.

Nadto, pomiar słaby w chwili t_1 nie wpływa na wartość oczekiwaną w chwili t_2 pomiaru rzutowego czy, równoważnie, pomiaru słabego [51]. Otóż korelacje (1.26) obliczyć można z dystrybucji $P_q[a]$ będącej kwaziprawdopodobieństwem, tj. spełniającym wszystkie wymogi dla prawdopodobieństwa oprócz warunku dodatniości. W granicy $\lambda \rightarrow 0$ to kwaziprawdopodobieństwo ma jasno określoną granicę a wzory (1.26) przechodzą w (1.20). W szczególności, po scałkowaniu po wszystkich $a(t)$ poza wartościami w chwili t_1 i t_2 , z $P_q[a]$ w tej granicy pozostaje dystrybucja $Q(a_1, a_2)$, gdzie $a_j = a(t_j)$. Ta dystrybucja spełnia warunek nieinwaryjności w tym znaczeniu, że

$$\int da_1 Q(a_1, a_2) = Q(a_2), \quad \int da_2 Q(a_1, a_2) = Q(a_1), \quad (2)$$

gdzie $Q(a_j)$ jest dystrybucją pozwalającą obliczyć wartość oczekiwaną a_j . Innymi słowy, wartość średnia i korelacja opisywane są przez tę samą dystrybucję:

$$\begin{aligned}\langle a_1 a_2 \rangle_{w0} &= \int da_1 da_2 a_1 a_2 Q(a_1, a_2), \\ \langle a_2 \rangle_{w0} &= \int da_1 da_2 a_2 Q(a_1, a_2).\end{aligned}\tag{3}$$

Stąd też po zebraniu danych z dwóch pomiarów słabych da się uzyskać wartość oczekiwaną w drugim pomiarze niezaburzoną przez obecność pierwszego. Powyższe wzory można rozumieć jako przejście graniczne $\lambda \rightarrow 0$; dla niezerowego λ istnieje wszak rozkład prawdopodobieństwa. W rozważanym przypadku poszukuje się wartości oczekiwanych operatorów rzutowych $\hat{O}$. Pomiar rzutowy tego operatora daje wynik 1 jeśli układ jest w stanie $|\Omega\rangle$ i 0 w przypadku przeciwnym. Stąd znalezienie wartości oczekiwanej w tym kontekście jest równoważne post-selekcji wyników ze względu na stan końcowy układu.

3.2 Kryterium ZE / AZE

W dalszej części tej sekcji będzie badana użyteczność wartości słabej, a ściślej jej wartości rzeczywistej, do kryterium ZE / AZE dla krótkich czasów tudzież słabego sprzężenia z rezerwuarem, oraz dla czasów długich. Na wstępie zaznaczę tylko znaczenie części urojonej wartości słabej dla zagadnienia, co może być tematem osobnych badań.

Niech $f(t)$ będzie amplitudą prawdopodobieństwa stanu $|\Omega\rangle$:

$$f(t) = \langle \Omega | e^{-i\hat{H}t/\hbar} | \Omega \rangle.\tag{4}$$

Wielkość (1.11) użyteczną w kryterium ZE / AZE można przekształcić w:

$$\frac{p(t_1, t_2)}{p(t_2)} = \left| \frac{f(t_1)f(t_2 - t_1)}{f(t_2)} \right|^2.\tag{5}$$

Z drugiej strony, z pierwszego i drugiego ze wzorów (1.18) zastosowanych do korelacji $\hat{O}$ wynika natychmiast, że

$$\text{w.v.}(t_1, t_2) = \text{Re} \frac{f(t_1)f(t_2 - t_1)}{f(t_2)}.\tag{6}$$

Przypominam, że zgodnie z przyjętymi definicjami jest to część rzeczywista wartości słabej, podczas gdy część urojona zadana jest przez komutator, czyli w efekcie [46]:

$$\text{w.v.'}(t_1, t_2) = \text{Im} \frac{f(t_1)f(t_2 - t_1)}{f(t_2)}.\tag{7}$$

Stąd

$$\frac{p(t_1, t_2)}{p(t_2)} = \text{w.v.}^2(t_1, t_2) + \text{w.v.'}^2(t_1, t_2).\tag{8}$$

Punkt przejścia między ZE a AZE występuje dla powyższej wielkości równej 1. Jeśli część urojona jest zaniedbywalnie mała, to równie dobrze do tego kryterium wykorzystać można funkcję $\text{w.v.}(t_1, t_2)$.

3.2.1 Krótkie czasy i słabe sprzężenie z rezerwuarem

Jak można łatwo pokazać przez odwołanie się do wzorów z rozdziału 2, w przypadku krótkich czasów tudzież słabego sprzężenia z rezerwuarem zachodzi $f(t) = 1 + b(t)$, gdzie

$$b(t) = \frac{1}{\hbar^2} \int dk |\bar{V}(k)|^2 \left(\frac{it}{k} + \frac{e^{-ikt} - 1}{k^2} \right). \quad (9)$$

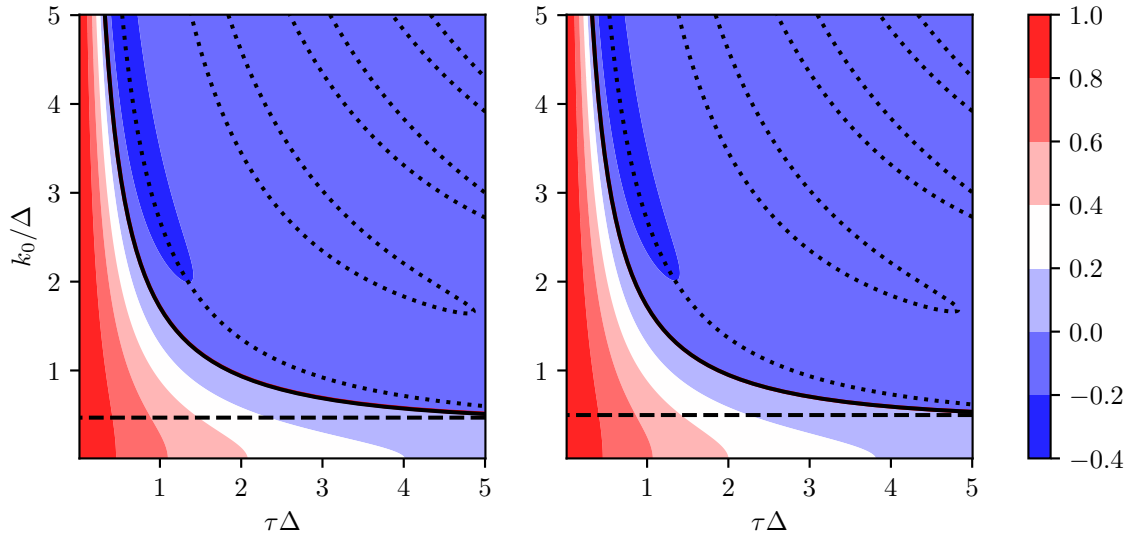
Stąd równanie (5) w najniższym nieznikającym rzędzie daje:

$$\frac{p(t_1, t_2)}{p(t_2)} \simeq |1 + b(t_1) + b(t_2 - t_1) - b(t_2)|^2 \simeq 1 + 2\text{Re} (b(t_1) + b(t_2 - t_1) - b(t_2)), \quad (10)$$

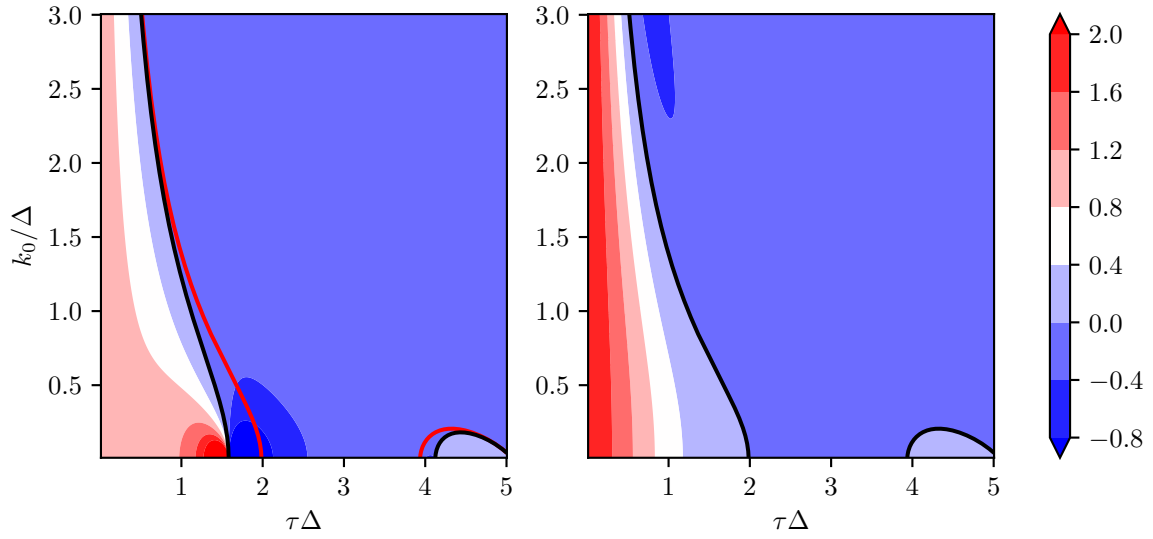
zaś z drugiej strony,

$$\text{w.v.}(t_1, t_2) = \text{Re} \frac{f(t_1)f(t_2 - t_1)}{f(t_2)} \simeq 1 + \text{Re} (b(t_1) + b(t_2 - t_1) - b(t_2)). \quad (11)$$

Wielkość $\text{w.v.}(t_1, t_2) - 1$ różni się w tym reżimie tylko o czynnik 2 od $p(t_1, t_2)/p(t_2) - 1$, odtwarza więc to samo kryterium. Na rysunku 7 przedstawiono ściśle zależność $\text{w.v.}(\tau, 2\tau) - 1$ od parametrów zawartych w $|V(k)|^2$ dla Lorentzianu. Porównanie z lewym wykresem na rys. ?? zgadza się z wnioskami z tej sekcji. Z kolei na rys. 8 porównano (??) i (11) dla Lorentzianu w przypadku, kiedy γ jest duża.



RYSUNEK 7: Wzięta dla czynnika Lorentzowskiego zależność $p = (\text{w.v.}(\tau, 2\tau) - 1)/\gamma\tau^2$ obliczona ściśle przy $\Gamma = 10\sqrt{\gamma}$ po lewej i $\Gamma = 40\sqrt{\gamma}$ po prawej. Czarna linia jest dla tej wielkości równej 0. Linia kreskowana to warunek $\text{Re } z = 1$, gdzie z to asymptotyczny czynnik w wykładniczej postaci amplitudy prawdopodobieństwa. Linie kropkowane znaczą zerowanie się pochodnej $dp/d\tau$.



RYSUNEK 8: Porównanie dla czynnika Lorentzowskiego wyrażenia (9) po lewej i (11) po prawej, podzielone przez τ , obliczone ściśle przy $\Gamma = 1.5\sqrt{\gamma}$. Czarna linia jest dla danej wielkości równej 0. Linia czerwona po lewej odtwarza czarną po prawej. Widać, że wyrażenia zachowują się różnie gdy τ zbiega do zera, oraz zachowanie rezonansowe dla wartości słabej przy czerwonej linii dla małego k_0 .

Po podstawieniu postaci $b(t)$ z (9) otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 2 \langle o(t_2) o(t_1) \rangle_{w0} &= 1 + \frac{1}{\hbar^2} \int dk \frac{|\bar{V}(k)|^2}{k^2} \left(e^{-ikt_1} + e^{-ik(t_2-t_1)} + e^{ikt_2} - 3 \right) + c.c. \quad (12) \\
 &= 2 - \frac{1}{\hbar^2} \int dk |\bar{V}(k)|^2 \left[t_1^2 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{kt_1}{2} \right) + t_2^2 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{kt_2}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + (t_2 - t_1)^2 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{k(t_2 - t_1)}{2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 \langle o(t_2) o(t_1) \rangle - \langle o(t_2) \rangle &= \frac{1}{2\hbar^2} \int dk |\bar{V}(k)|^2 \left[t_2^2 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{kt_2}{2} \right) - t_1^2 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{kt_1}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + (t_2 - t_1)^2 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{k(t_2 - t_1)}{2} \right) \right]. \quad (13)
 \end{aligned}$$

3.2.2 Długie czasy i FGR

Przyjmuję, że można stosować FGR, tj. dla długich t obowiązuje asymptotycznie $f(t) = z_{fgr} e^{-i\omega_{fgr} t}$, gdzie ω_{fgr} oraz z_{fgr} zadane są równaniami (1.35), zaś $R_{fgr} = -2\operatorname{Im} \omega_{fgr}$ oraz $Z_{fgr} = |z_{fgr}|^2$ – równaniami (1.34). Niech t_1 i t_2 będą długie, lecz ich różnica $t_2 - t_1$ – krótka. W takim przypadku

$$\frac{p(t_1, t_2)}{p(t_2)} \simeq \left| e^{-i\omega_{fgr}(t_1-t_2)} [1 + b(t_2 - t_1)] \right|^2 \simeq e^{R_{fgr}(t_2-t_1)} [1 + 2\operatorname{Re} b(t_2 - t_1)]. \quad (14)$$

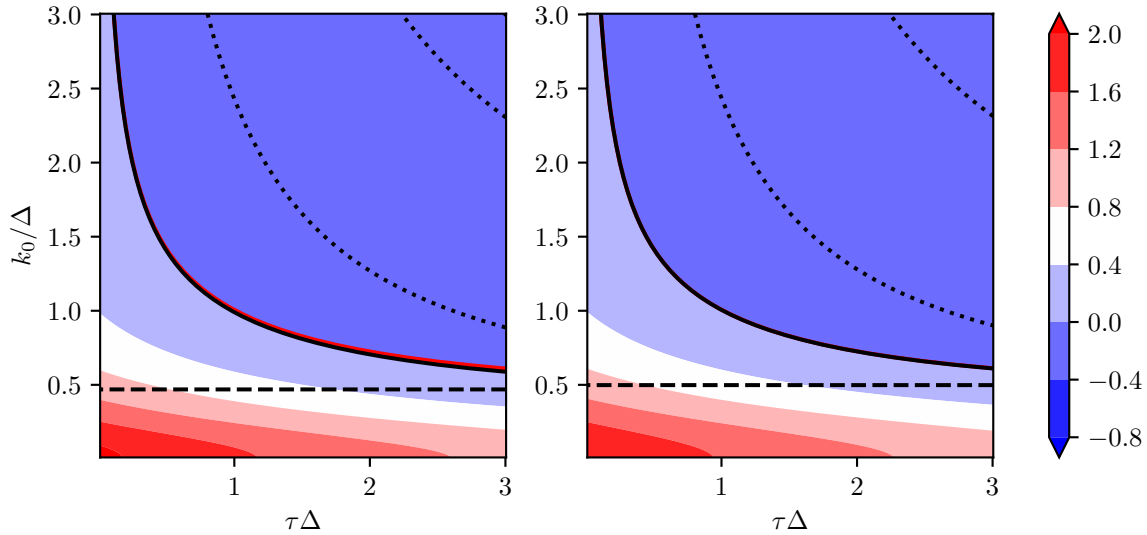
Logarytm tego wyrażenia podzielony przez $t_2 - t_1$ wynosi w przybliżeniu $R_{fgr} - R$, jak we wstępie. Z kolei:

$$\begin{aligned} \text{w.v.}(t_1, t_2) &\simeq \text{Re } e^{-i\omega_{fgr}(t_1-t_2)}[1 + b(t_2 - t_1)] \\ &= e^{R_{fgr}(t_2-t_1)/2} [\cos(\text{Re } \omega_{fgr}(t_2 - t_1))[1 + \text{Re } b(t_2 - t_1)] \\ &\quad - \sin(\text{Re } \omega_{fgr}(t_2 - t_1))\text{Im } b(t_2 - t_1)] \\ &\simeq e^{R_{fgr}(t_2-t_1)/2} [1 + \text{Re } b(t_2 - t_1)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Zatem i tutaj kryterium jest odtworzone:

$$\log[\text{w.v.}(t_1, t_2)]/(t_2 - t_1) = \frac{R_{FGR} - R}{2} = \log \left(\frac{p(t_1, t_2)}{p(t_2)} \right) / 2(t_2 - t_1), \quad (16)$$

co ilustruje rys. 9 bazujący na ścisłych rozwiązaniach dla czynnika Lorentzowskiego – można go porównać z prawym wykresem na rys. ???. Widać, że zgodność nie jest tak dobra jak w poprzedniej sekcji, jednak linia podziału ZE/AZE jest obliczona z dużą pewnością.



RYСУNEK 9: Wzięta dla czynnika Lorentzowskiego zależność $p = \text{w.v.}(t, t + \tau)/\gamma\tau$ dla dużego t obliczona ściśle przy $\Gamma = 10\sqrt{\gamma}$ po lewej i $\Gamma = 40\sqrt{\gamma}$ po prawej. Czarna linia ciągła jest dla tej wielkości równej 0. Czerwoną linią zaznaczono standardowe kryterium ZE / AZE – na wykresie po prawej ta linia jest niemal całkowicie przekryta przez ciągłą czarną linią. Linia kreskowana to warunek $\text{Re } z = 1$, gdzie z to asymptotyczny czynnik w wykładniczej postaci amplitudy prawdopodobieństwa. Linie kropkowane znaczą zerowanie się pochodnej $dp/d\tau$.

Także w przypadku długich $t_2 - t_1$ obowiązuje różnica między kryteriami o czynnik 2, z powodu postaci $z' = 1 + c$ z równania (1.35). Stąd też analog kryterium koniecznego do AZE (1.9):

$$\text{Re } z_{fgr} - 1 < 0 \quad (17)$$

dla słabego sprzężenia z rezerwuarem będzie miał taką samą postać co oryginał.

Rozdział 4

Pomiar ciągły

Spis treści

4.1	Konwencje dotyczące transformaty Laplace’a	33
4.2	Rozwiązanie zanikowe równania Lindblada	34
4.2.1	Funkcje pomocnicze	35
4.2.2	Granica braku pomiarów	36
4.3	Rachunek iteracyjny dla stanu Fermiego	36
4.3.1	Przybliżenia dla małego wykładnika	36
4.3.2	Punkt wyjścia	37
4.3.3	Modyfikacja FGR	38
4.4	Wartość oczekiwana	39
4.5	Korelacje	40
4.5.1	Równania Lindblada	40
4.5.2	Wyrażenia przy długich czasach	41

Rozdział ten podąża według schematu takiego jak w dodatku A. Najpierw uzyskuję modyfikację do stanu Fermiego, tj. odpowiedniki równań (1.34) w reżimie słabych i silnych pomiarów. Przybliżenia są wykonywane dla małych λ i γ . Może istnieć taka kombinacja członów oddziaływania i siły pomiaru λ , dla której takie rozwinięcie nie będzie zasadne. W szczególności, w następnym rozdziale taki przypadek jest zidentyfikowany dla czynnika lorentzowskiego, aczkolwiek nie dla stanu Fermiego.

Warto zwrócić uwagę, że wiele wyrażeń zawiera scałkowany w przestrzeni pędowej iloczyn czynnika $|V(q)|^2$ i amplitudy prawdopodobieństwa (tudzież jej modułu) stanu początkowego dla zmodyfikowanego, niehermitowskiego Hamiltonianu $\hat{H} - i\hbar\lambda$.

W dalszym ciągu wywodu powyższa analiza służy konstrukcji i dyskusji ewolucji stanu przygotowanego i obliczeniom korelacji do kryteriów ZE / AZE.

4.1 Konwencje dotyczące transformaty Laplace’a

Będę szukać rozwiązania postaci

$$\hat{\rho}(t) = \rho_0(t)|\Omega\rangle\langle\Omega| + \int dx \rho(x, t)|x\rangle\langle\Omega| + \int dx \rho^*(x, t)|\Omega\rangle\langle x| + \int dx dy \rho(x, y, t)|x\rangle\langle y|, \quad (1)$$

gdzie ze względu na hermitowskość zachodzi $\rho^*(x, y, t) = \rho(y, x, t)$. Używać będę transformaty Laplace’a tego operatora, zdefiniowaną wzorem:

$$\hat{\rho}(s) = \int_0^\infty ds e^{-st} \hat{\rho}(t), \quad \hat{\rho}(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{c-iT}^{c+iT} \hat{\rho}(s) \quad (2)$$

i tak samo dla poszczególnych funkcji z (1). Wprowadzam oznaczenie:

$$\tilde{\rho}'(x, s) = \int_0^\infty ds e^{-st} \rho(x, t). \quad (3)$$

Alternatywnie, mógłbym zapisać $\tilde{\rho}'(x, s) = \tilde{\rho}^*(x, s^*)$. Choć wypisana jest tu zależność od s^* to jednak *implicite* wyrażenie zależy od s . Dlatego też preferuję powyższy zapis, w którym zależność od s jest jawna.

4.2 Rozwiązanie zanikowe równania Lindblada

Przy warunku początkowym $\hat{\rho}(t=0) = |\Omega\rangle\langle\Omega|$, równanie Lindblada (1.25) dla $\hat{A} = \hat{O}$ po transformacie Laplace'a, z użyciem (1) zapisać można jako

$$\begin{aligned} i\hbar s \tilde{\rho}_0(s) &= i\hbar + \int dx \bar{V}^*(x) \tilde{\rho}(x, s) - \int dx \bar{V}(x) \tilde{\rho}'(x, s) \\ i\hbar s \tilde{\rho}(x, s) &= i\hbar \partial_x \tilde{\rho}(x, s) + \bar{V}(x) \tilde{\rho}_0(s) - \int dy \bar{V}(y) \tilde{\rho}(x, y, s) - i\hbar \lambda \tilde{\rho}(x, s) \\ i\hbar s \tilde{\rho}'(y, s) &= i\hbar \partial_y \tilde{\rho}'(y, s) - \bar{V}^*(y) \tilde{\rho}_0(s) + \int dx \bar{V}^*(x) \tilde{\rho}(x, y, s) - i\hbar \lambda \tilde{\rho}'(y, s) \\ i\hbar s \tilde{\rho}(x, y, s) &= -i\hbar \partial_x \tilde{\rho}(x, y, s) - i\hbar \partial_y \tilde{\rho}(x, y, s) + \bar{V}(x) \tilde{\rho}'(y, s) - \bar{V}^*(y) \tilde{\rho}(x, s). \end{aligned} \quad (4)$$

Wprowadzam funkcje postaci nawiązującej do rozwiązań równania Schrödingera (zob. dodatek A):

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(x, s) &= e^{i\omega(s)x} \psi(x, s) \tilde{\rho}_0(s), & \tilde{\rho}'(y, s) &= e^{-i\omega'(s)y} \psi'(y, s) \tilde{\rho}_0(s), \\ \tilde{\rho}(x, y, s) &= e^{i\omega(s)x - i\omega'(s)y} \psi(x, y, s) \tilde{\rho}_0(s), \end{aligned} \quad (5)$$

przy czym

$$\omega(s) = \frac{1}{\hbar} \int dx \bar{V}^*(x) e^{i\omega(s)x} \psi(x, s), \quad \omega'(s) = \frac{1}{\hbar} \int dx \bar{V}(x) e^{-i\omega'(s)x} \psi'(x, s). \quad (6)$$

Powyższe funkcje są zależne. Tutaj też, podobnie jak powyżej dla funkcji $\tilde{\rho}(x, s)$, można by napisać $\omega^*(s^*)$ zamiast $\omega'(s)$. Wtedy opisywane rozwiązanie jest jawnie hermitowskie, zaś w rozwiązaniach będą pojawiać się funkcje $\text{Re } \omega(s)$ i $\text{Im } \omega(s)$. Zamiast stosowania tych dwóch funkcji, zapisałem wyrażenia tak jakby $\omega(s)$ i jego sprzężenie były funkcjami niezależnymi, których wzajemny związek wyznaczą dopiero równania Lindblada. Nie ma tutaj możliwości uzyskania niehermitowskiego rozwiązania, gdyż warunek początkowy nakłada hermitowskość, a równania Lindblada tę cechę zachowują.

Pierwsze z równań (4) można przepisać w postaci:

$$\tilde{\rho}_0(s) = \frac{1}{s + i\omega(s) - i\omega'(s)} \quad (7)$$

By znaleźć rozwiązanie w obrazie czasowym, potrzeba obliczyć bieguny mianownika. Z kolei pozostałe równania (w których nie zapisuję już *explicite* zależności od s):

$$i\hbar \partial_x \psi(x) = -i\hbar \lambda \psi(x) + \hbar(is - \omega) \psi(x) + \bar{V}(x) e^{-i\omega x} - \int dy \bar{V}(y) e^{-i\omega' y} \psi(x, y), \quad (8)$$

$$i\hbar \partial_y \psi'(y) = -i\hbar \lambda \psi'(y) - \hbar(is + \omega') \psi'(y) - \bar{V}^*(y) e^{i\omega' y} + \int dx \bar{V}^*(x) e^{i\omega x} \psi(x, y). \quad (9)$$

$$i\hbar(\partial_x + \partial_y) \psi(x, y) = \bar{V}(x) e^{-i\omega x} \psi'(y) - \bar{V}^*(y) e^{i\omega' y} \psi(x), \quad (10)$$

wraz z definicjami (6) stanowią układ równań na wyrażenia ω i ω' . Poszukuję rozwiązań w biegunie wyrażenia (7). Tam, w granicy $\lambda \rightarrow 0$ równania te powinny separować się na dwa równania Schrödingera niezależne od siebie nawzajem. Dla $\lambda \neq 0$ wzory na ω i ω' (traktowane jako zmienne niezależne) są powiązane. Jak napisano wyżej, ostatecznie rozwiązanie będzie hermitowskie.

4.2.1 Funkcje pomocnicze

Na potrzeby dalszej dyskusji potrzebuję wzorów na $\omega(s)$ i $\omega'(s)$. W tym celu zdefiniuję funkcje pomocnicze:

$$\begin{aligned}\bar{\omega}(a, s) &= \int dx \bar{V}^*(x) e^{i\omega x} \psi(x+a), \\ \bar{\omega}'(a, s) &= \int dx \bar{V}(x) e^{-i\omega' x} \psi'(x+a), \\ \bar{\sigma}_\lambda(a) &= \frac{1}{i\hbar} \int dx \bar{V}^*(x) \bar{V}(x+a) e^{-i\omega a} \\ \bar{\sigma}'_\lambda(a) &= -\frac{1}{i\hbar} \int dx \bar{V}(x) \bar{V}^*(x+a) e^{i\omega' a}.\end{aligned}\tag{11}$$

Z definicji (6) spełniają one równania

$$\omega(s) = \bar{\omega}(0, s), \quad \omega'(s) = \bar{\omega}'(s, 0).\tag{12}$$

Przy przejściu do reprezentacji pędowej, do funkcji primowanych należy stosować wyrażenia na TF w konwencji jak dla funkcji sprzężonych. Stąd:

$$\begin{aligned}\omega(k, s) &= 2\pi V^*(k+\omega)\psi(k), & \sigma_\lambda(k) &= \frac{2\pi}{i\hbar} |V(k+\omega)|^2, \\ \omega'(k, s) &= 2\pi V^*(k+\omega')\psi(k), & \sigma'_\lambda(k) &= \frac{2\pi}{i\hbar} |V(k+\omega')|^2.\end{aligned}\tag{13}$$

Wyrażenie $V(k+\omega)$ i tp. jest zapisane formalnie na bazie definicji, lecz nie jest to TF, bo też $\omega(s)$ i $\omega'(s)$ mogą być zespolone. W dodatku E.1 jest wykazane, że z równań (8)-(10) oraz (6) wynika następująca postać funkcji pomocniczych po TF (ponownie dla wygody pomijam argument s):

$$\begin{aligned}\omega(k) &= -\frac{\sigma_\lambda(k)}{\hbar k - i\hbar\lambda + i\hbar s - \hbar\omega - \sigma'_\lambda(k)} \left(i\hbar - \overset{<}{\omega}'(k) \right) \\ \omega'(k) &= \frac{\sigma'_\lambda(k)}{\hbar k + i\hbar\lambda - i\hbar s - \hbar\omega' - \sigma_\lambda(k)} \left(i\hbar + \overset{<}{\omega}(k) \right).\end{aligned}\tag{14}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\overset{<}{f}(k) &= \int_{-\infty}^0 dz \bar{f}(z) e^{-ikz} = \int dq \frac{f(q)}{i(q-k-i\epsilon)}, \\ \overset{<}{f}'(k) &= \int_{-\infty}^0 dz \bar{f}'(z) e^{ikz} = -\int dq \frac{f'(q)}{i(q-k+i\epsilon)}.\end{aligned}\tag{15}$$

Warunki (12) po TF sprowadzają się do:

$$\hbar\omega - \int dk \omega(k) = 0, \quad \hbar\omega' - \int dk \omega'(k) = 0.\tag{16}$$

4.2.2 Granica braku pomiarów

Łatwo sprawdzić z równań (22) i (7.9), że dla $\lambda = 0$ zachodzi

$$\bar{\sigma}_0(0) - \hbar\omega = 0. \quad (17)$$

Wydaje się zatem, że wtedy można położyć

$$\omega(k) = \frac{\sigma_0(k)}{i(k - i\epsilon)}. \quad (18)$$

Posługując się relacją

$$\frac{1}{i(q - k - i\epsilon)i(q - i\epsilon)} = \frac{1}{i(k - i\epsilon)} \left(\frac{1}{i(q - k - i\epsilon)} - \frac{1}{i(q - i\epsilon)} \right) \quad (19)$$

uzyskuje się

$$\bar{\omega}(k) = \frac{1}{i(k - i\epsilon)} \left(\bar{\sigma}_0(k) - \bar{\sigma}_0(0) \right) = \frac{1}{ik} \left(\bar{\sigma}_0(k) - \hbar\omega \right) \quad (20)$$

i tak samo dla funkcji primowanych. Po podstawieniu do równań (14), wychodzi np.:

$$\frac{\sigma_0(k)}{i(k - i\epsilon)} = - \frac{\sigma_0(k)}{\hbar k + i\hbar s - \hbar\omega - \sigma_0'^*(k)} \left(i\hbar + \frac{\bar{\sigma}_0'^*(k) - \hbar\omega'}{ik} \right). \quad (21)$$

Przy warunku $-\omega' = is - \omega$ zadany przez biegun (7) uzyskuje się zgodność, czyli propozycja jest właściwa.

4.3 Rachunek iteracyjny dla stanu Fermiego

W tej sekcji poszukiwany będzie stan zanikowy o małym, rzeczywistym wykładniku. Oczekuję tym sposobem uzyskać poprawki do stanu Fermiego. W pierwszej podsekcji przedstawiam przybliżenia stosowne dla małego wykładnika. Dalej, postuluję rozwiązanie, które może być pierwszym krokiem rozwiązania iteracyjnego, tzn. rozwiązanie z jednego kroku podstawiam do RHS równań (14) – LHS jest wtedy przybliżeniem w następnym kroku. Postulowana postać ujmuję systematycznie zarówno reżim silnych jak i słabych pomiarów. Na końcu sekcji podane jest też wyrażenie na $\omega(k)$ w następnym kroku iteracji.

Kluczowe znaczenie w tym podejściu ma tu postać funkcji:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\lambda(k) &= \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^0 da e^{-ika} \int dx \bar{V}^*(x) \bar{V}(x+a) e^{-i\omega a} \\ &= \frac{1}{i\hbar} \int dx \int dy \theta(x-y) e^{i(\omega+k)(x-y)} \bar{V}^*(x) \bar{V}(y) \end{aligned} \quad (22)$$

i jego primowanego odpowiednika. Dzięki temu uzyskane wyrażenia będzie można wyrazić z użyciem amplitudy prawdopodobieństwa obliczonej dla niehermitowskiego Hamiltonianu.

4.3.1 Przybliżenia dla małego wykładnika

Kiedy wykładniki $i\omega$ oraz $i\omega'$ są małe, można za małe też uważać s , z racji, że poszukiwane są bieguny (7). Można zatem rozwinąć:

$$\omega(k, s) = \omega^{(0)}(k) + \omega^{(1)}(k)s + \omega^{(2)}(k)s^2 + \dots \quad (23)$$

i analogicznie dla wielkości primowanej. Stosować będę tę samą metodę co w rozdziale A. Tak na przykład, w oparciu o (16) można przybliżyć:

$$\begin{aligned}\omega(s) &= (1 - z_\lambda^{-1})is + \omega_{fgr,\lambda}, \\ \omega_{fgr,\lambda} &= \int dk \omega^{(0)}(k), \quad z_\lambda^{-1} = 1 + i \int dk \omega^{(1)}(k).\end{aligned}\tag{24}$$

Jak uzasadnię w następnej sekcji, tak obliczone $\omega_{fgr,\lambda}$ i z_λ stanowią zmodyfikowaną FGR dla układu z dekoherencją. Uzupełniam je o wzór na wykładnik:

$$\begin{aligned}R_{fgr,\lambda} &\equiv i\omega_{fgr,\lambda} - i\omega_{fgr,\lambda}^* = -\text{Im} \int dk \omega^{(0)}(k), \\ Z_\lambda^{-1} &\equiv |z_\lambda|^{-1} \simeq z_\lambda^{-1} + z_\lambda^{*-1} - 1.\end{aligned}\tag{25}$$

Poprawka wyższego rzędu w potęgę γ do $\omega_{fgr,\lambda}$ wyrażałaby się przez

$$\hbar\omega_{fgr,\lambda} = \frac{1 - \omega_1 - \sqrt{(1 - \omega_1)^2 - 4\omega_2\omega_0}}{2\omega_2},\tag{26}$$

gdzie oznaczyłem $\omega_n = \int dk \omega^{(n)}(k)$. Wyprowadzenie analogicznego wyrażenia znajduje się w dodatku A.

4.3.2 Punkt wyjścia

Dla małego λ rozwiązanie (14) powinno być bliskie wyrażenia (18), będącego rozwiązaniem granicznym dla przypadku $\lambda = 0$. Z drugiej strony, można zaproponować funkcję

$$\frac{\sigma_0(k)}{i(k - i\lambda)}\tag{27}$$

odpowiadającą modelowi, w którym tłumieniu ulegają także wyrazy diagonalne i pozadiagonalne rezerwuaru. Najlepszą opcją jest jednak rozwiązanie sugerowane przez postać (14), mianowicie równanie to z położonym $\omega' \leq(k) = 0$ po RHS:

$$\omega^i(k) = - \frac{i\hbar\sigma_\lambda(k)}{\hbar k - i\hbar\lambda + i\hbar s - \hbar\omega - \sigma_\lambda^{\leq}(k)}\tag{28}$$

i tak samo dla wielkości primowanej. Twierdzę, że jest to dobry punkt startowy dla krótkich czasów, z racji podobieństwa do wyrażen (18), jak również dlatego, że wyrażenie $\hbar\omega' - \sigma_\lambda^{\leq*}(k)$ (pojawiające się, jeśli podstawić $-\omega' = is - \omega$) zgodnie z (17) znika w granicy braku pomiaru, odtwarzając (18). Jednocześnie jest to też drugi krok w podejściu iteracyjnym zastosowanym do silnych pomiarów ciągłych – wartość 0 podstawiona po RHS równania (14) to przewidywany paradoks Zenona przy $\lambda \rightarrow \infty$.

Obliczenia przeprowadzane są w biegunie $-\omega' = is - \omega$. Wtedy mianownik w (28) jest, jak pokazano w dodatku E.2, amplitudą prawdopodobieństwa stanu początkowego $|\omega\rangle$ w reprezentacji pędowej dla niehermitowskiego Hamiltonianu:

$$\hat{H} - i\hbar\lambda |\Omega\rangle \langle \Omega|.\tag{29}$$

Fakt ten zapisuję jako:

$$\omega^i(k) = -i\sigma_\lambda(k)\psi_\lambda^*(k + \omega').\tag{30}$$

4.3.3 Modyfikacja FGR

W pierwszym kroku zatem uzyskuje się:

$$\int dk \omega^i(k) = \int da \int dx \bar{V}^*(x) \bar{V}(x-a) e^{i\omega a} \int dk e^{ika} \tilde{\psi}_\lambda(k+\omega'). \quad (31)$$

gdzie przy okazji dokonano zamiany zmiennej całkowania $a \rightarrow -a$, a obliczenia przeprowadzono w biegunie $s + i\omega - i\omega' = 0$. Oś całkowania w ostatniej całce można przesunąć o $\text{Im } \omega'$ w dziedzinę zespoloną. Lecz model, w którym występuje bezpośrednie tłumienie wyrazu diagonalnego, powinien charakteryzować się większymi wykładnikami stanów zanikowych niż odpowiedniki w modelu fizycznym bez tego jawnego tłumienia. Stąd jeśli poszukiwane są poprawki do stanu Fermiego, czyli stanu o najsłabszym zaniku, to najpewniej wszystkie bieguny mianownika leżą po tej samej stronie osi. Stąd to przesunięcie nie zmienia wyniku. Mogę zatem w tym przypadku zapisać:

$$\begin{aligned} \int dk \omega^i(k) &= -i \int da \int dq |V(q)|^2 e^{iqa} e^{i(\omega-\omega')a} \psi_\lambda(a) \\ &= -i \int da \int dq |V(q)|^2 e^{iqa} e^{-sa} \psi_\lambda(a), \end{aligned} \quad (32)$$

gdzie ostatnia równość zachodzi w biegunie wyrażenia (7), zaś

$$\psi_0^{prep}(\lambda, t) = i \int dk \frac{e^{-ikt}}{k - i\lambda - \sigma'_\lambda(0) \Big|_{\omega' \rightarrow k}} / \hbar. \quad (33)$$

Z równań (24) mogę obliczyć:

$$\begin{aligned} \omega_{fgr,\lambda} &= -\frac{i}{\hbar} \int dq |V(q)|^2 \int da e^{iqa} \psi_\lambda^*(a), \\ z_\lambda^{-1} &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int dq |V(q)|^2 \frac{\partial}{\partial q} \int da e^{iqa} \psi_\lambda^*(a). \end{aligned} \quad (34)$$

Dla dużych λ można przyjąć, że decydujący wkład ma zachowanie się (33) dla krótkich czasów. Jak to było dyskutowane w rozdziale 2, w tym reżimie można rozwinąć wyrażenia w potęgach γ . Wyrażenia na (33) wyprowadzone są także w dodatku E.2. W szczególności:

$$\begin{aligned} \psi_\lambda(t) &= \theta(t) e^{-\lambda t} \left[1 + \frac{1}{\hbar^2} \int dk |V(k)|^2 \left(\frac{it}{k+i\lambda} + \frac{e^{-ikt+\lambda t} - 1}{(k+i\lambda)^2} \right) \right] \\ &= \theta(t) \left[e^{-\lambda t} + i \frac{\partial}{\partial \lambda} \int dk |V(k)|^2 \frac{e^{-ikt} - e^{-\lambda t}}{k+i\lambda} \right], \end{aligned} \quad (35)$$

czego TF to

$$\int dt \psi_\lambda(t) e^{-iqt} = \frac{1}{i(q-i\lambda)} - \frac{i}{\hbar^2} \int \frac{dk |V(k)|^2}{i(k+q-i\epsilon)(q-i\lambda)^2}. \quad (36)$$

W rozwinięciu do pierwszej potęgi γ potrzeba tylko pierwszego wyrazu z powyższego wzoru. Wtedy, z (25),

$$R_{fgr,\lambda} = \frac{2}{\hbar} \int dq \frac{\lambda |V(q)|^2}{q^2 + \lambda^2}, \quad (37)$$

a nadto

$$z_\lambda^{-1} = 1 + \frac{1}{\hbar} \int dq \frac{|V(q)|^2}{(q - i\lambda)^2}, \quad Z_\lambda^{-1} = 1 + \frac{2}{\hbar} \int dq |V(q)|^2 \partial_q \frac{\lambda}{q^2 + \lambda^2}. \quad (38)$$

Dla $\lambda \rightarrow 0$, $R \rightarrow 0$. Z kolei dla $\lambda \rightarrow 0$ wyrażenie to odtwarza FGR. Zdaje się zatem, że zastosowane przybliżenie krótkich czasów jest także skuteczne dla małych λ .

Wydaje się, że dla słabo-zmiennego czynnika $|V(k)|^2$ znaczenie mają późniejsze czasy, a stąd do $\psi_\lambda(a)$ można zastosować FGR. Dla tej funkcji wykładnik w eksponencie wynosić będzie $\lambda + i\omega_{fgr}$, natomiast stała przed eksponentem – wciąż z_{fgr} . Jednakże, wyrażenie uzyskane tą metodą nie odtwarza FGR w granicy $\lambda \rightarrow 0$, więc nie jest to dobre przybliżenie, przynajmniej dla słabych λ . Zachowanie $\psi_\lambda(a)$ dla małych a (krótkich czasów) zdaje się mieć tu wpływ, którego nie można pominąć w przybliżeniach.

W dodatku E.3 rozdziału pokazano, że w następnym kroku iteracji

$$\begin{aligned} \int dk \omega^{ii}(k) = & \int dk \omega^i(k) + \frac{1}{\hbar^2} \int dq |V(q)|^2 \int dq' |V(q')|^2 \\ & \times \left(\frac{1}{i(q - q' - \omega + \omega')} + \int_0^\infty da \frac{|\psi_\lambda(a)|^2 e^{i(q - q' - \omega + \omega')a}}{i(q - q' - \omega + \omega')} \right). \end{aligned} \quad (39)$$

4.4 Wartość oczekiwana

Wartość oczekiwana wyraża się z wykorzystaniem (7) przez:

$$\langle o(t) \rangle_q = \langle \Omega | \hat{\rho}(t) | \Omega \rangle = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-iT}^{iT} ds \frac{e^{its}}{s + i\omega(s) - i\omega'(s)}. \quad (40)$$

Dla długiego czasu stosuję zmodyfikowaną FGR, tj.:

$$\begin{aligned} \langle o(t) \rangle_q = & Z_\lambda e^{-R_{fgr,\lambda} t}, \quad R_{fgr,\lambda} = \frac{2}{\hbar} \int dq \frac{\lambda |V(q)|^2}{q^2 + \lambda^2}, \\ & Z_\lambda = 1 - \frac{2}{\hbar} \int dq |V(q)|^2 \partial_q \frac{\lambda}{q^2 + \lambda^2}. \end{aligned} \quad (41)$$

Z kolei dla krótkich czasów poszukuję rozwinięcia w parametrze γ do pierwszej potęgi. Najpierw można rozwinąć (40) w potęgach $\frac{1}{\hbar} \int dk [\omega(k) - \omega'(k)]$:

$$\begin{aligned} \langle o(t) \rangle_q = & 1 - \frac{1}{2\pi i \hbar} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds \frac{e^{st}}{s^2} \int dk [\omega(k) - \omega'(k)] \\ = & 1 + \frac{1}{\pi i \hbar^2} \int dq |V(q)|^2 \int_{-i\infty}^{i\infty} ds \frac{e^{st}}{s^2} \int_0^\infty dt' e^{iqt'} e^{-st'} \psi_\lambda^*(t') - c.c. \\ = & 1 - \frac{1}{\pi \hbar^2} \int dq |V(q)|^2 \int_{-i\infty}^{i\infty} ds \frac{e^{st}}{s^2} \frac{1}{q + is - i\lambda} - c.c. \\ = & 1 + 2\text{Re} \frac{1}{\hbar^2} \int dk |V(k)|^2 \left(\frac{it}{k + i\lambda} + \frac{e^{-ikt + \lambda t} - 1}{(k + i\lambda)^2} \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Innymi słowy, do pierwszej poprawki w γ wartość oczekiwana różni się od $|\psi_\lambda(t)|^2$ obliczonego w E.2 tylko o czynnik $e^{-\lambda t}$. Wynik przepisać można jako:

$$\begin{aligned} \langle o(t) \rangle = & 1 - e^{\lambda t} \int dk |V(k)|^2 \frac{2 \cos(kt) e^{\lambda t} - 1}{k^2 + \lambda^2} \\ & + \int dk |V(k)|^2 \left(\frac{2\lambda t}{k^2 + \lambda^2} - e^{\lambda t} \frac{2\lambda k \sin(kt)}{(k^2 + \lambda^2)^2} \right). \end{aligned} \quad (43)$$

Pierwsza linijka przechodzi na właściwe wyrażenie w granicy $\lambda \rightarrow 0$, zaś ostatnia linijka wtedy znika.

4.5 Korelacje

By obliczyć wyrażenie $\langle o(t_1)o(t_2) \rangle_q$ trzeba zbadać ewolucję operatora $\hat{\chi}(t)$ z zadanyim warunkiem początkowym:

$$\hat{\chi}(t=0) = \rho_0(t_1) |\Omega\rangle \langle \Omega| + \frac{1}{2} \int dx [\rho(x, t_1) |x\rangle \langle \Omega| + \rho^*(x, t_1) |\Omega\rangle \langle x|]. \quad (44)$$

Dlatego należy zmodyfikować równania (7)-(10). Wskutek tych operacji, w rozwinięciu do pierwszej potęgi γ pojawia się kolejna stała multiplikatywna podobna do Z_λ :

$$\langle o(t_1)o(t_2) \rangle_q = \langle o(t_1) \rangle \langle o(t_2 - t_1) \rangle_q \cdot Z'_\lambda(t_1). \quad (45)$$

Pozostaje wreszcie rozpatrzyć to wyrażenie w różnych reżimach czasowych, jak również przy $\lambda = 0$ w zakresie $t \in [0, t_1]$.

4.5.1 Równania Lindblada

Równanie (7) nie ulega zasadniczej zmianie, tj. zachodzi

$$\tilde{\chi}(s) = \frac{\rho_0(t_1)}{s + i\omega(s) - i\omega'(s)} \quad (46)$$

Także, bez zmian pozostaje (10). Natomiast jeśli chodzi o równanie (8) (i, analogicznie, (9)):

$$i\hbar \partial_x \psi(x) = i\hbar e^{-i\omega x} \frac{\rho(x, t_1)}{\tilde{\chi}(s)} - i\hbar \lambda \psi(x) + \hbar(is - \omega)\psi(x) + \bar{V}(x)e^{-i\omega x} - \int dy \bar{V}(y)e^{-i\omega' y} \psi(x, y). \quad (47)$$

Stąd zamiast równań (14), odpowiednie funkcje pomocnicze spełniać będą równania:

$$\begin{aligned} \omega(k) = & \left(\frac{1}{\hbar} \frac{s + i\omega - i\omega'}{\rho_0(t_1)} V^*(k + \omega) \rho(k, t_1) - \sigma_\lambda(k) \left(i\hbar - \overset{<}{\omega}'(k) \right) \right) \\ & \times \left(\hbar k - i\hbar \lambda + i\hbar s - \hbar \omega - \overset{<}{\sigma}'_\lambda(k) \right)^{-1}, \\ \omega'(k) = & \left(\frac{1}{\hbar} \frac{s + i\omega - i\omega'}{\rho_0(t_1)} V(k + \omega') \rho^*(k, t_1) + \sigma'_\lambda(k) \left(i\hbar + \overset{<}{\omega}(k) \right) \right) \\ & \times \left(\hbar k + i\hbar \lambda - i\hbar s - \hbar \omega' - \overset{<}{\sigma}_\lambda(k) \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (48)$$

Zgodnie z (5) i z dodatkiem E.4, w najniższym rzędzie zachodzi:

$$V^*(k + \omega)\tilde{\rho}(k, s') = \tilde{\rho}_0(s') \frac{|V(k)|^2}{2\pi(\hbar k - i\hbar\lambda)}, \quad (49)$$

a w konsekwencji, w tym rzędzie (i uwzględniając wewnątrz funkcji $a(s)$ i $b(s)$, że obliczenia wykonywane są dla bieguna $s + i\omega(s) - i\omega'(s)$):

$$\begin{aligned} s + i\omega(s) - i\omega'(s) &= s + b(s) + a(s)(s + i\omega(s) - i\omega'(s)), \\ a(s) &= \frac{1}{\hbar} \int dk \frac{|V(k)|^2}{(\hbar k - i\hbar\lambda)^2} + \frac{1}{\hbar} \int dk \frac{|V(k)|^2}{(\hbar k + i\hbar\lambda)^2}, \\ b(s) &= -i \int dk \frac{i\hbar\sigma'_\lambda(k)}{\hbar k - i\hbar\lambda} - i \int dk \frac{i\hbar\sigma_\lambda(k)}{\hbar k + i\hbar\lambda}. \end{aligned} \quad (50)$$

Zatem w okolicy bieguna w wyrażeniu (46) pojawia się dodatkowa funkcja $1 - a(s)$:

$$\tilde{\chi}(s) = [1 - a(s)]\rho_0(t_1) \frac{1}{s + b(s)}, \quad (51)$$

przy czym mianownik $s + b(s)$ prowadzi do takich samych wzorów co we wcześniejszych obliczeniach. Stąd też, po odwołaniu się do równań (24) i (38), w najniższym rzędzie

$$\langle o(t_1)o(t_2) \rangle_q = \frac{1}{2} \langle o(t_1) \rangle_q \langle o(t_2 - t_1) \rangle_q \left(z_\lambda^{-1} + z_\lambda^{*(-1)} \right). \quad (52)$$

4.5.2 Wyrażenia przy długich czasach

Tym sposobem uzyskuje się analogi wyrażen z rozdziału 3. Tak na przykład dla długiego czasu t_1 obowiązuje na bazie (25):

$$\langle o(t_1)o(t_2) \rangle_q = \frac{1}{2} (z_\lambda + z_\lambda^*) e^{-R_{fgr,\lambda} t_1} \langle o(t_2 - t_1) \rangle_q, \quad (53)$$

a kiedy także czas $t_2 - t_1$ jest długi:

$$\langle o(t_1)o(t_2) \rangle_q = \frac{1}{2} Z_\lambda (z_\lambda + z_\lambda^*) e^{-R_{fgr} t_2}, \quad \frac{\langle o(t_1)o(t_2) \rangle_q}{\langle o(t_2) \rangle} - 1 = \frac{1}{2} (z_\lambda + z_\lambda^* - 2). \quad (54)$$

Jeśli natomiast różnica czasów jest krótka:

$$\frac{\langle o(t_1)o(t_2) \rangle_q}{\langle o(t_2) \rangle} - 1 = \frac{z_\lambda + z_\lambda^*}{Z_\lambda} e^{R_{fgr,\lambda}(t_2-t_1)} \langle o(t_2 - t_1) \rangle, \quad (55)$$

gdzie wartość oczekiwana po RHS dana jest wzorem (43). Tą metodą nie uzyskuje jednak bezpośrednio analogu równania (3.11) stosowanego dla krótkich czasów.

Rozdział 5

Przypadek szczególny, lorentzowski

Spis treści

5.1	Metoda pseudomodów	43
5.1.1	Rozwiązania równania Schrödingera	44
5.1.2	Prawdopodobieństwa powrotów po negatywnych wynikach	45
5.2	Wartości słabe	46
5.3	Przypadek pomiarów ciągłych	47
5.3.1	Rozwiązania zanikowe równania Lindblada	47
5.3.2	Zachowanie rezonansowe wskutek oddziaływania z detektorem	48
5.3.3	Korelacje	49

Korzystając z metody pseudomodów [33], można znaleźć ściśle wyrażenia poszukiwane w tej rozprawie w przypadku wyrazu oddziaływania postaci lorentzowskiej (1.36), tj.:

$$|V(k)|^2 = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{\Delta}{(k - k_0)^2 + (\Delta/2)^2}. \quad (1)$$

Taki przypadek jest najprostszym zastosowaniem metody pseudomodów. Stosując tę samą technikę, uzupełnioną co prawda o dodatkowe przekształcenia, można podobnie rozważać przypadki sum czy potęg Lorentzianów. Jednak w przypadku pomiarów rzutowych nie obowiązuje już wtedy ścisła faktoryzacja (2.7). Szkic tego przypadku zawarty jest w dodatku F.1.

W tym co następuje, przedstawiam najpierw metodę pseudomodów i konstruuje stosowne rozwiązania z niej wynikające. Dalej, obliczam stosowne elementy macierzy przejścia $\mathcal{P}$ z równania (2.6) i pokazuję, że równania (2.7) dla $z = p_0$ obowiązują w tym przypadku ściśle. Dalej jest dyskusja dla tego przypadku wartości słabych operatora $\hat{O}$. W sekcji 5.3 metoda pseudomodów zastosowana jest przy rozwiązywaniu równania Lindblada i obliczaniu korelacji dla pomiaru ciągłego.

Analiza skupia się na przypadku symetrycznym, $k_0 = 0$.

5.1 Metoda pseudomodów

Podstawiam $\psi(k, t) = \phi(k, t)e^{-ikt}$, gdzie $\psi(k, t)$ to amplituda prawdopodobieństwa stanu $|k\rangle$. Z kolei $\psi_0(t)$ to amplituda prawdopodobieństwa stanu $|\Omega\rangle$. Równanie Schrödingera można zapisać jako układ równań:

$$i\hbar\partial_t\psi_0(t) = \int dk V^*(k)\phi(k, t)e^{-ikt}, \quad i\hbar\partial_t\phi(k, t) = V(k)\psi_0(t)e^{ikt}. \quad (2)$$

Scałkowanie drugie równanie:

$$\phi(k, t) = \frac{1}{i\hbar} \bar{V}(k) \int_0^t dt' \psi_0(t') e^{ikt'} \quad (3)$$

podstawione do pierwszego daje równanie:

$$\partial_t \psi_0(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' G(t-t') \psi_0(t'), \quad G(s) = \int dk |\bar{V}(k)|^2 e^{-iks}. \quad (4)$$

Lorentzowski czynnik (1) sprowadza funkcję G dla $s > 0$ do postaci

$$G(s) = \gamma e^{-ik_0 s - \Delta s/2}. \quad (5)$$

Oznacza to, że równanie (4) przechodzi na

$$\partial_t \psi_0(t) = -\frac{\gamma}{\hbar^2} \int_0^t dt' e^{-(ik_0 + \Delta/2)(t-t')} \psi_0(t'). \quad (6)$$

Otóż powyższe równanie można uzyskać także z zestawu równań:

$$i\hbar \partial_t \psi_0(t) = \sqrt{\gamma} \psi_1(t), \quad i\hbar \partial_t \psi_1(t) = \hbar(k_0 - i\Delta/2) \psi_1(t) + \sqrt{\gamma} \psi_0(t), \quad (7)$$

czyli innymi słowy, jest to równanie spełnione także dla stanu nieunormowanego w dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta. Dla ustalenia uwagi będzie ona rozpięta przez ortonormalne wektory bazowe $|\Omega\rangle$ i $|k_0\rangle$. To samo oznaczenie jest stosowane dla pierwszego z tych wektorów co dla stanu fizycznego. Ów stan nieunormowany spełnia równanie:

$$i\hbar \partial_t |\psi(t)\rangle = \left[\hat{H}' - \frac{i\Delta}{2} |k_0\rangle \langle k_0| \right] |\psi(t)\rangle, \quad (8)$$

gdzie $\hat{H}' = k_0 |k_0\rangle \langle k_0| + \sqrt{\gamma}(|k_0\rangle \langle \Omega| + |\Omega\rangle \langle k_0|)$. Zamiast stosowania osobnej przestrzeni Hilberta, można dokonać transformacji w przestrzeni Hilberta rezerwuaru do postaci z wyróżnionym modem sprzężonym z układem badanym i z kontinuum stanów sprzężonych z tym modem za pomocą płaskiego czynnika $V'(k) = \text{const}$ [31]. Człon niehermitowski w niniejszych wzorach jest skutkiem oddziaływania z tym kontinuum. Zatem stosowanym niżej przejściom do przestrzeni Hilberta pseudomodów można dać także uzasadnienie z odwołaniem się do tej fizycznej transformacji.

5.1.1 Rozwiązania równania Schrödingera

Rozwiązanie zanikowe równania (8) zapiszę w postaci

$$|\psi_z(t)\rangle = e^{-i\omega t} |\Omega\rangle + X e^{-i\omega t} |k_0\rangle. \quad (9)$$

Wtedy z równań (7)

$$\hbar\omega = \sqrt{\gamma} X, \quad \hbar X \omega = \left(\hbar k_0 - \frac{i\Delta}{2} \right) X + \sqrt{\gamma}. \quad (10)$$

co sprowadza się do równania na ω :

$$\hbar\omega \left(\hbar\omega - \hbar k_0 + \frac{i\Delta}{2} \right) - \gamma = 0. \quad (11)$$

Rozwiązania:

$$\hbar\omega_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\hbar k_0 - \frac{i\Delta}{2} \pm \sqrt{\left(\hbar k_0 - \frac{i\Delta}{2} \right)^2 + 4\gamma} \right), \quad (12)$$

przy czym ω_{-} w granicy małych γ spełnia FGR: $\hbar\omega_{-} \simeq \frac{2\gamma}{\hbar k_0 - \frac{i\Delta}{2}}$. Dla uzyskanych wartości $\hbar\omega_{\pm}$ obliczyć też można

$$X_{\pm} = \frac{\hbar\omega_{\pm}}{\sqrt{\gamma}}. \quad (13)$$

Układ przygotowany w chwili $t = 0$ w stanie $|\Omega\rangle$ można zapisać jako superpozycję uzyskanych wyżej stanów zanikowych z amplitudami, odpowiednio, a_{+} i a_{-} : $|\psi(t)\rangle = a_{+} |\psi_{+}(t)\rangle + a_{-} |\psi_{-}(t)\rangle$. Ze względu na warunek początkowy $|\psi(0)\rangle = |\Omega\rangle$, spełniać one muszą równania:

$$a_{+} + a_{-} = 1, \quad X_{+}a_{+} + X_{-}a_{-} = 0, \quad (14)$$

czyli

$$a_{\pm} = \frac{\pm X_{\mp}}{X_{\mp} - X_{\pm}} = \frac{\pm\omega_{\mp}}{\omega_{\mp} - \omega_{\pm}}. \quad (15)$$

Na mocy metody można stosować podstawienie poniżej, gdzie RHS obliczona jest w dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta pseudomodów:

$$\langle\Omega|e^{-i\hat{H}t}|\Omega\rangle = \langle\Omega|e^{-i\hat{G}t}|\Omega\rangle, \quad \hat{G} = (\hbar k_0 - i\Delta/2) |k_0\rangle \langle k_0| + \sqrt{\gamma}(|k_0\rangle \langle\Omega| + |\Omega\rangle \langle k_0|). \quad (16)$$

Tym sposobem (ozn. $\hat{W} \equiv e^{-i\hat{G}\tau}$):

$$q_0 = 1 - |\langle\Omega|\hat{W}|\Omega\rangle|^2 = 1 - \left| \frac{\omega_{+}e^{-i\omega_{-}\tau} - \omega_{-}e^{-i\omega_{+}\tau}}{\omega_{+} - \omega_{-}} \right|^2. \quad (17)$$

Oprócz tego współczynnik a_{-} zadaje wyrażenie:

$$Z_{fgr} = \left| \frac{\omega_{+}}{\omega_{+} - \omega_{-}} \right|^2 = \frac{1}{2} \left| 1 + \frac{\hbar k_0 - i\Delta/2}{\sqrt{(\hbar k_0 - i\Delta/2)^2 + 4\gamma}} \right|^2. \quad (18)$$

5.1.2 Prawdopodobieństwa powrotów po negatywnych wynikach

Metodę pseudomodów przedstawioną wyżej uzupełnić można o następującą obserwację: jeśli poszukiwane jest prawdopodobieństwo przebywania układu w stanie innym niż Ω , to można dokonać takiego przekształcenia:

$$\begin{aligned} \langle\Omega|\hat{U} \int dk |k\rangle \langle k| \hat{U}|\Omega\rangle &= \langle\Omega|\hat{U}(1 - |\Omega\rangle \langle\Omega|)\hat{U}|\Omega\rangle = \\ &= \langle\Omega|\hat{U}^2|\Omega\rangle - \langle\Omega|U|\Omega\rangle \langle\Omega|U|\Omega\rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

Wszystkie wyrażenia powyżej można teraz obliczyć w dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta korzystając z równości:

$$\langle\Omega|e^{-i\hat{H}t}|\Omega\rangle = \langle\Omega|e^{-i\hat{G}t}|\Omega\rangle, \quad \hat{G} = (\hbar k_0 - i\Delta/2) |k_0\rangle \langle k_0| + \sqrt{\gamma}(|k_0\rangle \langle\Omega| + |\Omega\rangle \langle k_0|). \quad (20)$$

Idąc dalej, równanie (19) można sprowadzić do postaci:

$$\begin{aligned}\langle \Omega | \hat{U} \int dk |k\rangle \langle k| \hat{U} | \Omega \rangle &= \langle \Omega | \hat{W}^2 | \Omega \rangle - \langle \Omega | W | \Omega \rangle \langle \Omega | W | \Omega \rangle \\ &= \langle \Omega | \hat{W} | k_0 \rangle \langle k_0 | \hat{W} | \Omega \rangle\end{aligned}\quad (21)$$

przez odwołując się do rozkładu jedynek: $1 = |k_0\rangle \langle k_0| + |\Omega\rangle \langle \Omega|$. Zauważam, że podobnych operacji nie można by wykonać, gdyby zastąpić jeden z operatorów $\hat{U}$ przez $\hat{U}^\dagger$, bo o ile $\hat{U}\hat{U}^\dagger = 1$, to $\hat{W}\hat{W}^\dagger \neq 1$. Zatem nie można bezpośrednio obliczyć tą metodą prawdopodobieństwa przebywania w innym stanie niż pierwotny.

By znaleźć $\alpha(2\tau)$ z (2.15), wystarczy obliczyć:

$$\langle k_0 | \hat{W} | \Omega \rangle = \langle \Omega | \hat{W} | k_0 \rangle = \frac{\hbar^2 \omega_+ \omega_-}{\gamma(\omega_- - \omega_+)} (e^{-i\omega_+ \tau} - e^{-i\omega_- \tau}), \quad (22)$$

bo też owo równanie przepisać można jako

$$\alpha(2\tau) = \langle \Omega | \hat{U} \frac{1 - |\Omega\rangle \langle \Omega|}{\sqrt{q_0}} \hat{U} | \Omega \rangle = \langle \Omega | \hat{W} \frac{|k_0\rangle \langle k_0|}{\sqrt{q_0}} \hat{W} | \Omega \rangle. \quad (23)$$

W efekcie

$$q_0 p_1 = q_0 |\alpha(2\tau)|^2 = \left| \frac{\hbar \omega_+ \omega_-}{\sqrt{\gamma}(\omega_- - \omega_+)} (e^{-i\omega_+ \tau} - e^{-i\omega_- \tau}) \right|^4. \quad (24)$$

Rozumowanie można powtórzyć dla kolejnych p_n , uzyskując równania (2.7) z

$$w = \left| \langle k_0 | \hat{W} | k_0 \rangle \right|^2. \quad (25)$$

Wyraz wewnątrz modułu można obliczyć jako $\psi_1(\tau)$ z równań (7), przy warunkach początkowych $\psi_0(0) = 0$, $\psi_1(0) = 1$. Rozwiązanie to jest takie samo co dla przypadku stanu początkowego $|\Omega\rangle$, tj.:

$$\langle k_0 | \hat{W} | k_0 \rangle = \langle \Omega | \hat{W} | \Omega \rangle = \frac{\omega_+ e^{-i\omega_- \tau} - \omega_- e^{-i\omega_+ \tau}}{\omega_+ - \omega_-}. \quad (26)$$

Wynika z tego, że $1 - q_0 = p_0 = w$, tak jak to przyjęto w równaniu (2.10).

5.2 Wartości słabe

Najsamprz ($\hat{O} = |\Omega\rangle \langle \Omega|$):

$$\hat{O} |\psi(t)\rangle = (a_+ e^{-i\omega_+ t} + a_- e^{-i\omega_- t}) |\Omega\rangle = \frac{\omega_- e^{-i\omega_+ t} - \omega_+ e^{-i\omega_- t}}{\omega_- - \omega_+} |\Omega\rangle, \quad (27)$$

gdzie $|\psi(t)\rangle$ to stan przygotowany opisany wyżej. Tym samym

$$\langle o(t_2) \rangle = \left| \frac{\omega_- e^{-i\omega_+ t_2} - \omega_+ e^{-i\omega_- t_2}}{\omega_- - \omega_+} \right|^2. \quad (28)$$

By obliczyć korelacje drugiego rzędu, trzeba znaleźć dalszą ewolucję (27), bo jak łatwo sprawdzić:

$$2 \langle o(t_2) o(t_1) \rangle = \langle \Omega | U^\dagger | \Omega \rangle \langle \Omega | U^\dagger | \Omega \rangle \langle \Omega | U^2 | \Omega \rangle + c.c. \quad (29)$$

W rezultacie:

$$2 \langle o(t_2)o(t_1) \rangle = \frac{\omega_- e^{-i\omega_+(t_2-t_1)} - \omega_+ e^{-i\omega_-(t_2-t_1)}}{\omega_- - \omega_+} \cdot \frac{\omega_- e^{-i\omega_+t_1} - \omega_+ e^{-i\omega_-t_1}}{\omega_- - \omega_+} \quad (30)$$

$$\times \left[\frac{\omega_- e^{-i\omega_+t_2} - \omega_+ e^{-i\omega_-t_2}}{\omega_- - \omega_+} \right]^* + c.c.$$

Korzystając z korelacji i wartości oczekiwanej, można obliczyć wartość słabą z (3.1):

$$w.v.(t_1, t_2) = \text{Re} \frac{(\omega_- e^{-i\omega_+(t_2-t_1)} - \omega_+ e^{-i\omega_-(t_2-t_1)}) \cdot (\omega_- e^{-i\omega_+t_1} - \omega_+ e^{-i\omega_-t_1})}{(\omega_- - \omega_+) (\omega_- e^{-i\omega_+t_2} - \omega_+ e^{-i\omega_-t_2})}. \quad (31)$$

Dla długiego czasu t_1 można napisać

$$w.v.(t_1, t_2) = \text{Re} \frac{(\omega_- e^{-i\omega_+(t_2-t_1)} - \omega_+ e^{-i\omega_-(t_2-t_1)}) \omega_+ e^{-i\omega_-t_1}}{(\omega_- - \omega_+) \omega_+ e^{-i\omega_-t_2}}. \quad (32)$$

pamiętając o tym, że $t_2 > t_1$. Z kolei jeśli również czas $t_2 - t_1$ jest długi:

$$w.v.(t_1, t_2) = \text{Re} \frac{\omega_+}{\omega_+ - \omega_-}. \quad (33)$$

5.3 Przypadek pomiarów ciągłych

Powstaje pytanie, czy dla nieunitarnej ewolucji dla pseudomodów można powtórzyć rozumowanie z [24], odtworzyć wzór na korelacje i uzyskać równanie Lindblada postaci

$$i\hbar \partial_t \hat{\rho}(t) = [\hat{\rho}(t), \hat{H}'] - \frac{i\Delta}{2} \{ \hat{\rho}(t), |k_0\rangle \langle k_0| \} - \frac{i\hbar\lambda}{2} (\{ |\Omega\rangle \langle \Omega|, \hat{\rho}(t) \} - 2 |\Omega\rangle \langle \Omega| \rho_{00}(t)), \quad (34)$$

gdzie $\rho_{00}(t) = \langle \Omega | \hat{\rho}(t) | \Omega \rangle$. W dodatku C pokazano, że tak jest istotnie – przy traktowaniu t_2 jako chwili w której pomiar ciągły został zakończony. Czy ten warunek jest konieczny, na szczęście nie jest ważne dla obliczeń z wykorzystaniem pseudomodów, które przy nałożonym wyżej ograniczeniu odtwarzają wyniki zgodne z oryginalną teorią [24].

Sekcja ta jest uporządkowana następująco: wpiery jest dyskusja rozwiązań zanikowych typu $\hat{\rho}(t) = e^{-Rt} \hat{\rho}(0)$ równania (34) Dalej przedstawione są obliczenia prowadzące do wartości oczekiwanych i korelacji.

5.3.1 Rozwiązania zanikowe równania Lindblada

Jeśli przyjąć rozwiązanie postaci $\hat{\rho}(t) = e^{-Rt} \hat{\rho}$

$$R[R - (\Delta/\hbar)][R - (\Delta/2\hbar) - (\lambda/2)]^2 + k_0^2 R[R - (\Delta/\hbar)] + 4\gamma[R - (\Delta/2\hbar)][R - (\Delta/2\hbar) - (\lambda/2)] = 0, \quad (35)$$

z kolei w przypadku symetrycznym $k_0 = 0$

$$R[R - (\Delta/\hbar)][R - (\Delta/2\hbar) - (\lambda/2)] + 4\gamma[R - (\Delta/2\hbar)] = 0, \quad (36)$$

tzn. rozwiązanie $R = \Delta/2\hbar + \lambda/\hbar$ równania (35) przy $k_0 \rightarrow 0$ nie jest już fizycznym rozwiązaniem. Oba równania (35) i (36) wyprowadzone są w dodatku F.2 do niniejszego rozdziału. Z (36) wynika, że dla $k_0 = 0$ istnieją trzy niezależne rozwiązania postaci wykładniczej. Tymczasem ogólny stan początkowy macierzy gęstości dla dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta scharakteryzowany jest przez 4 niezależne stałe. Oznacza to, że brakuje jednego niezależnego

rozwiązania równań Lindblada w niniejszej dyskusji, i że to rozwiązanie nie jest postaci wykładniczej. To rozwiązanie nie jest jednak potrzebne w niniejszej rozprawie, jest ono pokrótce omówione na końcu dodatku F.2.

Równanie wielomianowe trzeciego rzędu z rzeczywistymi współczynnikami ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Wykażę, że w związku z tym równanie (36) przewiduje w badanym zakresie parametrów ($\gamma < \Delta^2/4\hbar^2$) stan Fermiego, tj. stan o rzeczywistym wykładniku R , który jest najmniejszym wykładnikiem (jeśli porównywać części rzeczywiste). Na potrzeby dowodu wprowadzę oznaczenia:

$$L = -r + \frac{\Delta}{2\hbar} \quad (37)$$

Z użyciem tych wyrażeń równanie (36) przechodzi na:

$$-4\gamma L - (L^2 - \Delta^2/4\hbar^2)(L + \lambda/2) = 0. \quad (38)$$

Niech r będzie rzeczywistym rozwiązaniem tego równania, które można znowu przepisać, tym razem do postaci:

$$4\gamma = \left(\frac{\lambda}{2r} + 1 \right) (\Delta^2/4\hbar^2 - r^2). \quad (39)$$

Dla $r \in [0, \Delta/2\hbar]$ RHS powyższego równania jest funkcją ciągłą przechodzącą od 0 dla $r \rightarrow \Delta/2\hbar$ do ∞ dla $r \rightarrow 0$. Równanie to ma zatem rozwiązanie leżące w zakresie $r \in [0, \Delta/2\hbar]$ dla dowolnej wartości γ . Przyjmuję, że r jest właśnie takim rozwiązaniem. Traktując (39) jako wyrażenie na γ od r i λ , można podstawić (39) do (38):

$$\left(L^2 + L(r + \lambda/2) + \frac{\lambda\Delta^2}{8r\hbar^2} \right) \cdot (L - r) = 0. \quad (40)$$

Rozwiązaniami zawartego tu równania kwadratowego są

$$L_{\pm} = \frac{1}{2} \left(-r - \frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{(r + \lambda/2)^2 - \frac{\gamma\Delta^2}{4r\hbar^2}} \right), \quad (41)$$

skąd wynika, że ze względu na to, że $r > 0$:

$$\text{Re } L_{\pm} \leq \frac{1}{2} \left(-r - g + \sqrt{|g + r|^2} \right) = 0. \quad (42)$$

Zatem $r \geq L_{\pm}$, skąd odpowiadające mu $R = \frac{\Delta}{2\hbar}(1 - r)$ jest mniejsze od pozostałych wykładników.

Dla przypadku $r = \frac{\Delta}{2\hbar}$ zachodzi $R_{fgr} = 0$, a więc ewolucja stanu Fermiego zostaje zatrzymana. Dzieje się to dla $\gamma = 0$, a więc kiedy brak zaniku wskutek braku oddziaływania, ale również gdy $\lambda \rightarrow \infty$ w taki sposób, że (39) pozostaje spełnione. To przejście graniczne odnosi się do bardzo silnych pomiarów, stąd sygnalizuje tu efekt (bądź paradoks) Zenona.

5.3.2 Zachowanie rezonansowe wskutek oddziaływania z detektorem

Współczynnik γ traktować będę jako mały w porównaniu z pozostałymi. Wtedy rozwiązania do równania ogólnego (35) będą poprawkami do rozwiązań tego równania dla $\gamma = 0$:

$$0, \Delta/\hbar, \Delta/2\hbar + \lambda/2 + ik_0, \Delta/2\hbar + \lambda/2 - ik_0. \quad (43)$$

Jednak nie zawsze wystarczy określenie γ jako małej. Można się o tym przekonać, znajdując poprawkę do pierwszej potęgi γ np. dla $\Delta/2\hbar$:

$$R \simeq \frac{\Delta}{2\hbar} + \frac{4\gamma(\lambda - \Delta/\hbar)}{(\lambda - \Delta/\hbar)^2 + 4k_0^2}. \quad (44)$$

Mianownik w drugim wyrażeniu może być małą wielkością rzędu γ dla pewnych parametrów, a wtedy to wyrażenie nie jest małe. Jeśli zresztą w wyrażeniu (35) położyć $\lambda = \Delta/\hbar$, uzyskuje się możliwe rozwiązania: $R = 0$ (które nie jest fizyczne) oraz rozwiązania równania trzeciego stopnia:

$$[R - (\Delta/\hbar)] \cdot [R^2 + k_0^2] + 4\gamma[R - (\Delta/2\hbar)] = 0. \quad (45)$$

Stosując i tym razem rozwinięcie w małych γ , uzyskuje się poprawki do rozwiązań $\Delta/\hbar$, ik_0 , $-ik_0$. Z racji podobieństwa tej redukcji do redukcji równania (35) do postaci (36), będę i to zachowanie nazywał rezonansowym. Przy parametrach układu ustalonych, jest ono wywoływane odpowiednim dopasowaniem sprzężenia z detektorem λ do parametru Δ .

Dla przypadku $k = 0$ w przestrzeni parametrów Δ , λ , γ linia $\lambda = \Delta$ wypada w obszarze, w którym wyróżnik wielomianu z (36) jest dodatni, tj. istnieją dwa zespolone sprzężone ze sobą rozwiązania równania (36). Wskutek tego w stanie fizycznym będącym złożeniem stanów zanikowych znajduje się oprócz stanu Fermiego także człon oscylujący tłumiony. Cały ten obszar nazywać będę obszarem rezonansowym. Jest on wyznaczony przez warunek $\Delta > 0$, gdzie Δ to wyróżnik wielomianu z (36):

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3, \quad p = -\frac{1}{4}\Delta^2/\hbar^2 - \frac{1}{12}\lambda^2 + 4\gamma, \quad q = \frac{\lambda}{12} \left(\Delta^2/\hbar^2 - \left(\frac{\lambda}{3}\right)^2 + 8\gamma \right). \quad (46)$$

Poza obszarem rezonansu rozwiązania równania są rzeczywiste.

Na rys. 10 przedstawione są wartości wykładników (tzn. ich części rzeczywiste) dla wszystkich stanów zanikowych. Zgodnie z obserwacjami z 5.3.1, wykładnik stanu Fermiego jest (dużo) mniejszy od części rzeczywistych pozostałych wykładników. Oprócz tego wykresy dla pozostałych wykładników charakteryzują się pewnym podobieństwem do odpowiednich wyrażeń (43) (dla $k_0 = 0$). Należy także odnotować obecność obszaru rezonansu z detektorem. W celu zmniejszenia zaburzenia ewolucji wprowadzonego przez detektor, parametr sprzężenia powinien leżeć poza tym obszarem. Z powodu wprowadzenia oscylacji, zaburzenie wprowadzane przez rezonans z detektorem różni się zasadniczo od zaburzenia dla bardzo silnych pomiarów.

Z kolei na rys. 11 zilustrowane jest zachowanie stanu Fermiego dla niezerowego k_0 . Klasyfikacja różnego rodzaju zachowania się rozwiązania pod wpływem detektora można tu oprzeć, oprócz wyróżnika, na innych funkcjach parametrów wielomianu [59]

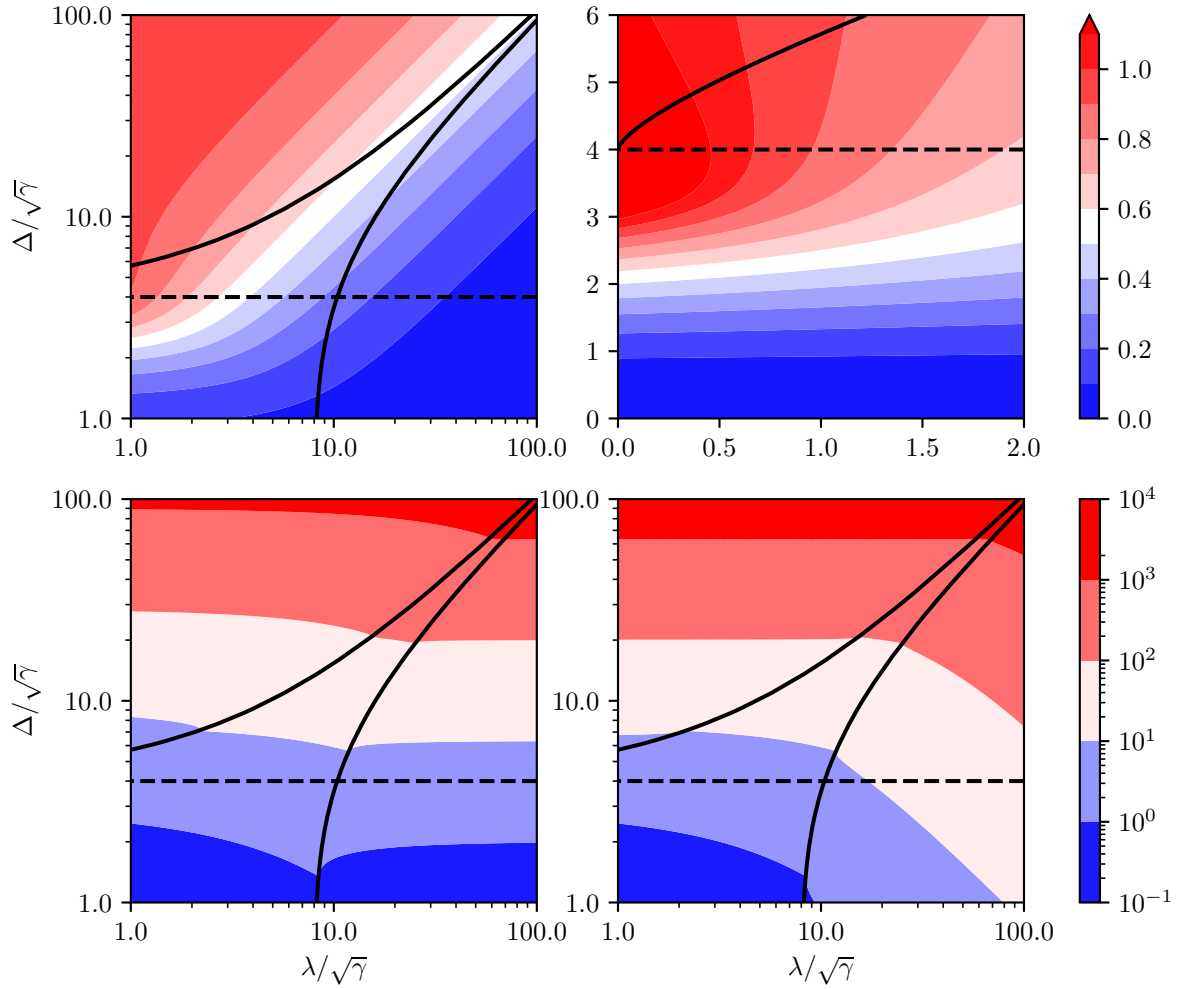
5.3.3 Korelacje

Niech macierz gęstości $\hat{\rho}(t)$ zadana będzie w czasie równaniami Lindblada i warunkiem $\hat{\rho}(0) = \hat{O} = |\Omega\rangle\langle\Omega|$. Macierz gęstości w chwili t_2 można zapisać jako:

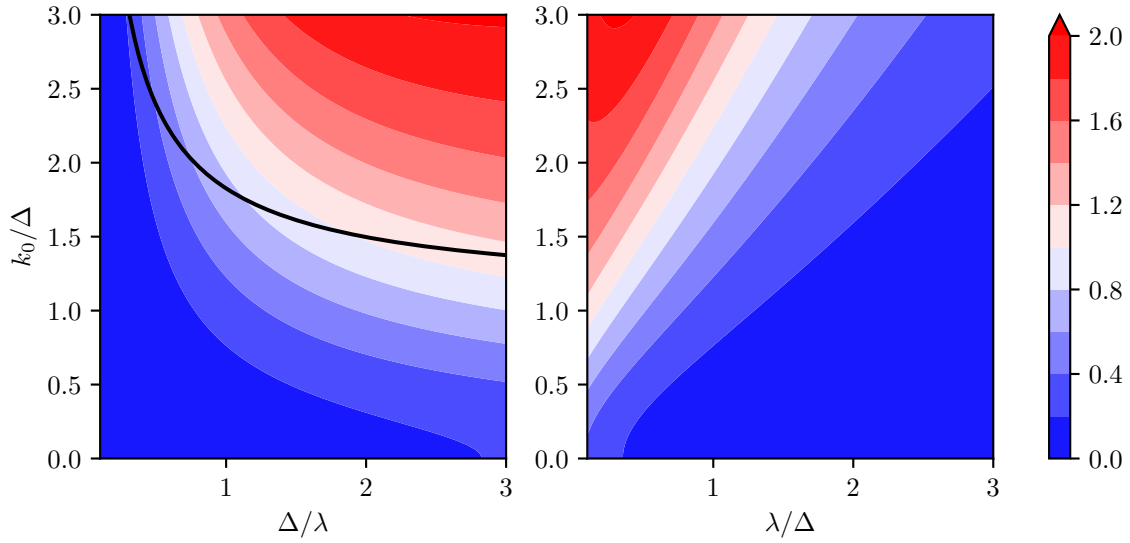
$$\hat{\rho}(t_2) = \hat{\rho}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} d\tau \partial_\tau \hat{\rho}. \quad (47)$$

Z kolei niech macierz gęstości $\hat{\rho}'(t)$ zadana będzie warunkiem $\hat{\rho}'(t_1) = \{\hat{o}, \hat{\rho}(t_1)\}/2$. Także i ona spełnia równania Lindblada. Co więcej, macierz postaci

$$\hat{\rho}''(t_2) = \hat{\rho}'(t_2) - \frac{1}{2}\hat{\rho}(t_2) - \frac{1}{2}\langle o(t_1) \rangle_q \hat{\rho}(t_2 - t_1) \quad (48)$$



RYSUNEK 10: Części rzeczywiste wykładników stanów zanikowych, podzielone przez R_{fgr} : dla stanu Fermiego na górze i dla dwóch pozostałych stanów zanikowych na dole. Dolne wykresy w skali logarytmicznej. Skale po prawej stosują się do obu wykresów w danym rzędzie. Wartości wykładników podzielone są przez $\sqrt{\gamma}$. Pomiedzy czarnymi liniami znajduje się obszar rezonansowy wskutek oddziaływania z detektorem. Na dolnych wykresach wykładniki są takie same dla parametrów z obszaru rezonansowego. Poniżej linii kreskowanej zachodzą tłumione oscylacje Raabego.



RYSUNEK 11: Stosunek R/R_{fgr} dla stanu Fermiego przy $\Delta = 10\sqrt{\gamma}$, wykreślone dla parametrów k_0 oraz $1/\lambda$ (po lewej) oraz λ (po prawej). Wyróżnik wielomianu ma wszędzie ten sam znak, i dla tych parametrów nie obserwuje się zachowań wskazujących na szczególne oddziaływanie z detektorem. Oprócz wyróżnika, do klasyfikacji różnych faz potrzebne byłyby też współczynniki wielomianu (35) w postaci zredukowanej: $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$, gdzie $x = R - 1/4$.

także będzie spełniać równania Lindblada, będzie zadana warunkiem początkowym:

$$\hat{\rho}''(t_1) = -\frac{1}{2}\rho_{11}(t_1) |k_0\rangle \langle k_0|, \quad (49)$$

wreszcie, będzie spełniać równanie:

$$\langle o(t_1)o(t_2) \rangle_q - \langle o(t_2) \rangle_q = \rho_{00}''(t_2) - \frac{1}{2} \langle o(t_2) \rangle + \frac{1}{2} \langle o(t_1) \rangle_q \langle o(t_2 - t_1) \rangle_q, \quad (50)$$

gdzie wprowadziłem oznaczenia na elementy macierzowe: $A_{00} = \langle \Omega | \hat{A} | \Omega \rangle$, $A_{11} = \langle k_0 | \hat{A} | k_0 \rangle$ i tp. Pozostaje rozwiązać równania Lindblada dla $\hat{\rho}$ i $\hat{\rho}''$, przy czym warunki początkowe są znacznie uproszczone. W dodatku F.3 pokazuję, że przy warunkach początkowych $\rho_{00}(0) = x_i$, $\rho_{01}(0) = \rho_{10}(0) = \rho_{11}(0) = 0$ obowiązuje, po transformacji Laplace'a:

$$\bar{\rho}_{00}(s) = \frac{x_i}{s} + \frac{2\gamma x_i (s + \Delta/\hbar)(s + \Delta/2\hbar + \lambda/2)}{sW(s)} \quad (51)$$

oraz

$$\bar{\rho}_{11}(s) = -\frac{2\gamma x_i (s + \Delta/2\hbar + \lambda/2)}{W(s)}, \quad (52)$$

gdzie

$$W(s) \equiv s(s + \Delta/\hbar)(s + \Delta/2\hbar + \lambda/2)^2 + k_0^2 s(s + \Delta/\hbar) + 2\gamma(2s + \Delta/\hbar)(s + \Delta/2\hbar + \lambda/2). \quad (53)$$

Funkcja $W(-R)$ jest naturalnie równa LHS równania (35). Z kolei przy warunkach początkowych $\rho''_{11}(0) = x_i$, $\rho''_{01}(0) = \rho''_{10}(0) = \rho''_{00}(0) = 0$ łatwo już stwierdzić, że wynikiem będzie

$$\bar{\rho}''_{00}(s) = -\frac{2\gamma x'_i(s + \Delta/2\hbar + \lambda/2)}{W(s)}, \quad (54)$$

przy czym x'_i zadane jest przez $-\frac{1}{2}\rho_{11}(t_1)$. Tym samym poszukiwane wielkości to

$$\langle o(t) \rangle_q = 1 - \frac{2\gamma}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{c-iT}^{c+iT} ds e^{st} \frac{(s + \Delta/\hbar)(s + \Delta/2\hbar + \lambda/2)}{sW(s)} \quad (55)$$

oraz

$$\begin{aligned} \langle o(t_2)o(t_1) \rangle - \langle o(t_2) \rangle &= \\ -\frac{2\gamma^2}{(2\pi i)^2} \lim_{T_1, T_2 \rightarrow \infty} \int_{c-iT_1}^{c+iT_1} ds_1 \int_{c-iT_2}^{c+iT_2} ds_2 e^{s_1 t_1} e^{s_2(t_2-t_1)} \frac{s_1 + \Delta/2\hbar + \lambda/2}{W(s_1)} \cdot \frac{s_2 + \Delta/2\hbar + \lambda/2}{W(s_2)} \\ -\frac{1}{2} \langle o(t_2) \rangle + \frac{1}{2} \langle o(t_1) \rangle_q \langle o(t_2 - t_1) \rangle_q. \end{aligned} \quad (56)$$

Z postaci tych funkcji oraz poprzedniej dyskusji równań (35) i (36) widać, że rozwiązania będą superpozycją eksponentów z wykładnikami będącymi rozwiązaniami (35) i (36). Okaze się, że biegun $s = 0$ w wyrażeniu na $\langle o(t_2 - t_1) \rangle_q$ odpowiada za wyraz, który skraca się ze stałą:

$$\langle o(t) \rangle_q = -2\gamma \sum_{-z \in \{R\}} \text{Res}_{s=z} e^{st} \frac{(s + \Delta/\hbar)(s + \Delta/2\hbar + \lambda/2)}{sW(s)}, \quad (57)$$

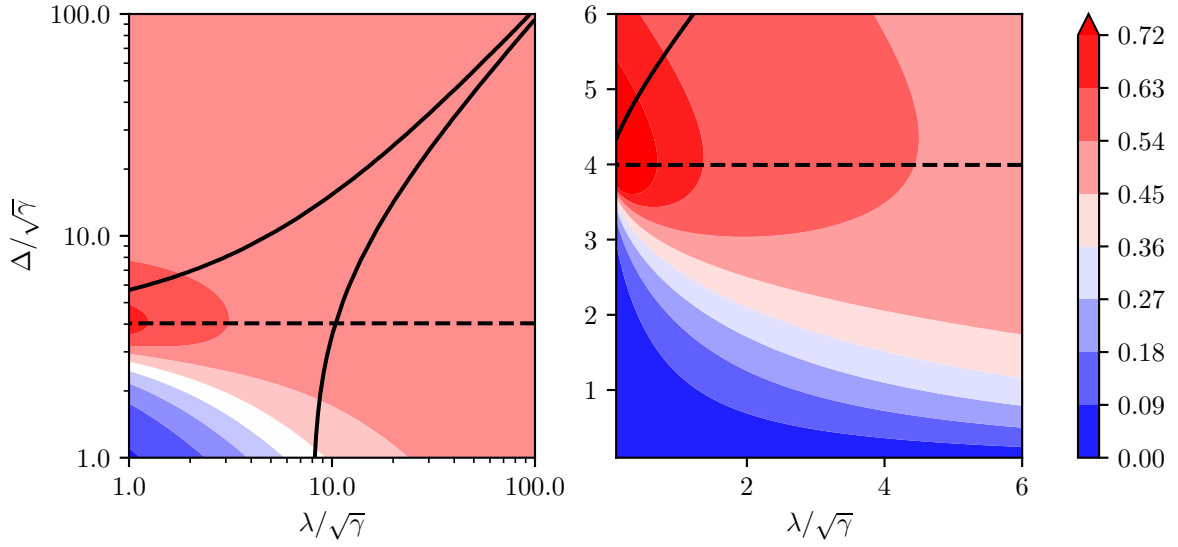
gdzie $\{R\}$ stanowi zbiór uprzednio dyskutowanych wykładników. Dla długich czasów wystarczy uwzględnić tylko stan Fermiego. Zatem dla długiego czasu t_1 , w konsekwencji długiego czasu $t_2 > t_1$, ale dowolnej różnicy $t_2 - t_1$:

$$\begin{aligned} \langle o(t_2) \rangle_q &= 2\gamma e^{-R_0 t_2} \frac{(R_0 - \Delta/\hbar)(R_0 - \Delta/2\hbar - \lambda/2)}{R_0 w(-R_0)}, \\ \langle o(t_2)o(t_1) \rangle / \langle o(t_2) \rangle - 1 &= -\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow 0} \int_{c-iT}^{c+iT} ds e^{(s+R_0)(t_2-t_1)} \\ &\quad \times \left(\frac{R_0(s + \Delta/2\hbar + \lambda/2)}{(R_0 - \Delta/\hbar)W(s)} - \frac{(s + \Delta/\hbar)(s + \Delta/2\hbar + \lambda/2)}{sW(s)} \right) \end{aligned} \quad (58)$$

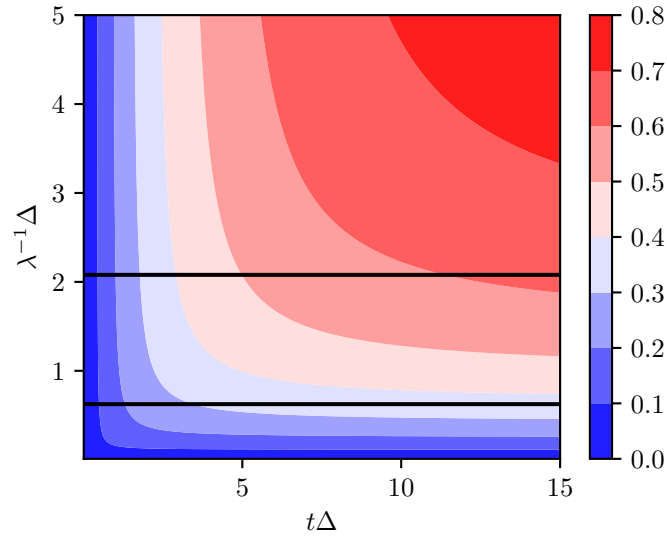
gdzie przez R_0 oznaczyłem wykładnik stanu Fermiego, zaś $w(s) \equiv W(s)/(s + R_0)$. Jeśli także czas $t_2 - t_1$ jest długi:

$$\langle o(t_2)o(t_1) \rangle / \langle o(t_2) \rangle - 1 = \gamma \frac{R_0 - \Delta/2\hbar - \lambda/2}{w(-R_0)} \left(\frac{R_0 - \Delta/\hbar}{R_0} - \frac{R_0}{R_0 - \Delta/\hbar} \right). \quad (59)$$

Ostatni wzór dla przypadku symetrycznego przedstawiono na rys. 12. Z kolei na rys. 13 przedstawiono zależność wykładnika w $\langle o(t) \rangle$. Rysunek ten ilustruje interpretację czynnika $1/\lambda$ jako czasu reakcji.



RYSUNEK 12: $k_0 = 0$, $\langle o(t_1)o(t_2) \rangle_q / \langle o(t_2) \rangle_q - 1$ dla $t_1, t_2 - t_1 \rightarrow \infty$. Pomiedzy czarnymi liniami znajduje się obszar rezonansu z detektorem. Poniżej linii przerywanej jest obszar tłumionych oscylacji własnych układu obserwowanego.



RYSUNEK 13: Wartość $-\log[\langle o(t) \rangle_q / (R_{fgr} \cdot t)]$ przy $\Delta = 10\sqrt{\gamma}$. Obszar rezonansowy znajduje się pomiędzy czarnymi liniami, lecz w tym zakresie parametrów rezonans z detektorem nie wpływa istotnie na postać rozwiązań. Dla danego λ wykres pozwala wskazać też moment, w którym zanik robi się czysto wykładniczy. Warunek na to dla małych $1/\lambda$ jest postaci w przybliżeniu $\lambda t = \text{const}$. Pewna symetria pomiędzy zależnościami od $1/\lambda$ i t wskazuje na interpretację $1/\lambda$ jako czasu reakcji detektora. Postać wykresu jest w reżimie małych γ mało wrażliwa na zmiany γ .

Rozdział 6

Wnioski i podsumowanie

Poniżej przedstawiam wnioski dotyczące różnych kryteriów na ZE / AZE, jak również propozycje dalszych badań.

6.1 Kryteria na ZE i AZE

Jeśli nie istotna jest obserwacja skoków czasowych, to dla układów z dostatecznie płaskim czynnikiem $|V(k)|^2$, dla których obowiązuje FGR, wartość oczekiwana operatora rzutu na stan pierwotny jest wygodnym narzędziem do obserwacji ZE i AZE – aczkolwiek AZE jest tutaj nieco rzadszym zjawiskiem. Podane rezultaty mogą posłużyć albo za alternatywne podejście do zagadnienia ZE / AZE, albo za pomoc w badaniu nieidealnych obserwacji skoków kwantowych.

Bardzo użyteczna w tym kontekście okazuje się technika pseudomodów, tj. pewnych transformacji przeprowadzanych na przestrzeni Hilberta rezerwuaru. Prowadzi ona do ścisłych wyników w tym kontekście, i daje się uogólnić na bardziej skomplikowane przypadki. Natomiast stosowane metody raczej trudno zastosować dla np. stochastycznie wariowanego czasu pomiędzy pomiarami.

Pokazano także, że wartości słabe pewnych pomiarów są powiązane z efektami ZE/AZE, tj. umożliwiając wykrycie, czy w danym układzie możliwa jest obserwacja AZE, czy nie.

Wzór (4.41), a konkretnie wyrażenie

$$R_{fgr,\lambda} = \frac{2}{\hbar} \int dq \frac{\lambda |V(q)|^2}{q^2 + \lambda^2} \quad (1)$$

jest odpowiednikiem wzoru (1.33):

$$R(\tau) = \tau \int dk |V(k)|^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{kt}{2} \right). \quad (2)$$

Na podstawie przekrywania się dwóch funkcji podcałkowych można w obu przypadkach ocenić zachowanie się tych wykładników wraz ze zmianą częstości lub siły pomiaru. Taka analiza została dla (1.10) przeprowadzona w [36]. Poniższa analiza dla pomiaru ciągłego będzie jej powtórzeniem, przy zastąpieniu częstości $1/\tau$ przez λ . Tak samo jak tam, przyjmę, że czynnik $|V(k)|^2$ ma wyróżnione maksimum, przesunięte o $\hbar k_0$ od poziomu energetycznego stanu podstawowego. Szerokość czynnika oznaczam przez Δ . Wtedy gdy $\lambda \gg \Delta$, k_0 , czynnik $F(q, \lambda) \equiv \lambda/(q^2 + \lambda^2)$ pod całką w (4.41) jest raczej płaski w porównaniu z $|V(k)|^2$. Wraz ze wzrostem λ robi się jeszcze bardziej płaski a jego wysokość spada. Zatem maleje wtedy wzajemne przekrycie $F(q, \lambda)$ i $|V(k)|^2$. Z kolei gdy $\lambda \ll k_0$, czynnik $F(q, \lambda)$ jest skoncentrowany po jednej stronie maksimum $|V(k)|^2$ i wraz ze wzrostem λ przekrywa coraz większą część zbocza $|V(k)|^2$. Jeśli wreszcie λ maleje, to $F(q, \lambda)$ zbiega do delty Diraca i odtworzona jest FGR. Widać, że opisana tu zmienność $R_{fgr,\lambda}$ wraz z λ odtwarza przykładowy przebieg

z prawego wykresu na rys. 1 gdyby zastąpić tam τ przez $1/\lambda$ (jeśli k_0 jest bliskie zera, odwzorowany jest lewy wykres z tego rysunku). Należy dodać, że podana modyfikacja $R_{fg,\lambda}$ jest zgodna z innymi modelami pomiaru [22]. Możliwe jest uzyskanie dalszych poprawek ze wzoru (4.39).

Dla czynnika lorentzowskiego symetrycznego przeprowadzono szczegółową demonstrację różnych kryteriów. W porównaniu 10 z wykresami 3 i 6 zwraca przede wszystkim uwagę zachowanie się w obszarze oscylacji tłumionych dla niskich częstości, czyli poza obszarem obserwacji ZE/AZE. Przejście do tego obszaru jest w przypadku pomiarów ciągłych i wartości oczekiwanej dla pomiarów rzutowych łagodne w porównaniu ze standardowym podejściem. Poza tym efekty ZE / AZE są jakościowo takie same, choć granice przejść fazowych są różne. Wyraźnie ilustruje tę różnicę porównanie rys. 11 dla niesymetrycznego czynnika lorentzowskiego z rys. 4 i 5.

Model pomiaru ciągłego przewiduje także zjawisko rezonansu z detektorem. Możliwość rezonansu trzeba brać pod uwagę gdy siła sprzężenia z detektorem jest rzędu odwrotności czasu skoku, $\tau_j^{-1} \simeq \Delta$ w przypadku symetrycznego czynnika lorentzowskiego. Jak jednak ilustruje rys. 13, wpływ rezonansu z detektorem nie jest istotny. Dzieje się tak na pewno wtedy, kiedy dominujący wkład w wartość oczekiwaną ma stan Fermiego. Wydaje się, że wartość oczekiwana rzutu w obecności pomiarów rzutowych nie przejawia takiego zachowania.

Dla długich czasów można z (4.41) odtworzyć warunek konieczny na AZE (1.9), tj:

$$Z_\lambda < 1. \quad (3)$$

Powtórzenie rozumowania ze wstępu z niewielkimi zmianami wystarcza za dowód (zwraca przy tej okazji uwagę symetria między zachowaniem się w t i w $1/\lambda$, zilustrowana na rys. 13). Jak zaobserwowano w rozdziale 3, dla małych wartości γ ten warunek może być zastąpiony przez

$$\text{Re } z_\lambda < 1. \quad (4)$$

Zatem ze znaku drugiej korelacji w (4.54) odczytać można, czy w układzie da się zaobserwować AZE. Zatem wnioskiem z rys. 12 jest to, że dla lorentzowskiego czynnika symetrycznego zachodzi w pomiarze ciągłym tylko ZE. Jest to spójne z powyższymi rozważaniami dla $R_{fg,\lambda}$.

Natomiast obecność czynnika Z_λ w (4.41) wiąże się z tym, że dla krótkich czasów wartość oczekiwana nie zanika wykładniczo. Dodatkowy czynnik do uwzględnienia opisuje wzór (4.43).

6.2 Możliwe kierunki dalszych badań

Oprócz zaradzenia brakom niniejszej analizy, wspomnianym wyżej, można zaproponować szereg systematycznych badań. W pierwszej kolejności, można zastosować metodę pomiarów ciągłych dla innych obserwabi niż operator rzutowy na stan początkowy. W szczególności, można rozważyć nietrywialny pomiar pośredni, tj. obserwabi zdefiniowanej dla rezerwuaru, będącej rzutem tylko na część jego przestrzeni Hilberta, lub niebędącej rzutem. Formalnie rzecz biorąc stosowany opis teoretyczny zastosować można i do pomiaru pośredniego, ale tylko przy pełnej kontroli stanu rezerwuaru [22], co jest często wątpliwym fizycznie założeniem. By móc sformułować problem jak tu, z użyciem obserwabi działających na przestrzeni obserwowanego układu, należy się raczej odwołać do kontroli, jaką daje pomiar bezpośredni.

Niedawna praca o ZE bez przybliżenia RWA [31] daje asumpt do tego, by i w tym opisie to przybliżenie zarzucić. W tym kontekście, istnieje solidna teoria oddziaływania układów dwupoziomowych traktowanych nierelatywistycznie z polem elektromagnetycznym opisywanym w ramach kwantowej teorii pola [57]. Pierwszym krokiem mogłoby być tu przeprowadzenie niniejszej analizy w ramach RWA dla wyprowadzonych w [57] czynników formy (którym tu

odpowiada czynnik $|V(k)|^2$). Innym sensownym uogólnieniem problemu byłoby przyjęcie rezerwuaru w stanie termicznym; można to zagadnienie rozważyć w powiązaniu z wyjściem poza RWA [60].

W tej rozprawie trzymałem się konsekwentnie tezy, że ZE i AZE jako efekty kwantowe można zdefiniować przez odwołanie się do wartości oczekiwanych i korelacji. Jedną z ważniejszych zalet tej tezy było uproszczenie problemu. Można jednak postawić pytanie, czy da się zastosować podejście oryginalne, tj. definicję na bazie prawdopodobieństwa ciągu pozytywnych wyników. W tym kontekście zresztą możliwe byłoby powiedzenie czegoś o skokach kwantowych tudzież ich braku. Z racji, że wynikiem pomiaru jest wartość ciągła, za wynik pozytywny ciągłej obserwacji stanu pierwotnego należałoby uznać pozostawanie w pewnych granicach wokół wartości $a = 1$. W kontekście skoków kwantowych należałoby też dyskutować analogiczne prawdopodobieństwo dla układu około wartości $a = 0$, przy czym by móc sensownie mówić o skokach kwantowych w rozumieniu Nielsa Bohra, granice dla wartości a powinny być dosyć wąskie, a całkowite prawdopodobieństwo różnych wyników powinno w większości skupiać się w tych dwóch wyrażeniach. Należy dodać, że pojawiający się wszędzie superoperator $\check{O}(\cdot) = (\hat{O}(\cdot) + (\cdot)\hat{O})/2$ ma trzy wartości własne: 0, 1 i $1/2$. To może oznaczać, że standardowo rozumianych skoków kwantowych nie będzie się dało zaobserwować, lub też że wskutek oddziaływania z detektorem będzie efektywnie istniał jeszcze trzeci stan przejściowy.

Proponuję dwa podejścia do problemu znajdowania prawdopodobieństw. Po pierwsze, można dystrybucję postaci np: $\theta(a - (1 - \Delta a))\theta(1 + \Delta a - a)$ wyrazić jako szereg zbieżny, a następnie obliczyć kilka początkowych wyrazów na bazie korelacji coraz wyższych rzędów. Tym sposobem dałoby się potencjalnie uzyskać przybliżenia prawdopodobieństw w dowolnie dobrym przybliżeniu. To podejście wymaga naturalnej kontynuacji rachunków tu zaczętych i w pełni wykorzystuje wyprowadzone dla pomiaru ciągłego równanie Lindblada. Alternatywnie, można zrezygnować z równania Lindblada i próbować wyprowadzić poszukiwane prawdopodobieństwa bezpośrednio. Być może inne techniki rachunkowe byłyby tu użyteczne. W szczególności, zależności wyrażen w rozdziale 4 od funkcji falowej układu ewoluującego niehermitowsko sugerują, że może pewną rolę grałyby zależności od propagatorów dla takich układów. Próbowałem taką analizę z wykorzystaniem metod opartych na propagatorach przeprowadzić; jest jednak ona obecnie wciąż w stanie załóżkowym, a być może to nie jest rozsądne podejście.

Wreszcie, być może poza związkiem z wartościami słabymi, efekt Zenona ma także związek z innymi zjawiskami kwantowymi, i to w znaczeniu węższym. Analiza wyższych korelacji mogłaby coś w tej kwestii ujawnić.

Dodatki

Rozdział A

Złota Reguła Fermiego

Spis treści

A.1	Rozwiązania zanikowe równania Schrödingera	62
A.2	Inne rozwiązania równań	63
A.3	Stan Fermiego	63
A.3.1	Jednoznaczność stanu Fermiego	64
A.3.2	Poprawki do FGR	64

Dodatek ten poświęcony jest wyprowadzeniu stosowanej postaci FGR. Wpierw dowodzę (1.34) z (1.14) i (1.33). Posiłkując się transformatą Fouriera:

$$\bar{G}(z) = \int dk |V(k)|^2 e^{ikz}, \quad |V(k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int dz \bar{G}(z) e^{-ikz}, \quad (1)$$

mogę przepisać ostatnie ze wspomnianych równań:

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int dz \bar{G}(z) t^2 \int dk e^{-ikz} \text{sinc}^2\left(\frac{kt}{2}\right). \quad (2)$$

TF dla sinc^2 jest funkcją trójkątną:

$$p(t) = t \int_{-t}^t dz G(z) \left(1 - \frac{|z|}{t}\right). \quad (3)$$

Rozdzielając te wyrażenia na dwie całki, wykonując przejście graniczne $t \rightarrow \infty$ i odwołując się do (1.14), uzyskuję

$$-R_{fgr} t = -t \int_{-\infty}^{\infty} dz G(z) = -t \cdot 2\pi |V(0)|^2 \quad (4)$$

oraz

$$Z_{fgr} = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} dz G(z) |z| = 1 + \int dk \int dz |V(k)|^2 |z| e^{ikz}, \quad (5)$$

co było do wykazania. Dla pełnego dowodu, pozostaje uzasadnić postać asymptotyczną z (1.14). Wyprowadzenie poniżej stosuje tę samą metodę co rozdział 4, lecz przypadek jest dużo prostszy (stan czysty). Z pomocą tego rozwiązania uzasadniona będzie postać asymptotyczna oraz znalezione będą poprawki wyższych rzędów do wzorów (1.34).

A.1 Rozwiązania zanikowe równania Schrödingera

Równanie (1.30) po dokonaniu transformaty Laplace'a, przy warunku początkowym $\psi_0(t=0)=1$, $\psi(x,t=0)=0$ ma postać:

$$i\hbar s\tilde{\psi}_0(s) = i\hbar + \int \bar{V}^*(x)\tilde{\psi}(x,s)dx, \quad i\hbar s\tilde{\psi}(x,s) = -i\hbar\partial_x\psi(x,t) + \bar{V}(x)\tilde{\psi}_0(s). \quad (6)$$

Zmienne x i s można odseparować, proponując rozwiązanie $\tilde{\psi}(x,s) = \psi(x)e^{-xs}\tilde{\psi}_0(s)$. Wtedy, po zmienieniu oznaczeń $s = -i\omega$, drugie równanie przechodzi na:

$$\hbar\omega\psi(x) = -i\hbar\partial_x\psi(x) + \bar{V}(x), \quad (7)$$

czego formalnie unormowanym rozwiązaniem jest

$$\psi(x) = \frac{1}{i\hbar} \int dy \theta(x-y) \bar{V}(y) e^{i(\omega+i\epsilon)(x-y)}, \quad (8)$$

przy czym przez ϵ oznaczam infinitezymalną dodatnią wielkość ($\epsilon \rightarrow 0_+$). Stąd też bieguny funkcji $\tilde{\psi}_0(-i\omega)$ wyznacza się z warunku:

$$\omega = \frac{1}{i\hbar^2} \int dx \int dy \theta(x-y) \bar{V}^*(x) \bar{V}(y) e^{i(\omega+i\epsilon)(x-y)}. \quad (9)$$

Rozwiązania są zespolone. Można się o tym przekonać, korzystając z transformaty Fouriera. Po podstawieniu $x = y + z$ i zastosowaniu TF równanie (9) przybiera postać

$$i\hbar^2\omega = \int V^*(q) e^{-iq(y+z)} V(k) e^{iky} e^{i(\omega+i\epsilon)z} \theta(z) dz dy dk dq = 2\pi \int |V(k)|^2 e^{iz(\omega-k+i\epsilon)} \theta(z) dz dk. \quad (10)$$

Jeśli ω będąca rozwiązaniem byłaby rzeczywista (bądź miała część urojoną dodatnią), można całkowanie po z wykonać:

$$\hbar^2\omega = 2\pi \int dk \frac{|V(k)|^2}{\omega - k + i\epsilon}. \quad (11)$$

Korzystając z relacji $(x+i\epsilon)^{-1} \rightarrow \text{p.v. } x^{-1} - i\delta(x)$, uzyskuje się po prawej stronie ujemną część urojoną. Stąd ω będąca rozwiązaniem nie może być rzeczywista i musi być $\text{Im } \omega < 0$. Po podstawieniu takiego przypadku do równania (8), uzyskuje się rozwiązanie dążące do nieskończoności wraz z rosnącym x . Z kolei $\psi_0(t)$ maleje wykładniczo.

W tej sytuacji także przejście od (10) do (11) jest niepoprawne. W równaniu (10) całka po z jest rozbieżna, i powinna być wykonana ostatnia. Jednakże, stosując formalne rozwinięcie

$$e^{iz(\omega-k)} \theta(z) \rightarrow e^{-ikz-\epsilon z} \theta(z) + i\omega z e^{-ikz-\epsilon z} \theta(z) + \dots, \quad (12)$$

uzyskuje się w równaniu (10) taki sam szereg, co w przypadku rozwinięcia prawej strony (11) wokół $\omega = 0$. Stąd wartości ω uzyskane z równania (10) będą takie same co z równania (11).

Do pierwszego z równań (6), można zastosować odwrotną transformatę Laplace'a, by uzyskać:

$$\psi_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \left(\omega - \frac{1}{i\hbar^2} \int dx \int dy \theta(x-y) \bar{V}^*(x) \bar{V}(y) e^{i(\omega+i\epsilon)(x-y)} \right)^{-1}. \quad (13)$$

A.2 Inne rozwiązania równań

Zgodnie z dotychczasową dyskusją, wyrażenie (13) posiada bieguny poniżej osi rzeczywistej. Z tej racji $\psi_0(t)$ jest zdefiniowane tylko dla $t > 0$. Można także skonstruować rozwiązania z biegunami po drugiej stronie osi zespolonej, i równanie mające bieguny rzeczywiste. Innym niż (8) rozwiązaniem (7) jest

$$\psi(x) = -\frac{1}{i\hbar} \int dy \theta(y-x) V(y) e^{i(\omega-i\epsilon)(x-y)}. \quad (14)$$

Tym razem równanie na ω to

$$i\hbar^2\omega = - \int dx \int dy \theta(y-x) V^*(x) V(y) e^{i\omega(x-y)}. \quad (15)$$

Po wykonaniu sprzężenia zespolonego obu stron okazuje się, że ω^* spełnia równanie (9). Wykonanie formalnej odwrotnej transformaty Laplace'a doprowadziłoby do stanu nieunormowanego, wybuchającego w czasie. Jeśli jednak wykonać całkowanie wzdłuż osi rzeczywistej, uzyskalibyśmy rozwiązanie niezerowe zanikające dla ujemnych czasów.

Można także wykorzystać sumę tych dwóch rozwiązań:

$$\psi(x) = \frac{1}{2i\hbar} \int dy \text{sign}(x-y) V(y) e^{i(\omega+i\text{sign}(x-y)\epsilon)(x-y)}, \quad (16)$$

gdzie $\text{sign}(z) = \theta(z) - \theta(-z)$. Dwa człony wynikające z rozpisania tej dystrybucji są swoimi sprzężeniami zespolonymi, i w efekcie ω obliczona na bazie tego równania byłaby rzeczywista. Wyznacza ona, jak łatwo to sprawdzić, energie własne Hamiltonianu.

A.3 Stan Fermiego

Rozwiązanie (13) po wykonaniu całki konturowej można zapisać jako:

$$\psi_0(t) = \sum_n z_n e^{-i\omega_n t}, \quad (17)$$

gdzie ω_n to rozwiązania równania (9). Przyjmuję teraz funkcję $\Sigma(\omega)$ jako wolno-zmienną w ω . Wiąże się to z przyjęciem, że owa funkcja jest 'szeroka' Czy tak jest istotnie w konkretnym przypadku, można odczytać z pochodnej $d\Sigma(\omega)/d\omega$. Niech

$$\sigma_n = \int dx \int dy \theta(x-y) \bar{V}^*(x) \bar{V}(y) \frac{i^n (x-y)^n}{i\hbar^2 n!}. \quad (18)$$

Te współczynniki uznane za małe prowadzą do przybliżenia $\Sigma(\omega) = \sigma_0 + \sigma_1\omega + \dots$. Stąd, w przybliżeniu liniowym:

$$\tilde{\psi}_0(\omega) = \frac{1}{\omega - \sigma_1\omega - \sigma_0} = \frac{1}{1 - \sigma_1} \frac{1}{\omega - \frac{\sigma_0/\hbar}{i\hbar - \sigma_1}}, \quad (19)$$

czyli

$$\omega_{fgr} = \frac{\sigma_0/\hbar}{i\hbar - \sigma_1}, \quad z_{fgr} = \frac{1}{1 - \sigma_1}, \quad (20)$$

co przy rozwinięciu w γ odtwarza równania (1.35). Są to jedyne ω i z z równania (1.34) w tym rozwinięciu. Rozwiązanie to w rozprawie nazywam stanem Fermiego, z tej racji, że

można uzyskać niehermitowskie rozwiązanie równań Schrödingera zanikające wykładniczo z tym wykładnikiem. W najniższym rzędzie γ odtwarzają one (1.34).

A.3.1 Jednoznaczność stanu Fermiego

Równanie $\omega - \Sigma(\omega) = 0$ w przybliżeniu kwadratowym

$$\sigma_2(\hbar\omega)^2 = (1 - \sigma_1)\hbar\omega - \sigma_0 \quad (21)$$

ma dwa rozwiązania:

$$\hbar\omega_{\pm} = \frac{1 - \sigma_1 \pm \sqrt{(1 - \sigma_1)^2 - 4\sigma_2\sigma_0}}{2\sigma_2}. \quad (22)$$

Dla małej siły oddziaływania ω_- odtwarza poprzedni wynik, natomiast drugie rozwiązanie zachowuje się jak

$$\hbar\omega_+ \simeq \frac{1}{\sigma_2} = -i\hbar / \int dx \int dy \theta(x-y) \bar{V}^*(x) \bar{V}(y) \frac{(x-y)^2}{2}. \quad (23)$$

Dla małych sił oddziaływania jest to duża wielkość, i nie można przyjąć, że $\Sigma(\omega_+)$ obliczona jako rozwinięcie wokół $\omega = 0$ jest w ogóle zbliżona do poprawnej wartości. Można jednak z tego rozważania wnioskować, że w drugim rzędzie rozwinięcia nie znajduje się żadnego innego stanu zanikowego o $\text{Im } \omega$ będącej małą wielkością. Zatem, także zgodnie z FGR, inne stany zanikowe są pomijalne dla długich czasów gdyby badać ich superpozycję. Stan o małym $\text{Im } \omega$ jest więc unikatowym stanem Fermiego.

A.3.2 Poprawki do FGR

Zgodnie z obserwacjami z poprzedniej sekcji, metoda stosowanych tu przybliżeń nie daje poprawnych wyników dla innych stanów zanikowych niż stany Fermiego. Ten sam problem stosuje się oczywiście do próby uzyskania współczynników z_n dla pozostałych stanów. W szczególności, w przybliżeniu kwadratowym z konieczności wychodzą dwa rozwiązania o $z_1 = -z_2$, czyli dla $t = 0$ przybliżenie przewidywałoby stan równy $z_1 + z_2 = 0$, co jest sprzeczne z przyjętymi warunkami początkowymi. Wciąż jednak można wykorzystać to przybliżenie do znalezienia poprawek do z i Z dla stanu Fermiego, gdyż zachowanie się funkcji:

$$A(\omega) = \frac{1}{i\hbar^2\omega - \sigma_0 - \sigma_1\hbar\omega - \sigma_2(\hbar\omega)^2} = -\frac{1}{\sigma_2\hbar^2} \frac{1}{(\omega - \omega_-)(\omega - \omega_+)} \quad (24)$$

jest w okolicy bieguna $\omega = \omega_-$ (czyli stanu Fermiego) w przybliżeniu właśnie takie jak we wzorze. Stąd

$$Z = \frac{2\pi i}{\sigma_2\hbar^2(\omega_- - \omega_+)} = -\frac{2\pi i}{\hbar\sqrt{(i\hbar - \sigma_1)^2 - 4\sigma_2\sigma_0}} \quad (25)$$

i td dla przybliżeń wyższych rzędów.

Rozdział B

Operatory Krausa dla pomiaru Gaussowskiego

Spis treści

B.1 Teoria pomiaru uogólnionego	65
B.2 Konstrukcja operatorów Krausa	66

Po zarysowaniu teorii pomiaru uogólnionego, wyprowadzam operator Krausa (1.17) wychodząc z opisu oddziaływania detektora z obserwowanym układem.

B.1 Teoria pomiaru uogólnionego

Pomiar rzutowy w mechanice kwantowej (PVM, od ang. *Projection-valued measure*) opisywany jest przez miarę zadaną przez zbiór afinicznych map z przestrzeni macierzy gęstości (reprezentujących stan obserwowanego układu) w przestrzeń rozkładów prawdopodobieństwa postaci [23, 61]:

$$p(a) = \text{Tr} \hat{\rho} \hat{P}_a, \quad (1)$$

gdzie $\hat{P}_a$ zadające poszczególne mapy spełniają:

$$\forall_{|x\rangle \in \mathcal{H}} \langle x | \hat{P} | x \rangle \geq 0, \quad \sum_a \hat{P}_a = \hat{1}, \quad \forall_{a,b} \hat{P}_a \hat{P}_b = \delta_{ab} \hat{P}_a. \quad (2)$$

Można te wyrażenia uogólnić dla ciągłego wskaźnika a i b . Ostatni warunek oznacza naturalnie, że operatory te są operatorami rzutowymi. Uogólnieniem PVM byłaby rezygnacja z tego ostatniego warunku. Pierwszy z warunków określa, że operatory są dodatnio określone, stąd możliwa do zadania miara jest w ogólności miarą z wartościami w dziedzinie operatorów dodatnio określonych (POVM, od ang. *Positive-operator-valued measure*). Taka definicja posłużyć może za ogólniejszą teorię pomiaru w mechanice kwantowej [61], co jednak uzupełnić trzeba o regułę, jak pomiar wpływa na stan układu $\hat{\rho}$. Z pewnością zmiana *a priori* operatora gęstości opisywana jest liniową mapą dodatnią z przestrzeni Hilberta w tę samą przestrzeń. Zgodnie z twierdzeniem Choi [62] lub, w przypadku nieskończonej liczby wymiarów, uogólnieniem twierdzenia Radona-Nikodyna [63] taką mapę można opisać przez operatory:

$$\hat{\rho} \rightarrow \sum_a \hat{K}_a \hat{\rho} \hat{K}_a^\dagger. \quad (3)$$

Macierz gęstości postaci $\hat{\rho} = \hat{1}$ opisuje płaski rozkład prawdopodobieństwa i w związku z tym obliczony *a priori* po pomiarze nie zmienia się. Stąd operatory $\hat{K}_a \hat{K}_a^\dagger$, poza pierwszym, spełniają także drugi z warunków (2) i można z ich pomocą zdefiniować POVM. Operatory $\hat{K}_a$, zwane w tym kontekście operatorami Krausa, interpretuje się jako operatory ewolucji

podczas pomiaru przy wyniku pomiaru a . Stan a *posteriori*, przy znanym wyniku pomiaru, byłby zadany przez operator $\hat{K}_a \hat{\rho} \hat{K}_a^\dagger$ po jego znormalizowaniu. Należy jednak zwrócić uwagę, że operatory dla danej mapy (3) nie są wyznaczone jednoznacznie.

Zgodnie z twierdzeniem Naimarka [23, 64], dowolną POVM można uzyskać z PVM na rozszerzonej przestrzeni Hilberta. Innymi słowy, jeśli do iloczynu przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_d$, gdzie indeks s odnosi przestrzeń do systemu obserwowanego, d zaś do detektora, zastosować podstawowy postulat mechaniki kwantowej o pomiarze opartym na PVM, otrzymuje się opis pomiaru oparty na POVM zadany dla przestrzeni Hilberta systemu obserwowanego. Przy tym konstrukcja ta pozwala otrzymywać przewidywania niewrażliwe na dalsze rozszerzanie przestrzeni Hilberta o przestrzenie detektorów mierzące detektory [22, 65]. Jest to przesłanką dla hipotezy, że mechanika kwantowa spełnia zasadę psychofizycznego paralelizmu w rozumieniu von Neumanna [65], tj. że w zasadzie można uwzględnić dowolnie dużą część składową osoby obserwatora, choć nie obserwatora w całości, jako element układu pomiarowego.

B.2 Konstrukcja operatorów Krausa

Niech przez krótki czas δt oddziaływanie z detektorem będzie postaci

$$\hat{H}_I = -\mu \hat{p} \hat{A}, \quad (4)$$

przy czym czas oddziaływania jest tak krótki, że można zaniedbać wyrazy Hamiltonianu opisujące ewolucję własną układu bądź detektora. Operator $\hat{A}$ jest obserwabłą układu; $\hat{p}$ z kolei jest kanonicznym pędem w układzie detektora dla jego zmiennej kanonicznej $\hat{q}$. W idealnym przypadku detektor przed pomiarem znajduje się w stanie początkowym o dobrze określonej wartości p . Za realistyczny można jednak uznać taki przypadek, w którym funkcja falowa detektora jest gaussowska w p (a więc i w q) [32]:

$$|\phi\rangle_d = \frac{1}{(2\pi\sigma_p^2)^{1/4}} \int dp e^{-\frac{p^2}{4\sigma_p^2}} |p\rangle_d = \frac{1}{(2\pi\sigma_q^2)^{1/4}} \int dq e^{-\frac{q^2}{4\sigma_q^2}} |q\rangle_d, \quad (5)$$

gdzie $\sigma_p^2 = \hbar^2/4\sigma_q^2$. Stan układu poddanego pomiarowi zapisać można w bazie stanów własnych $|a_n\rangle$ (o wartości własnej a_n) operatora $\hat{A}$:

$$|\psi\rangle_s = \sum_n f_n |a_n\rangle_s. \quad (6)$$

Stan wspólny $|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle_d$ układ-detektor, skutek wzajemnego oddziaływania, przechodzi w stan:

$$\begin{aligned} |f\rangle &= e^{-ig\hat{p}\hat{A}/\hbar} |\psi\rangle_s \otimes |\phi\rangle_d = \sum_n f_n |a_n\rangle_s \otimes \frac{1}{(2\pi\sigma_p^2)^{1/4}} \int dp \exp\left(-\frac{p^2}{4\sigma_p^2}\right) e^{i\mu a_n \delta t p} |p\rangle_d \quad (7) \\ &= \sum_n f_n |a_n\rangle_s \otimes \frac{1}{(2\pi\sigma_q^2)^{1/4}} \int dq \exp\left(-\frac{(q - \mu a_n \delta t)^2}{4\sigma_q^2}\right) |q\rangle_d \\ &= \int dq \frac{1}{(2\pi\sigma_q^2)^{1/4}} e^{-\frac{(q - \mu \hat{A} \delta t)^2}{4\sigma_q^2}} |\psi\rangle_s \otimes |q\rangle_d. \end{aligned}$$

Definiuję teraz tzw. operator Krausa działający w przestrzeni Hilberta stanu obserwowanego, ale parametryzowany zmienną q :

$$\hat{K}(q) = \frac{1}{(2\pi\sigma_q^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{(q - \mu \hat{A} \delta t)^2}{4\sigma_q^2}\right). \quad (8)$$

Pomiarowi zmiennej położeniowej detektora odpowiada w zbiorczej przestrzeni Hilberta obserwabla $\hat{1} \otimes \hat{q}$. Każdy stan układu jest stanem własnym operatora $\hat{1}$. Jeśli w wyniku takiego pomiaru zmierzono q , co zachodzi z prawdopodobieństwem $p(q)$ to zgodnie z postulatem o pomiarze mechaniki kwantowej stan zbiorczy to $\hat{K}(q) |\psi\rangle \otimes |q\rangle_d / \sqrt{p(q)}$. W języku macierzy gęstości można go zapisać jako:

$$\hat{\rho}_{sd}(q) = \frac{1}{p(q)} \hat{K}(q) |\psi\rangle \langle \psi|_s \hat{K}^\dagger(q) \otimes |q\rangle \langle q|_d, \quad (9)$$

przy czym gęstość prawdopodobieństwa dla zmiennej q to

$$p(q) = \text{Tr} [(\hat{1}_s \otimes |q\rangle \langle q|_d) |f\rangle \langle f|] = \text{Tr} [\hat{K}(q) |\psi\rangle \langle \psi|_s \hat{K}^\dagger(q) \otimes |q\rangle \langle q|_d] \quad (10)$$

$$= \sum_n |f_n|^2 \frac{1}{(2\pi\sigma_q^2)^{1/2}} e^{-\frac{(q - \mu a_n \delta t)^2}{2\sigma_q^2}}, \quad (11)$$

z czego wynika, że wartość średnia:

$$\langle q \rangle_d = \int dq q p(q) = \mu \delta t \sum_n |f_n|^2 a_n = \mu \delta t \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle_s. \quad (12)$$

Po pomiarze stan układu w konwencji von Neumana (tj. stan *a priori*) zapisać można jako operator macierzy gęstości:

$$\hat{\rho}_{sd} = \int dq \hat{K}(q) |\psi\rangle \langle \psi|_s \hat{K}^\dagger(q) \otimes |q\rangle \langle q|_d = \int dq p(q) \hat{\rho}(q). \quad (13)$$

Dla operatorów $\hat{\rho}_{sd}$ i $\hat{\rho}_{sd}(q)$ wykonać można ślad częściowy w przestrzeni $\mathcal{H}_d$, tj. po stopniach swobody detektora, uzyskując wyrażenia (z pominięciem indeksów s)

$$\hat{\rho}(q) = \frac{1}{p(q)} \hat{K}(q) |\psi\rangle \langle \psi| \hat{K}^\dagger(q), \quad \hat{\rho} = \hat{K}(q) |\psi\rangle \langle \psi| \hat{K}^\dagger(q). \quad (14)$$

Powyższe wyrażenie na $p(q)$ można równoważnie zapisać jako

$$p(q) = \text{Tr} \hat{\rho}(q) = \text{Tr} |\psi\rangle \langle \psi| \hat{\pi}(q), \quad \hat{\pi}(q) = \hat{K}^\dagger(q) \hat{K}(q). \quad (15)$$

Operator $\hat{\pi}(q)$ jest zapowiedzianym wyżej operatorem zastępującym operatory rzutowe w niniejszym modelu pomiaru. Że jest to rzeczywiście pomiar obserwabli $\hat{A}$, świadczy chociażby równanie (12). Operator $\hat{\rho}(q)$ ($\hat{\rho}$) zawiera pełną informację o układzie obserwowanym po pomiarze (*a priori*), tj. z jego pomocą można uzyskiwać rozkłady prawdopodobieństwa wyników przyszłych pomiarów – włączając w to pomiary uogólnione, oparte na pomiarach Krausa i POVM.

Operator (1.17) uzyskuje przez pominięcie w (8) wielkości $\mu \delta t$, tudzież przez włączenie jej w parametr q , czy w a jak był oznaczany w rozprawie.

Rozdział C

Formalizm operatorów Krausa z użyciem pseudomodów

Spis treści

C.1	Uciąglenie operatorów Krausa	69
C.2	Korelacje	71
C.3	Zastosowanie do metody pseudomodów	72
C.3.1	Zastosowanie metody pseudomodów do fizycznych wzorów na korelacje	72
C.3.2	Korelacje drugiego rzędu obliczone dla niehermitowskiego Hamiltonianu	73
C.4	Równanie Lindblada	73
C.4.1	Wyprowadzenie	73
C.4.2	Korelacje drugiego rzędu dla rzutu	74

Dodatek ten odtwarza rezultaty pracy [24], ale dla przypadku w którym Hamiltonian $\hat{H}$ został zastąpiony niehermitowskim operatorem $\hat{G} = \hat{H} - i\hat{\Gamma}$. Jedyna istotna różnica w rozważaniach w porównaniu z [24] to zakończenie eksperymentu w momencie w którym mierzone są ostatnie wielkości potrzebne do obliczenia korelacji. W sekcji C.3 tego dodatku dowodzę, że zastosowanie metody pseudomodów do obliczenia korelacji drugiego rzędu fizycznego systemu sprowadza się do wzorów uzyskanych w tym dodatku. W sekcji C.4 powtarzam też wyprowadzenie równania Lindblada z [24] i sprawdzam drugie z równań (1.26) dla niehermitowskiego Hamiltonianu. Pełne wyprowadzenie wzorów (1.26) dla zwykłego Hamiltonianu, zawarte zresztą w [24], pomijam.

C.1 Uciąglenie operatorów Krausa

Z racji niehermitowskości $\hat{G}$ zachodzi $(e^{-(i/\hbar)\hat{G}t/\hbar})^\dagger = e^{(i/\hbar)\hat{G}^\dagger t}$, ale $(e^{-(i/\hbar)\hat{G}t/\hbar})^{-1} = e^{(i/\hbar)\hat{G}t/\hbar}$. Operator Krausa dla szeregu N pomiarów:

$$\hat{K}(\{a_j\}) = (2\bar{\lambda}/\pi)^{N/4} e^{-(i/\hbar)\hat{G}(t_{N+1}-t_N)} e^{-\bar{\lambda}(a_N-\hat{A})^2} \dots e^{-(i/\hbar)\hat{G}(t_3-t_2)} e^{-\bar{\lambda}(a_2-\hat{A})^2} e^{-(i/\hbar)\hat{G}(t_2-t_1)} e^{-\bar{\lambda}(a_1-\hat{A})^2} e^{-(i/\hbar)\hat{G}t_1}. \quad (1)$$

Niech $t_j - t_{j-1} = t_1 = \Delta t$ oraz $\bar{\lambda} \equiv \lambda \Delta t$. Oznaczam też:

$$\hat{A}(t_j) = e^{(i/\hbar)\hat{G}t_j} \hat{A} e^{-(i/\hbar)\hat{G}t_j} \quad (2)$$

(czyli $\hat{A}^\dagger(t_j) \neq \hat{A}(t_j)$). Innymi słowy:

$$\hat{K}(\{a_j\}) = (2\lambda\Delta t/\pi)^{N/4} e^{-(i/\hbar)\hat{G}t_{N+1}} \mathcal{T} \prod_{j=1}^N e^{-\lambda[a_j - \hat{A}(t_j)]^2 \Delta t}. \quad (3)$$

W granicy $\Delta t \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$:

$$\hat{K}[a(t)] = e^{-(i/\hbar)\hat{G}t} C \mathcal{T} e^{-\lambda \int_0^t [a(t') - \hat{A}(t')]^2 dt'}, \quad (4)$$

gdzie C to stała normalizacyjna.

Poszukuję teraz $\hat{\rho}[a(t)] = \hat{K}[a(t)]\hat{\rho}\hat{K}^\dagger[a(t)]$, gdzie $\hat{\rho}$ to stan początkowy. Korzystając z TF można zapisać:

$$\hat{K}[a(t)] = e^{-(i/\hbar)\hat{G}t} \int D\phi \mathcal{T} e^{\int dt [i\phi(t)[\hat{A}(t) - a(t)] - \phi^2(t)/4\lambda}, \quad (5)$$

a zatem

$$\begin{aligned} \hat{\rho}[a(t)] = & e^{-(i/\hbar)\hat{G}t} \int D\phi_+ \mathcal{T} e^{\int dt [i\phi_+(t)[\hat{A}(t) - a(t)] - \phi_+^2(t)/4\lambda} \\ & \times \hat{\rho} \int D\phi_- \tilde{\mathcal{T}} e^{\int dt [i\phi_-(t)[\hat{A}^\dagger(t) - a(t)] - \phi_-^2(t)/4\lambda} e^{(i/\hbar)\hat{G}^\dagger t}. \end{aligned} \quad (6)$$

Dalej oznaczam $\chi = \phi_+ + \phi_-$ i $\phi = (\phi_+ - \phi_-)/2$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}[a(t)] = & \int D\phi e^{-\int dt \phi^2(t)/2\lambda} \int D\chi e^{-\int dt \chi^2(t)/8\lambda} e^{-\int i\chi(t)a(t)dt} \\ & \times e^{-(i/\hbar)\hat{G}t} \mathcal{T} e^{i \int dt [\chi(t)/2 + \phi(t)]\hat{A}(t)} \hat{\rho} \tilde{\mathcal{T}} e^{i \int dt [\chi(t)/2 - \phi(t)]\hat{A}^\dagger(t)} e^{(i/\hbar)\hat{G}^\dagger t}. \end{aligned} \quad (7)$$

Teraz powtarzam dodatek B z [24], który prowadzi do wyprowadzenia równania (13) poniżej z (7). Dyskretyzuję wyrażenie z równania (7):

$$\begin{aligned} e^{-(i/\hbar)\hat{G}t} \mathcal{T} e^{i \int dt [\chi(t)/2 + \phi(t)]\hat{A}(t)} = & e^{-(i/\hbar)\hat{G}t_{N+1}} \mathcal{T} e^{i\Delta t \sum_j [\chi(t_j)/2 + \phi(t_j)]\hat{A}(t_j)} \\ = & e^{-(i/\hbar)\hat{G}t_{N+1}} e^{i\Delta t [\chi(t_N)/2 + \phi(t_N)]\hat{A}(t_N)} \dots e^{i\Delta t [\chi(t_1)/2 + \phi(t_1)]\hat{A}(t_1)} \\ = & e^{-(i/\hbar)\hat{G}t_{N+1}} e^{(i/\hbar)\hat{G}t_N} e^{i\Delta t [\chi(t_N)/2 + \phi(t_N)]\hat{A}} e^{-(i/\hbar)\hat{G}t_N} \\ & \times e^{(i/\hbar)\hat{G}t_{N-1}} e^{i\Delta t [\chi(t_{N-1})/2 + \phi(t_{N-1})]\hat{A}} e^{-(i/\hbar)\hat{G}t_{N-1}} \\ & \times \dots e^{(i/\hbar)\hat{G}t_1} e^{i\Delta t [\chi(t_1)/2 + \phi(t_1)]\hat{A}} e^{-(i/\hbar)\hat{G}t_1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Dla $\Delta t \rightarrow 0$ można napisać

$$e^{i\Delta t [\phi(t_j)]\hat{A}} e^{-(i/\hbar)\hat{G}\Delta t} \rightarrow e^{-(i/\hbar)(\hat{G} - \hbar\phi(t_j)\hat{A})\Delta t}, \quad (9)$$

czyli innymi słowy

$$\begin{aligned} (8) = & e^{-(i/\hbar)\hat{G}\Delta t} e^{i\Delta t [\chi(t_N)/2]\hat{A}} e^{-(i/\hbar)(\hat{G} - \hbar\phi(t_N)\hat{A})\Delta t} \\ & \times e^{i\Delta t [\chi(t_{N-1})/2]\hat{A}} e^{-(i/\hbar)(\hat{G} - \hbar\phi(t_{N-1})\hat{A})\Delta t} \\ & \times \dots e^{i\Delta t [\chi(t_1)/2]\hat{A}} e^{-(i/\hbar)(\hat{G} - \hbar\phi(t_1)\hat{A})\Delta t}. \end{aligned} \quad (10)$$

Oznaczając

$$\begin{aligned}\hat{A}_\phi(t_j) &= \left(\tilde{\mathcal{T}} e^{(i/\hbar) \int_0^{t_j} (\hat{G} - \hbar\phi(t')\hat{A}) dt'} \right) \hat{A} \left(\mathcal{T} e^{-(i/\hbar) \int_0^{t_j} (\hat{G} - \hbar\phi(t')\hat{A}) dt'} \right) \\ &= \left(\tilde{\mathcal{T}} \prod_{k \leq j} e^{(i/\hbar)(\hat{G} - \hbar\phi(t_k)\hat{A})\Delta t} \right) \hat{A} \left(\mathcal{T} \prod_{k \leq j} e^{-(i/\hbar)(\hat{G} - \hbar\phi(t_k)\hat{A})\Delta t} \right),\end{aligned}\quad (11)$$

mogę z kolei napisać

$$\begin{aligned}(10) &= e^{-(i/\hbar)\hat{G}\Delta t} \left(\mathcal{T} \prod_{k \leq N} e^{-(i/\hbar)(\hat{G} - \hbar\phi(t_k)\hat{A})\Delta t} \right) e^{i\Delta t[\chi(t_N)/2]\hat{A}_\phi(t_N)} \\ &\quad \times e^{i\Delta t[\chi(t_{N-1})/2]\hat{A}_\phi(t_{N-1})} \dots e^{i\Delta t[\chi(t_1)/2]\hat{A}_\phi(t_1)} \\ &\rightarrow \mathcal{T} e^{-(i/\hbar) \int_0^t (\hat{G} - \hbar\phi(t')\hat{A}) dt'} \mathcal{T} e^{i \int_0^t [\chi(t')/2]\hat{A}_\phi(t') dt'}.\end{aligned}\quad (12)$$

Ostatecznie (7) można przepisać jako:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}[a(t)] &= \int D\phi e^{-\int dt \phi^2(t)/2\lambda} \int D\chi e^{-\int dt \chi^2(t)/8\lambda} e^{-\int i\chi(t)a(t)dt} \\ &\quad \times \mathcal{T} e^{-(i/\hbar) \int_0^t (\hat{G} - \hbar\phi(t')\hat{A}) dt'} \mathcal{T} e^{i \int_0^t [\chi(t')/2]\hat{A}_\phi(t') dt'} \hat{\rho} \\ &\quad \times \tilde{\mathcal{T}} e^{i \int_0^t [\chi(t')/2]\hat{A}_\phi^\dagger(t') dt'} \tilde{\mathcal{T}} e^{(i/\hbar) \int_0^t (\hat{G}^\dagger - \hbar\phi(t')\hat{A}) dt'}.\end{aligned}\quad (13)$$

C.2 Korelacje

Oznaczam $P[a(t)] = \text{Tr } \hat{\rho}[a(t)]$. Wprowadzam też funkcję generującą momenty statystyczne:

$$M[\chi] = \int Da e^{i \int dt \chi(t)a(t)} P[a] = e^{-\int dt \chi^2(t)/8\lambda} M_q[\chi], \quad (14)$$

gdzie

$$\begin{aligned}M_q[\chi] &= \int D\phi e^{-\int dt \phi^2(t)/2\lambda} \text{Tr } \mathcal{T} e^{i \int dt \chi(t)\hat{O}_\phi(t)/2} \hat{\rho} \tilde{\mathcal{T}} e^{i \int dt \chi(t)\hat{A}_\phi^\dagger(t)/2} \\ &\quad \times \tilde{\mathcal{T}} e^{(i/\hbar) \int_0^t (\hat{G}^\dagger - \hbar\phi(t')\hat{A}) dt'} \mathcal{T} e^{-(i/\hbar) \int_0^t (\hat{G} - \hbar\phi(t')\hat{A}) dt'}.\end{aligned}\quad (15)$$

Gdyby $\hat{G}$ było operatorem hermitowskim, ostatnia linijka skróciłaby się. Ostatecznie można zapisać, wykonując odwrotną TF:

$$P[a] = \int Da' P_d(a - a') P_q(a'), \quad (16)$$

$$P_d[a] = \int D\chi e^{-\int dt \chi^2(t)/8\lambda} e^{-\int i\chi(t)a(t)dt} \sim e^{-2\lambda \int a^2(t)dt}, \quad (17)$$

$$P_q[a] = \int D\chi e^{-i \int dt \chi(t)a(t)dt} e^{S_q[\chi]}. \quad (18)$$

Miara P_q nie jest funkcją prawdopodobieństwa, ale można obliczyć dla niej odpowiednie momenty jako:

$$\langle a(t_1) \dots a(t_n) \rangle_q = \frac{\delta^n M_q[\chi]}{\delta i\chi(t_1) \dots \delta i\chi(t_n)} \Big|_{\chi=0}. \quad (19)$$

W szczególności dla korelacji drugiego rzędu, $t_2 > t_1$:

$$\begin{aligned} \langle a(t_1)a(t_2) \rangle_q = & (1/4) \int D_\lambda \phi \text{Tr} \left[\hat{A}_\phi(t_2) \hat{A}_\phi(t_1) \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{A}_\phi^\dagger(t_1) \hat{A}_\phi^\dagger(t_2) \right. \\ & \left. + \hat{A}_\phi(t_2) \hat{\rho} \hat{A}_\phi^\dagger(t_1) + \hat{A}_\phi(t_1) \hat{\rho} \hat{A}_\phi^\dagger(t_2) \right] \\ & \times \tilde{\mathcal{T}} e^{(i/\hbar) \int_0^t (\hat{G}^\dagger - \hbar \phi(t') \hat{A}) dt'} \mathcal{T} e^{-(i/\hbar) \int_0^t (\hat{G} - \hbar \phi(t') \hat{A}) dt'}, \end{aligned} \quad (20)$$

gdzie $D_\lambda \phi = D\phi e^{-\int dt \phi(t)/2\lambda}$.

C.3 Zastosowanie do metody pseudomodów

Równanie (20) jest odpowiednikiem (19b) z [24]:

$$\begin{aligned} \langle a(t_1)a(t_2) \rangle_q = & (1/4) \int D_\lambda \phi \text{Tr} \left[\hat{A}_\phi(t_2) \hat{A}_\phi(t_1) \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{A}_\phi(t_1) \hat{A}_\phi(t_2) \right. \\ & \left. + \hat{A}_\phi(t_2) \hat{\rho} \hat{A}_\phi(t_1) + \hat{A}_\phi(t_1) \hat{\rho} \hat{A}_\phi(t_2) \right], \end{aligned} \quad (21)$$

przy czym to wyrażenie wzięte jest dla $\hat{H}$. Interesuje mnie teraz przypadek $\hat{A} = \hat{O} = |\Omega\rangle \langle \Omega|$. Należy sprawdzić, jaki wynik ma zastosowanie do tego przypadku metody pseudomodów, oraz czy podstawienie

$$\hat{G} = \left(k_0 - i \frac{\Delta}{2} \right) |k_0\rangle \langle k_0| + \sqrt{\gamma} (|k_0\rangle \langle \Omega| + |\Omega\rangle \langle k_0|) \quad (22)$$

do (20) prowadzi do tych samych wyników. Analogiczne rachunki dla wartości oczekiwanej są już proste.

C.3.1 Zastosowanie metody pseudomodów do fizycznych wzorów na korelacje

Jak łatwo sprawdzić z (21):

$$\begin{aligned} \langle o(t_1)o(t_2) \rangle_q = & \int D\phi e^{-\int dt \phi(t)/2\lambda} \\ & \times \left(\langle \Omega | \tilde{\mathcal{T}} e^{i/\hbar \int_0^{t_1} dt \hat{H}_\phi(t)} | \Omega \rangle \langle \Omega | \tilde{\mathcal{T}} e^{i/\hbar \int_{t_1}^{t_2} dt \hat{H}_\phi(t)} | \Omega \rangle \langle \Omega | \mathcal{T} e^{-i/\hbar \int_0^{t_2} dt \hat{H}_\phi(t)} | \Omega \rangle + c.c. \right) / 2. \end{aligned} \quad (23)$$

Przy obliczaniu funkcji podcałkowych, rozumowanie z sekcji 5.1 można powtórzyć dla $\hat{H}_\phi(t)$. Mianowicie, jeśli oznaczyć $\psi(t) = \langle \Omega | e^{-i/\hbar \int_{t_0}^t dt \hat{H}_\phi(t)} | \Omega \rangle$, $\psi(k, t) = \langle k, 0 | e^{-i/\hbar \int_{t_0}^t dt \hat{H}_\lambda(t)} | \Omega \rangle$, to dla tych wyrażeń spełnione są równania

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t \psi(t) &= -\phi(t) \psi(t) + \int dk V^*(k) \psi(k, t) \\ i\hbar \partial_t \psi(k, t) &= \hbar k \psi(k, t) + V(k) \psi(t). \end{aligned} \quad (24)$$

Po przejściu do obrazu oddziaływania i scałkowaniu drugiego równania, uzyskuje się

$$\partial_t \psi(t) = -\frac{\phi(t)}{i\hbar} \psi(t) - \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^t dt' G(t-t') \psi_0(t'), \quad (25)$$

gdzie dla Lorentzowskiego czynnika formy, $G(s) = \gamma e^{-ik_0 s - \Delta s/2}$. To samo wyrażenie na $\psi(t)$ uzyskaloby się, zastępując $\psi(k, t)$ przez $\psi_1(t)$, dla którego obowiązuje

$$i\hbar\partial\psi_1(t) = \hbar\left(k_0 - i\frac{\Delta}{2}\right)\psi_{k_0}(t) + \sqrt{\gamma}\psi(t). \quad (26)$$

Wyrażenie podcałkowe dla Lorentzowskiego czynnika formy jest zatem takie samo, obojętnie, czy wyrażenia podcałkowe obliczy się na bazie modelu fizycznego, czy modelu z pseudomodami. To samo tyczy się też wszystkich wyższych korelacji.

C.3.2 Korelacje drugiego rzędu obliczone dla niehermitowskiego Hamiltonianu

Niech eksperyment kończy się w t_2 , tj. $t = t_2$. Oznaczmy też $G_\phi(t) = \hat{G} - \hbar\phi(t)\hat{O}$. Wtedy, zapisując (20) wyraz po wyrazie:

$$\begin{aligned} \langle o(t_1)o(t_2) \rangle_q &= (1/4) \int D_\lambda \phi \\ &\times \left[\langle \Omega | \tilde{\mathcal{T}} e^{(i/\hbar) \int_0^{t_2} \hat{G}_\phi^\dagger(t') dt'} | \Omega \rangle \langle \Omega | \mathcal{T} e^{-(i/\hbar) \int_{t_1}^{t_2} \hat{G}_\phi(t') dt'} | \Omega \rangle \langle \Omega | \mathcal{T} e^{-(i/\hbar) \int_0^{t_1} \hat{G}_\phi(t') dt'} | \Omega \rangle \right. \\ &+ \langle \Omega | \tilde{\mathcal{T}} e^{(i/\hbar) \int_0^{t_1} \hat{G}_\phi^\dagger(t') dt'} | \Omega \rangle \langle \Omega | \tilde{\mathcal{T}} e^{(i/\hbar) \int_{t_1}^{t_2} \hat{G}_\phi^\dagger(t') dt'} | \Omega \rangle \langle \Omega | \mathcal{T} e^{-(i/\hbar) \int_0^{t_2} \hat{G}_\phi(t') dt'} | \Omega \rangle \\ &+ \langle \Omega | \tilde{\mathcal{T}} e^{(i/\hbar) \int_{t_1}^{t_2} \hat{G}_\phi^\dagger(t') dt'} | \Omega \rangle \langle \Omega | \mathcal{T} e^{-(i/\hbar) \int_0^{t_2} \hat{G}_\phi(t') dt'} | \Omega \rangle \langle \Omega | \tilde{\mathcal{T}} e^{(i/\hbar) \int_0^{t_1} \hat{G}_\phi^\dagger(t') dt'} | \Omega \rangle \\ &+ \left. \langle \Omega | \mathcal{T} e^{-(i/\hbar) \int_{t_1}^{t_2} \hat{G}_\phi(t') dt'} | \Omega \rangle \langle \Omega | \mathcal{T} e^{-(i/\hbar) \int_0^{t_1} \hat{G}_\phi(t') dt'} | \Omega \rangle \langle \Omega | \tilde{\mathcal{T}} e^{(i/\hbar) \int_0^{t_2} \hat{G}_\phi^\dagger(t') dt'} | \Omega \rangle \right] \\ &= (1/2) \int D_\lambda \phi \left[\langle \Omega | \tilde{\mathcal{T}} e^{(i/\hbar) \int_0^{t_1} \hat{G}_\phi^\dagger(t') dt'} | \Omega \rangle \right. \\ &\times \left. \langle \Omega | \tilde{\mathcal{T}} e^{(i/\hbar) \int_{t_1}^{t_2} \hat{G}_\phi^\dagger(t') dt'} | \Omega \rangle \langle \Omega | \mathcal{T} e^{-(i/\hbar) \int_0^{t_2} \hat{G}_\phi(t') dt'} | \Omega \rangle + c.c. \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Korzystając teraz z tego, co uzasadniłem na początku sekcji:

$$\langle \Omega | \tilde{\mathcal{T}} e^{(i/\hbar) \int_{t_i}^{t_j} \hat{G}_\phi^\dagger(t') dt'} | \Omega \rangle = \langle \Omega | \tilde{\mathcal{T}} e^{(i/\hbar) \int_{t_i}^{t_j} \hat{H}_\phi^\dagger(t') dt'} | \Omega \rangle. \quad (28)$$

odzyskuje się wzór na korelację zapisany wyżej.

C.4 Równanie Lindblada

Powtórzę teraz dodatek E z [24] i pokażę dla szczególnego przypadku (22), że spełnione jest drugie równanie (1.26).

C.4.1 Wyprowadzenie

Z równania (7), wykorzystując TF $\int Da e^{-i \int \chi(t)a(t)dt} = \delta[\chi(t)]$ uzyskać można:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) &= \int Da \hat{\rho}[a] = \int D\phi e^{-\int dt \phi^2(t)/2\lambda} \\ &\times e^{-(i/\hbar) \hat{G}t} \mathcal{T} e^{i \int dt \phi(t) \hat{A}(t)} \hat{\rho} \tilde{\mathcal{T}} e^{-i \int dt \phi(t) \hat{A}^\dagger(t)} e^{(i/\hbar) \hat{G}^\dagger t}. \end{aligned} \quad (29)$$

Wynik ten można zapisać w postaci inkrementalnej:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t + \Delta t) = & e^{-(i/\hbar)\hat{G}(t+\Delta t)} \int D\phi e^{-\int_t^{t+\Delta t} dt' \phi(t')/2} \\ & \times \mathcal{T} e^{i \int_t^{t+\Delta t} dt' \phi(t') \hat{A}(t')} e^{(i/\hbar)\hat{G}t} \hat{\rho}(t) e^{-(i/\hbar)\hat{G}^\dagger t} \tilde{\mathcal{T}} e^{-i \int_t^{t+\Delta t} \phi(t') \hat{A}^\dagger(t')} e^{(i/\hbar)\hat{G}^\dagger(t+\Delta t)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Należy teraz z powrotem zapisać:

$$\mathcal{T} e^{i \int_t^{t+\Delta t} dt' \phi(t') \hat{A}(t')} = e^{(i/\hbar)\hat{G}(t+\Delta t)} e^{(i/\hbar) \int_t^{t+\Delta t} dt' [\phi(t') \hat{A} - \hat{G}]} e^{-(i/\hbar)\hat{G}t}, \quad (31)$$

by przepisać

$$\hat{\rho}(t + \Delta t) e^{(i/\hbar) \int_t^{t+\Delta t} dt' [\phi(t') \hat{A} - \hat{G}]} \hat{\rho}(t) e^{-(i/\hbar) \int_t^{t+\Delta t} dt' [\phi(t') \hat{A} - \hat{G}]}.$$

Pozostaje rozwinąć eksponenty powyżej do wyrażeń dających wkład rzędu $O(\Delta t)$ – w tym przypadku będzie to rozwinięcie do wyrazów kwadratowych – i skorzystanie z tego, że dla danej normalizacji $\langle \phi(t) \rangle = 0$ oraz $\langle \phi(t) \phi(t') \rangle = \lambda \delta(t - t')$. Wynikiem będzie równanie Lindblada:

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{\rho}(t + \Delta t) - \hat{\rho}(t)}{\Delta t} = \left(\hat{G} \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{G}^\dagger \right) / i\hbar - \lambda [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{\rho}(t)]] / 2. \quad (33)$$

C.4.2 Korelacje drugiego rzędu dla rzutu

Zamiast wzoru (7) za punkt wyjścia można wziąć wyrażenie (13). Uzyskuje się tym samym wzór równoważny do (29):

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) = & \int Da \hat{\rho}[a] = \int D\phi e^{-\int dt \phi^2(t)/2\lambda} \\ & \times \mathcal{T} e^{-(i/\hbar) \int_0^t (\hat{G} - \hbar \phi(t') \hat{A}) dt'} \hat{\rho} \tilde{\mathcal{T}} e^{(i/\hbar) \int_0^t (\hat{G}^\dagger - \hbar \phi(t') \hat{A}) dt'}. \end{aligned} \quad (34)$$

We wzorze (20), przy założeniu, że $t = t_2$, mogę wpierw powyciągać częściowo odpowiednie wyrażenia z operatorów $\hat{A}$ wziętych w chwili t_1 i operatorów ewolucji i połączyć je z ρ by, korzystając z (34), uzyskać funkcję podcałkową $\hat{\rho}_\phi(t_1)$ z (34):

$$\begin{aligned} \langle a(t_1) a(t_2) \rangle_q = & (1/4) \int D_\lambda \phi \text{Tr} \left[\mathcal{T} e^{-(i/\hbar) \int_0^{t_1} (\hat{G} - \hbar \phi(t') \hat{A}) dt'} \hat{A}_\phi(t_2) \right. \\ & \times \tilde{\mathcal{T}} e^{(i/\hbar) \int_0^{t_1} (\hat{G}^\dagger - \hbar \phi(t') \hat{A}) dt'} \hat{A} \hat{\rho}_\phi(t_1) \\ & + \hat{\rho}_\phi(t_1) \hat{A} \tilde{\mathcal{T}} e^{-(i/\hbar) \int_0^{t_1} (\hat{G}^\dagger - \hbar \phi(t') \hat{A}) dt'} \hat{A}_\phi^\dagger(t_2) \tilde{\mathcal{T}} e^{(i/\hbar) \int_0^{t_1} (\hat{G}^\dagger - \hbar \phi(t') \hat{A}) dt'} \\ & + \mathcal{T} e^{-(i/\hbar) \int_0^{t_1} (\hat{G} - \hbar \phi(t') \hat{A}) dt'} \hat{A}_\phi(t_2) \mathcal{T} e^{(i/\hbar) \int_0^{t_1} (\hat{G} - \hbar \phi(t') \hat{A}) dt'} \hat{\rho}_\phi(t_1) \hat{A} \\ & + \hat{A} \hat{\rho}_\phi(t_1) \tilde{\mathcal{T}} e^{-(i/\hbar) \int_0^{t_1} (\hat{G}^\dagger - \hbar \phi(t') \hat{A}) dt'} \hat{A}_\phi^\dagger(t_2) \tilde{\mathcal{T}} e^{(i/\hbar) \int_0^{t_1} (\hat{G}^\dagger - \hbar \phi(t') \hat{A}) dt'} \left. \right] \\ & \times \tilde{\mathcal{T}} e^{(i/\hbar) \int_{t_1}^{t_2} (\hat{G}^\dagger - \hbar \phi(t') \hat{A}) dt'} \mathcal{T} e^{-(i/\hbar) \int_{t_1}^{t_2} (\hat{G} - \hbar \phi(t') \hat{A}) dt'}. \end{aligned} \quad (35)$$

To samo teraz powtórzyć można dla $\hat{A}$ w chwili t_2 . Wykonawszy tę operację, można rozdzielić całkę na dwa odcinki: $\int D_\lambda \phi = \int_{t=0}^{t=t_1} D_\lambda \phi \int_{t=t_1}^{t=t_2} D_\lambda \phi$, i pierwszą z tych całek połączyć z $\hat{\rho}_\phi(t_1)$

uzyskując $\hat{\rho}(t_1)$:

$$\begin{aligned}
 \langle a(t_1)a(t_2) \rangle_q = & \quad (1/4) \int_{t=t_1}^{t=t_2} D_\lambda \phi \text{Tr} \\
 & \times \left[\hat{A} \tilde{\mathcal{T}} e^{-(i/\hbar) \int_{t_1}^{t_2} (\hat{G} - \hbar \phi(t') \hat{A}) dt'} \hat{A} \hat{\rho}(t_1) \tilde{\mathcal{T}} e^{(i/\hbar) \int_{t_1}^{t_2} (\hat{G}^\dagger - \hbar \phi(t') \hat{A}) dt'} \right. \\
 & + \mathcal{T} e^{-(i/\hbar) \int_{t_1}^{t_2} (\hat{G} - \hbar \phi(t') \hat{A}) dt'} \hat{\rho}(t_1) \hat{A} \tilde{\mathcal{T}} e^{(i/\hbar) \int_{t_1}^{t_2} (\hat{G}^\dagger - \hbar \phi(t') \hat{A}) dt'} \hat{A} \\
 & + \hat{A} \mathcal{T} e^{-(i/\hbar) \int_{t_1}^{t_2} (\hat{G} - \hbar \phi(t') \hat{A}) dt'} \hat{\rho}(t_1) \hat{A} \tilde{\mathcal{T}} e^{(i/\hbar) \int_{t_1}^{t_2} (\hat{G}^\dagger - \hbar \phi(t') \hat{A}) dt'} \\
 & \left. + \mathcal{T} e^{-(i/\hbar) \int_{t_1}^{t_2} (\hat{G} - \hbar \phi(t') \hat{A}) dt'} \hat{A} \hat{\rho}(t_1) \tilde{\mathcal{T}} e^{(i/\hbar) \int_{t_1}^{t_2} (\hat{G}^\dagger - \hbar \phi(t') \hat{A}) dt'} \hat{A} \right].
 \end{aligned} \tag{36}$$

Można teraz zsumować drugą i czwartą linijkę, oraz trzecią i piątą, uzyskując w obu przypadkach operator $\rho' = \{\hat{A}, \hat{\rho}(t_1)\}$. Podlega on dalszej ewolucji od t_1 do t_2 zgodnie z równaniem (34), a następnie ponownie następuje antykomutator – jak to przewiduje drugie równanie (1.26), co było do udowodnienia.

Rozdział D

Uzupełnienia do rozdziału 2.

Spis treści

D.1	Uproszczenie macierzy przejścia	77
D.2	Obliczenie elementu macierzy przejścia	78
D.3	Prawdopodobieństwo drugiego powrotu	78
D.4	Pominięcie wyrażen ze względu na destrukcyjną interferencję	79
D.5	Indukcja dla dalszych prawdopodobieństw powrotów	80

D.1 Uproszczenie macierzy przejścia

Widać, że przy rozpisaniu (2.6) pojawiają się tylko i wyłącznie iloczyny typu LHS (2.7) (oraz p_0). Jeśli zatem obowiązuje RHS (2.7), i skoro te wyrażenia pojawiają się w wyniku tylko w takich kombinacjach, to równoważnie można zastąpić dla $n > 0$ q_n przez q_1 oraz p_n przez w , czyli do obliczenia (2.6) użyć macierzy:

$$\mathcal{P}' = \left(\begin{array}{c|cccc} p_0 & p_1 & p_1 & p_1 & \dots \\ \hline q_0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & w & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & w & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{array} \right) \quad (1)$$

zamiast $\mathcal{P}$. Macierz ta została graficznie podzielona na części odpowiadające:

1. lewa górna część: transferowi z $|\Omega\rangle$ do $|\Omega\rangle$ z 'prawdopodobieństwem' p_0 ,
2. lewa dolna część: opuszczeniu stanu $|\Omega\rangle$ z 'prawdopodobieństwem' q_0 ,
3. prawa górna część: powrotowi do stanu $|\Omega\rangle$ z 'prawdopodobieństwem' p_1 ,
4. prawa dolna część: ewolucji przy pozostawianiu poza stanem $|\Omega\rangle$. Jak widać, układ pozostaje w stanie innym niż $|\Omega\rangle$ z 'prawdopodobieństwem' w .

Stąd widać, że jeśli rozpatrywać przestrzeń fazową zadaną przez dwa efektywne stany: jest w $|\Omega\rangle$ lub jest poza, to dla tej przestrzeni można napisać macierz transferu P zadaną przez (2.8). Pamiętać należy, że na etapie zastąpienia $\mathcal{P}$ przez $\mathcal{P}'$ wyżej fizyczny sens ma już tylko element macierzowy (2.6).

D.2 Obliczenie elementu macierzy przejścia

Jest to powtórzenie elementarnych wiadomości o obliczaniu wielomianu lub funkcji $F(x)$ od macierzy $\hat{X}$. Wiadomo, że $\omega(\hat{X}) = 0$, gdzie $\omega(x)$ jest wielomianem charakterystycznym $\hat{X}$:

$$\omega(\lambda) = \det (x \cdot \hat{1} - \hat{X}). \quad (2)$$

Można dalej zapisać:

$$F(x) = \phi(x)\omega(x) + r(x), \quad (3)$$

gdzie $\phi(x)$ jest wynikiem dzielenia $F(x)$ przez $\omega(x)$ z dokładnością do reszty $r(x)$. Postać wielomianu $r(x)$, będącego rzędu o jeden mniejszego niż rząd $\omega(x)$, można obliczyć podstawiając do powyższego równania miejsca zerowe $\omega(x)$. Mając już postać tego wielomianu, można znaleźć:

$$F(\hat{X}) = r(\hat{X}). \quad (4)$$

W dyskutowanym przypadku, $F(x) = x^N$, $\hat{X} = \hat{P}$ zadane jest przez (2.8). Wielomian $\omega(x)$ (którego miejsca zerowe to $\lambda_{\pm}$) jest drugiego rzędu, zatem $r(x)$ jest rzędu pierwszego. Dalsze obliczenia są oczywiste.

D.3 Prawdopodobieństwo drugiego powrotu

Wyprowadzam tu (2.20). Z myślą o obliczeniach dla kolejnych prawdopodobieństw p_n wprowadzam oznaczenie:

$$\begin{aligned} |p_3\rangle &= (\hat{U} - 1) \int dk |k\rangle \langle k| (\hat{U} - 1) \int dq |q\rangle \langle q| \hat{U} |\Omega\rangle = \\ &= e^{-i\hat{H}_0\tau} \int_0^\tau ds \left(\delta(\tau - s) - i\hat{V}(s) \right) |\Omega\rangle \int dk (-i) \int_0^s dt e^{-ikt} |V(k)|^2 \\ &\quad \times (-i)^2 e^{-ik\tau} \int_0^\tau dt' e^{ikt'} \int dq |V(q)|^2 \int_0^{t'} dt'' e^{-iqt''} (-i) e^{-iq\tau} \int_0^\tau dt''' e^{iqt'''} , \end{aligned} \quad (5)$$

przy czym $\sqrt{q_0 q_1} \alpha'(3\tau) = \langle \Omega | p_3 \rangle$. Po wykonaniu całek po t , t' , t'' i t''' :

$$\begin{aligned} |p_3\rangle &= e^{-i\hat{H}_0\tau} \int_0^\tau ds \left(\delta(\tau - s) - i\hat{V}(s) \right) |\Omega\rangle \\ &\quad \times \int dk \int dq |V(k)|^2 |V(q)|^2 \frac{e^{-iks} - 1}{k} \frac{e^{iq\tau} - 1}{q} e^{-iq\tau} \\ &\quad \times \left(\frac{e^{-iq\tau} - e^{-ik\tau}}{q(q - k)} + \frac{(1 - e^{-ik\tau})}{qk} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Ostatnią linijkę powyżej można przekształcić do postaci:

$$\left(\frac{e^{-iq\tau} - e^{-ik\tau}}{q(q - k)} + \frac{(1 - e^{-ik\tau})}{qk} \right) = \frac{1 - e^{-iq\tau}}{qk} + \frac{e^{-iq\tau} - e^{-ik\tau}}{k(q - k)}. \quad (7)$$

Pierwszy wyraz po uwzględnieniu całek z drugiej liniiki prowadzi do sfaktoryzowanego wyrażenia:

$$- \sqrt{q_0} \alpha(2\tau) \int dk |V(k)|^2 \frac{e^{-iks} - 1}{k^2}, \quad (8)$$

gdzie $\sqrt{q_0}\alpha(2\tau)$ powstała z całki po q . Jeśli chodzi o drugi wyraz po analogicznym scałkowaniu, ma on postać:

$$\int dk |V(k)|^2 \frac{e^{-iks} - 1}{k^2} \int dq |V(q)|^2 \frac{e^{iq\tau} - 1}{q} e^{-2iq\tau} \frac{1 - e^{-i(k-q)\tau}}{k - q}, \quad (9)$$

co razem prowadzi do

$$\begin{aligned} |p_3\rangle \simeq & e^{-i\hat{H}_0\tau} \int_0^\tau ds \left(\delta(\tau - s) - i\hat{V}(s) \right) |\Omega\rangle \\ & \left(\sqrt{q_0}\alpha(2\tau) \int dk |V(k)|^2 \frac{e^{-iks} - 1}{k^2} + (9) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

z czego już wynika (2.20).

D.4 Pominięcie wyrażeń ze względu na destrukcyjną interferencję

Pomijane wyrażenie (9) przepisać można jako:

$$\int dk |V(k)|^2 \frac{e^{-iks} - 1}{k^2} \int dq |V(q)|^2 \text{sinc}\left(\frac{q\tau}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{(k-q)\tau}{2}\right) e^{-iq\tau/2}. \quad (11)$$

Warto wpięrow zauważyć, że dla płaskich funkcji $|V(k)|^2$ powyższe wyrażenie zawiera:

$$\int dq \text{sinc}\left(\frac{q\tau}{2}\right) e^{-iq\tau/2} \text{sinc}\left(\frac{(k-q)\tau}{2}\right) \sim \int dx \theta(\tau/2 - |x|) \theta(\tau/2 - |\tau + x|) = 0, \quad (12)$$

gdzie w proporcjonalności wykorzystano postać transformaty Fouriera funkcji sinc, natomiast ostatnia równość wynika z nieprzekrywania się nośników dystrybucji θ . Stąd też dla dostatecznie płaskich funkcji $|V(k)|^2$ wyrażenie (9) powinno być bliskie zera.

Przed obliczeniami dla ogólniejszych, meromorficznych postaci $|V(k)|^2$, należy wyrażenie (9) unormować, poprzez nałożenie warunku, że rezultaty są skończone dla $\tau \rightarrow \infty$. Odwołując się do (5) stwierdzam, że nałożenie tego warunku oznacza zastąpienie:

$$k \rightarrow k - i\epsilon. \quad (13)$$

Biegun $k = 0$ w (9) zostaje przesunięty w przestrzeni zespolonej powyżej osi rzeczywistej: $k = i\epsilon$. Z drugiej strony, w całkowaniu po k i po q kontur całkowania należy domknąć poniżej osi rzeczywistej, zatem nie obejmuje tego bieguna. Niech teraz czynnik $|V(k)|^2$ posiada tylko jeden biegun d poniżej osi rzeczywistej. Można wykonać całkę po q :

$$(11) \sim \int dk \frac{1}{k + i\epsilon} |V(k)|^2 \text{sinc}\left(\frac{(k-d)\tau}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{k\tau}{2}\right) e^{-iks/2} \cdot \text{sinc}\left(\frac{d\tau}{2}\right) e^{-id\tau}, \quad (14)$$

a następnie po k :

$$(11) \sim \frac{1}{d} \text{sinc}^2\left(\frac{d\tau}{2}\right) e^{-ids/2} e^{-id\tau}. \quad (15)$$

Część zespolona d opisuje szerokość funkcji $|V(k)|^2$. Zatem w stosowanym tutaj zakresie parametrów, kiedy amplituda $|V(k)|^2$ jest mała w porównaniu z szerokością, to wyrażenie jest zaniedbywalnie małe w porównaniu z pozostałym wyrażeniem. Podobny argument można przytoczyć dla większej liczby biegunów. Stąd wniosek o możliwości zaniedbania (9).

D.5 Indukcja dla dalszych prawdopodobieństw powrotów

Celem tej sekcji jest uzasadnienie, że w przybliżeniu obowiązują równania (2.7), przy czym $z = p_0$. Dowód przeprowadzony będzie przez indukcję. Pierwsza linia (2.7) została udowodniona wyżej. Oznaczam $p_{n-1} = |\alpha(n\tau)|^2$, przy czym

$$\prod_{j=0}^{n-2} \sqrt{q_j} \cdot \alpha(n\tau) = \langle \Omega | \left(\hat{U} \int dk |k\rangle \langle k| \right)^{n-1} \hat{U} | \Omega \rangle. \quad (16)$$

Dalej, wprowadzam też uogólnienie równania (5):

$$|p_n\rangle = (\hat{U} - 1) \left(\int dk |k\rangle \langle k| (\hat{U} - 1) \right)^{n-2} \int dq |q\rangle \langle q| \hat{U} | \Omega \rangle, \quad (17)$$

oraz równania (2.19):

$$\alpha'(n\tau) = \frac{\langle \Omega | p_n \rangle}{\prod_{j=0}^{n-2} \sqrt{q_j}}. \quad (18)$$

Łatwo zauważyć, że

$$\alpha(n\tau) = \sum_{l=0}^{n-2} \binom{n-2}{l} \alpha'([2+l]\tau), \quad (19)$$

przy czym $\alpha(2\tau) = \alpha'(2\tau)$.

W pierwszym kroku obowiązuje równanie (10). Przyjmę teraz hipotezę, że zasadne jest przybliżenie:

$$\begin{aligned} |p_n\rangle = & e^{-i\hat{H}_0\tau} \int_0^\tau ds \left(\delta(\tau-s) - i\hat{V}(s) \right) | \Omega \rangle \int dk |V(k)|^2 \frac{e^{-iks} - 1}{k^2} \\ & \times \left(| \Omega \rangle \int dk |V(k)|^2 \frac{e^{-iks} - 1}{k^2} \right)^{n-3} \alpha(2\tau). \end{aligned} \quad (20)$$

W takim przypadku wychodzi

$$\prod_{j=0}^{n-2} \sqrt{q_j} \cdot \alpha'(n\tau) = \left(- \int dk |V(k)|^2 \frac{e^{-ik\tau} - 1}{k^2} \right)^{n-2} \alpha(2\tau), \quad (21)$$

co pozwala napisać, z (19):

$$\prod_{j=0}^{n-2} \sqrt{q_j} \cdot \alpha(n\tau) = \alpha(2\tau) \left(1 - \int dk |V(k)|^2 \frac{e^{-ik\tau} - 1}{k^2} \right)^{n-2}, \quad (22)$$

co też już bezpośrednio prowadzi do równania odpowiedniego rzędu z (2.7). Pozostaje pokazać, że jeśli przyjęta hipoteza (20) obowiązuje dla pewnego n , to obowiązuje ona też dla $n+1$. A skoro hipoteza jest prawdziwa dla $n=0$, to prawdziwa też będzie dla każdego $n > 0$.

Zatem, dla $n + 1$

$$\begin{aligned}
 |p_{n+1}\rangle = & e^{-i\hat{H}_0\tau} \int_0^\tau ds \left(\delta(\tau - s) - i\hat{V}(s) \right) |\Omega\rangle \\
 & \times (-i)^2 \int dk' |V(k')|^2 \int_0^s ds' e^{-ik's'} e^{-ik'\tau} \int_0^\tau ds'' e^{ik's''} \\
 & \times \int dk |V(k)|^2 \frac{e^{-iks''} - 1}{k^2} \left(|\Omega\rangle \int dk |V(k)|^2 \frac{e^{-iks} - 1}{k^2} \right)^{n-3} \alpha(2\tau).
 \end{aligned} \tag{23}$$

Całki po czasie dwóch ostatnich linijek:

$$\begin{aligned}
 e^{-ik'\tau} \int_0^s ds' e^{-ik's'} &= \frac{e^{-ik's} - 1}{-ik'} e^{-ik'\tau} \\
 \int_0^\tau ds'' e^{ik's''} \frac{e^{-iks''} - 1}{k^2} &= \frac{e^{i(k'-k)\tau} - 1}{k^2 i(k' - k)} - \frac{e^{ik'\tau} - 1}{ik' k^2} \\
 &= \frac{e^{ik'\tau} e^{-ik\tau} - 1}{ik' k^2} + \frac{e^{i(k'-k)\tau} - 1}{ikk'(k' - k)}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Dla drugiego wyrazu z ostatniej linijki można przedstawić ten sam argument, co w dodatku D.4 przedstawiono dla wyrażenia (9), czyli dla przypadku $n = 3$. Pozostałe wyrazy podstawione do (23) odtwarzają hipotezę (20) dla $n + 1$, co było do okazania.

Rozdział E

Uzupełnienia do rozdziału 4.

Spis treści

E.1	Rozwiązanie równania Lindblada przez zadane funkcje pomocnicze	83
E.2	Niehermitowska ewolucja	84
E.3	Krok II	85
E.4	Funkcje pierwotne	85

E.1 Rozwiązanie równania Lindblada przez zadane funkcje pomocnicze

W tym dodatku wyprowadzone są równania (4.14). Podstawienie $y = x + Y$ pozwala przepisać (4.10) jako:

$$\partial_x \psi(x, x + Y) = \frac{1}{i\hbar} V(x) e^{-i\omega x} \psi'(x + Y) - \frac{1}{i\hbar} V^*(x + Y) e^{i\omega'(x+Y)} \psi(x). \quad (1)$$

Po scałkowaniu:

$$\psi(x, y) = \int_{-\infty}^0 dz \left[\psi'(z + y) \frac{1}{i\hbar} V(z + x) e^{-i\omega(z+x)} - \frac{1}{i\hbar} V^*(z + y) e^{i\omega'(z+y)} \psi(z + x) \right] + G(x - y). \quad (2)$$

Jeśli podstawić rozwiązania postaci (7.8), wynikiem jest $\psi(x, y) = \psi(x)\psi'(y) \equiv \psi_0(x, y)$, o ile $G(x - y) = 0$. Dalej będę pomijał tę funkcję. Tym sposobem z (4.8) otrzymuję

$$\begin{aligned} i\hbar e^{i\omega x} \partial_x \psi(x) = & -i\hbar \lambda \psi(x) e^{i\omega x} + \hbar \omega' \psi(x) e^{i\omega x} + V(x) \\ & - \int dy V(y) e^{-i\omega' y} \int_{-\infty}^0 dz \psi'(z + y) \frac{1}{i\hbar} V(z + x) e^{-i\omega(z+x)} e^{i\omega x} \\ & + \int dy V(y) e^{-i\omega' y} \int_{-\infty}^0 dz \frac{1}{i\hbar} V^*(z + y) e^{i\omega'(z+y)} \psi(z + x) e^{i\omega x}. \end{aligned} \quad (3)$$

Podstawienie $x = x' + a$ i scałkowanie po $\int dx' \bar{V}^*(x') e^{-i\omega a}$ prowadzi do równań:

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_a \bar{\omega}_\lambda(a) = & -i\hbar \lambda \bar{\omega}_\lambda(a) + \hbar \omega' \bar{\omega}_\lambda(a) + i\hbar \bar{\sigma}_\lambda(a) \\ & - \int_{-\infty}^0 dz [\bar{\omega}'_\lambda(z) \bar{\sigma}_\lambda(z + a) + \bar{\sigma}'_\lambda(z) \bar{\omega}_\lambda(z + a)] \\ i\hbar \partial_a \bar{\omega}'_\lambda(a) = & -i\hbar \lambda \bar{\omega}'_\lambda(a) - \hbar \omega \bar{\omega}'_\lambda(a) + i\hbar \bar{\sigma}'_\lambda(a) \\ & + \int_{-\infty}^0 dz [\bar{\omega}_\lambda(z) \bar{\sigma}'_\lambda(z + a) + \bar{\sigma}_\lambda(z) \bar{\omega}'_\lambda(z + a)]. \end{aligned} \quad (4)$$

TF pierwszego równania

$$\begin{aligned} -\hbar k \omega_\lambda(k) = & -i\hbar \lambda \omega_\lambda(k) + \hbar \omega'_\lambda(k) + i\hbar \sigma_\lambda(k) \\ & -\sigma_\lambda(k) \int_{-\infty}^0 dz \bar{\omega}'_\lambda(z) e^{ikz} - \omega_\lambda(k) \int_{-\infty}^0 dz \bar{\sigma}_\lambda^*(z) e^{ikz}, \end{aligned} \quad (5)$$

i analogicznie drugiego, prowadzi już bezpośrednio do (4.14).

E.2 Niehermitowska ewolucja

Dla niehermitowskiego Hamiltonianu (4.29)

$$\hat{H}_\lambda = \hat{H} - i\hbar \lambda |\Omega\rangle \langle \Omega| = \hat{H}'_0 + \hat{V}, \quad \hat{H}'_0 = \hat{H}_0 - i\hbar \lambda |\Omega\rangle \langle \Omega| \quad (6)$$

i stanu postaci $|\psi(t)\rangle = \psi_\lambda(t) |\Omega\rangle + \int dx \psi_\lambda(x, t) |x\rangle$ spełnione są równania

$$i\hbar \partial_t \psi_\lambda(t) = -i\hbar \lambda \psi_\lambda(t) + \int \bar{V}^*(x) \psi_\lambda(x, t) dx, \quad i\hbar \partial_t \psi_\lambda(x, t) = -i\hbar \partial_x \psi_\lambda(x, t) + \bar{V}(x) \psi_\lambda(t). \quad (7)$$

Po transformacji Laplace'a (przy warunku początkowym $|\psi(0)\rangle = |\Omega\rangle$ i oznaczając $s = i\omega$) uzyskuje się, podobnie jak w A, równanie wyznaczające bieguny $\tilde{\psi}_\lambda(\omega)$,

$$\hbar \omega + i\hbar \lambda - \sigma_\lambda^<(0) = 0, \quad (8)$$

przy czym ostatnie wyrażenie dane jest przez (4.22). Stąd wynika, że

$$\tilde{\psi}_\lambda(\omega) = \frac{1}{\omega + i\lambda - \sigma_\lambda(0)/\hbar}. \quad (9)$$

Powyższe wyrażenie ma rozwiązania powyżej osi rzeczywistej. Łatwo się o tym przekonać, wprowadzając oznaczenie $\nu = \omega + i\lambda$:

$$i\hbar^2 \nu = \int dx \int dy \theta(x-y) \bar{V}^*(x) \bar{V}(y) e^{i(\nu-i\lambda)(x-y)}. \quad (10)$$

Ponownie powtarzając argumenty z A uzyskuje się $\text{Im } \nu < 0$, a więc tym bardziej $\text{Im } \omega = \text{Im } (\nu - i\lambda) < 0$. Stąd też

$$\psi_\lambda(t) = i \int d\omega \frac{1}{\omega + i\lambda - \sigma_\lambda(0)/\hbar}. \quad (11)$$

Warto jeszcze odnotować, że korzystając z (4.22) uzyskuje się

$$\tilde{\psi}_\lambda(\omega + k) = \frac{1}{\omega + k + i\lambda - \sigma_\lambda(k)/\hbar}, \quad (12)$$

co po sprzężeniu zespolonym i zastąpieniu ω przez ω' odtwarza mianownik (4.28).

Poszukując teraz wyrażenia stosownego dla krótkich czasów. Można zdefiniować obraz oddziaływania jako:

$$\hat{V}(t) = e^{iH'_0 t} \hat{V} e^{-iH'_0 t} = \int dk \left(V(k) |\Omega\rangle \langle k| e^{\lambda t} e^{-ikt} + V(k) |k\rangle \langle \Omega| e^{-\lambda t} e^{ikt} \right). \quad (13)$$

W tym obrazie równanie Schrödingera dla operatora ewolucji jest spełnione przez rozwinięcie

$$e^{-i\hat{H}'t/\hbar} = e^{-i\hat{H}_0't} \left(1 - i \int_0^t dt' \hat{V}'(t') + (-i)^2 \int_0^t dt' \hat{V}'(t') \int_0^{t'} dt'' \hat{V}'(t'') + \dots \right). \quad (14)$$

Do pierwszego nieznikającego wyrazu:

$$\langle \Omega | e^{-i\hat{H}'t/\hbar} | \Omega \rangle = e^{-\lambda t} \left[1 + \frac{1}{\hbar^2} \int dk |V(k)|^2 \left(\frac{it}{k + i\lambda} + \frac{e^{-ikt + \lambda t} - 1}{(k + i\lambda)^2} \right) \right], \quad (15)$$

co było do okazania.

E.3 Krok II

Tu wyprowadzam równanie (4.39). Obliczenia wykonywane są w biegunie (4.7). Do drugiego kroku iteracji potrzeba wielkości

$$\begin{aligned} \omega^i(k) = & \frac{1}{i\hbar} \int dq |V(q)|^2 \int da e^{-iqa} e^{i\omega a} \\ & \times \int dk' \frac{e^{ik'a}}{\hbar k' - i\hbar\lambda + \hbar\omega' - \sigma_\lambda^<(k')} \cdot \frac{1}{i(k' - k - i\epsilon)}, \end{aligned} \quad (16)$$

co prowadzi do wzoru:

$$\begin{aligned} \int dk \omega^{ii}(k) = & \int dk \omega_\lambda^i(k) \\ & + \frac{1}{\hbar^2} \int dq |V(q)|^2 \int dq' |V(q')|^2 \int da e^{-i(q-q')a} e^{i(\omega-\omega')a} \\ & \times \int dk \int dk' \frac{e^{i(k-k')a}}{[\hbar k - i\hbar\lambda + \hbar\omega' - \sigma_\lambda^<(k)][\hbar k' + i\hbar\lambda + \hbar\omega - \sigma_\lambda^<(k')]} \cdot \frac{1}{i(k' - k - i\epsilon)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Jak wynika z dyskusji z poprzedniego kroku, ostatnia linijka wprowadza ograniczenie domeny całkowania $\theta(a)$, a jej wartość to:

$$\int_a^\infty da' |\psi_\lambda(a')|^2, \quad (18)$$

czyli po scałkowaniu przez części

$$\int da e^{ica} \int_a^\infty da' |\psi_\lambda(a')|^2 = \frac{1}{ic} |\psi_\lambda(0)|^2 + \int_0^\infty da \frac{|\psi_\lambda(a)|^2 e^{ica}}{ic}, \quad (19)$$

przy czym $|\psi_\lambda(0)|^2 = 0$. Stąd już wychodzi (4.39).

E.4 Funkcje pierwotne

W sekcji tej analizuję funkcje $\psi(x)$ oraz $\psi'(y)$ rozwiązujące równania (4.8)-(4.10), w przybliżeniu. Zgodnie z dodatkiem E.2, zapisuję formalnie

$$\left(\hbar k + i\hbar\lambda + \hbar\omega + \frac{2\pi}{\hbar} \int dq \frac{|V(q)|^2}{q - k - \omega - i\epsilon} \right)^{-1} = \frac{1}{i\hbar} \psi_\lambda^{prep}(k + \omega) \quad (20)$$

i td. Należy pamiętać, że ω może być zespolone. Dalej, równania (4.14) to równoważnie

$$\begin{aligned}\psi(k) &= \frac{1}{i\hbar} \psi_{\lambda}^{prep*}(k + \omega') \frac{1}{2\pi i\hbar} V(k + \omega) \left(i\hbar + \int dq \frac{2\pi V(q + \omega') \psi'(q)}{i(q - k + i\epsilon)} \right) \\ \psi'(k) &= \frac{1}{i\hbar} \psi_{\lambda}^{prep}(k + \omega) \frac{1}{2\pi i\hbar} V^*(k + \omega') \left(i\hbar - \int dq \frac{2\pi V^*(q + \omega) \psi(q)}{i(q - k - i\epsilon)} \right).\end{aligned}\quad (21)$$

Przez podstawienia, z równań (21) otrzymuje się:

$$\begin{aligned}\psi(k) &= \frac{V(k + \omega)}{2\pi i\hbar} \psi_{\lambda}^{prep*}(k + \omega') \left(1 + \int dq \frac{1}{(i\hbar)^2} \psi_{\lambda}^{prep}(q + \omega) \frac{|V(q + \omega')|^2}{i(q - k + i\epsilon)} \right. \\ &\quad \left. + \int dq \frac{1}{(i\hbar)^2} \psi_{\lambda}^{prep}(q + \omega) \frac{|V(q + \omega')|^2}{i(q - k + i\epsilon)} \int dq^1 \frac{-1}{(i\hbar)^2} \psi_{\lambda}^{prep*}(q^1 + \omega') \frac{|V(q^1 + \omega)|^2}{i(q^1 - q - i\epsilon)} + \dots \right),\end{aligned}\quad (22)$$

i analogicznie dla $\psi'(k)$. Po ograniczeniu się do najniższej potęgi $\sqrt{\gamma}$ pozostaje

$$\psi(k - \omega) = \frac{V(k)}{2\pi (\hbar k - is - i\hbar\lambda)},\quad (23)$$

czy równoważnie

$$\begin{aligned}\psi(x) e^{i\omega x} &= \int dk e^{ikx + i\omega x} \psi(k) = \int dk e^{ikx} \psi(k - \omega) = \\ &= \int \frac{dk V(k) e^{ikx}}{2\pi (\hbar k - is - i\hbar\lambda)}.\end{aligned}\quad (24)$$

Zatem

$$\tilde{\rho}(x, s) = \int \frac{dk V(k) \tilde{\rho}_0(s)}{2\pi (\hbar k - is - i\hbar\lambda)}.\quad (25)$$

Rozdział F

Uzupełnienia do rozdziału 5.

Spis treści

F.1	Pomiar rzutowy dla sumy Lorentzianów	87
F.2	Uzyskanie rozwiązań zanikowych równania Lindblada	88
F.3	Elementy macierzy gęstości rozwiązującej równania Lindblada	90

F.1 Pomiar rzutowy dla sumy Lorentzianów

Streszczam tutaj, jakich zmian należałoby dokonać w tym rozdziale oraz w 2 dla przypadku:

$$|V(k)|^2 = \frac{\gamma_1}{2\pi} \frac{\Delta_1}{(k - k_0)^2 + \left(\frac{\Delta_1}{2}\right)^2} - \frac{\gamma_2}{2\pi} \frac{\Delta_2}{(k - k_0)^2 + \left(\frac{\Delta_2}{2}\right)^2} \quad (1)$$

(przy czym $\gamma_1/\Delta_1 > \gamma_2/\Delta_2$ by zapewnić $|V(k)|^2 > 0$), odpowiednia przestrzeń Hilberta pseudomodów zawiera dwa pseudomody. Zapisując formalnie stan:

$$|\psi(t)\rangle = \psi_0(t) |\Omega\rangle + \psi_1(t) |k_1\rangle + \psi_2(t) |k_2\rangle, \quad (2)$$

można równania ruchu doprowadzić do postaci [33]:

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\psi_0(t) &= \sqrt{\gamma_1}\psi_1(t) + i\sqrt{\gamma_2}\psi_2(t), \\ i\hbar\partial_t\psi_1(t) &= \hbar(k_0 - i\Delta_1/2)\psi_1(t) + \sqrt{\gamma_1}\psi_0(t), \\ i\hbar\partial_t\psi_2(t) &= \hbar(k_0 - i\Delta_2/2)\psi_2(t) + i\sqrt{\gamma_2}\psi_0(t), \end{aligned} \quad (3)$$

zaś po transformacie Laplace'a:

$$\begin{aligned} i\hbar s\tilde{\psi}_0(s) &= i\hbar\psi_0(0) + \sqrt{\gamma_1}\tilde{\psi}_1(s) + i\sqrt{\gamma_2}\tilde{\psi}_2(s), \\ i\hbar(s + ik_0 + \Delta_1/2)\tilde{\psi}_1(s) &= i\hbar\psi_1(0) + \sqrt{\gamma_1}\tilde{\psi}_0(s), \\ i\hbar(s + ik_0 + \Delta_2/2)\tilde{\psi}_2(s) &= i\hbar\psi_2(0) + i\sqrt{\gamma_2}\tilde{\psi}_0(s). \end{aligned} \quad (4)$$

Ponownie oznaczam $\hat{W} = e^{-i\hat{G}t}$ jako opisujący ten przypadek operator ewolucji nieunitarnej. Do opisu ewolucji pod wpływem operatorów rzutowych potrzeba obliczyć następujące

amplitudy:

$$\begin{aligned}\langle \Omega | \hat{W} | \Omega \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds e^{st} \left(s + \frac{1}{\hbar^2} \frac{\gamma_1}{s + ik_0 + \Delta_1/2} - \frac{1}{\hbar^2} \frac{\gamma_2}{s + ik_0 + \Delta_2/2} \right)^{-1}, \\ \langle k_1 | \hat{W} | k_1 \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds e^{st} \left(s + ik_0 + \Delta_1/2 + \gamma_1 \left(s - \frac{\gamma_2}{s + ik_0 + \Delta_2/2} \right)^{-1} \right)^{-1}, \\ \langle k_2 | \hat{W} | k_2 \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds e^{st} \left(s + ik_0 + \Delta_2/2 - \gamma_2 \left(s - \frac{\gamma_1}{s + ik_0 + \Delta_1/2} \right)^{-1} \right)^{-1},\end{aligned}\quad (5)$$

oraz amplitudy przejścia obliczane w podobny sposób

$$\begin{aligned}\langle k_1 | \hat{W} | \Omega \rangle, \quad \langle \Omega | \hat{W} | k_1 \rangle, \\ \langle k_2 | \hat{W} | \Omega \rangle, \quad \langle \Omega | \hat{W} | k_2 \rangle.\end{aligned}\quad (6)$$

Zamiast macierzy (2.8) wprowadzić tu można macierz:

$$P = \begin{pmatrix} |\langle \Omega | \hat{W} | \Omega \rangle|^2 & |\langle k_1 | \hat{W} | \Omega \rangle|^2 & |\langle k_2 | \hat{W} | \Omega \rangle|^2 \\ |\langle k_1 | \hat{W} | \Omega \rangle|^2 & |\langle k_1 | \hat{W} | k_1 \rangle|^2 & 0 \\ |\langle k_2 | \hat{W} | \Omega \rangle|^2 & 0 & |\langle k_2 | \hat{W} | k_2 \rangle|^2 \end{pmatrix}.\quad (7)$$

F.2 Uzyskanie rozwiązań zanikowych równania Lindblada

W dodatku tym wyprowadzam równania (5.35) i (5.36). Rozpisując w równaniu (5.34) macierz gęstości na składowe:

$$\begin{aligned}i\hbar\partial_t\rho_{00}(t) &= \sqrt{\gamma}(\rho_{01}(t) - \rho_{10}(t)), \\ i\hbar\partial_t\rho_{01}(t) &= \hbar k_0\rho_{01} + \sqrt{\gamma}(\rho_{00}(t) - \rho_{11}(t)) - \frac{i\Delta + i\hbar\lambda}{2}\rho_{01}(t), \\ i\hbar\partial_t\rho_{10}(t) &= -\hbar k_0\rho_{10} - \sqrt{\gamma}(\rho_{00}(t) - \rho_{11}(t)) - \frac{i\Delta + i\hbar\lambda}{2}\rho_{10}(t), \\ i\hbar\partial_t\rho_{11}(t) &= -\sqrt{\gamma}(\rho_{01}(t) - \rho_{10}(t)) - i\Delta\rho_{11}(t).\end{aligned}\quad (8)$$

Z kolei owe składowe, dla rozwiązania zanikowego typu $\hat{\rho}(t) = e^{-Rt}\hat{\rho}(0)$ zapisuję jako:

$$\rho_{00} = e^{-Rt}, \quad \rho_{01} = X e^{-Rt}, \quad \rho_{10} = Y e^{-Rt}, \quad \rho_{11} = C e^{-Rt},\quad (9)$$

co sprowadza się do równań:

$$\begin{aligned}-i\hbar R &= \sqrt{\gamma}(X - Y), \\ -i\hbar X(R - ik_0) &= \sqrt{\gamma}(1 - C) - \frac{i\Delta + i\hbar\lambda}{2}X, \\ -i\hbar Y(R + ik_0) &= -\sqrt{\gamma}(1 - C) - \frac{i\Delta + i\hbar\lambda}{2}Y, \\ -i\hbar CR &= -\sqrt{\gamma}(X - Y) - i\Delta C.\end{aligned}\quad (10)$$

oznaczając $D = X + Y$ i eliminując $X - Y$ z pierwszego, można przepisać:

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{-i\hbar R}{\sqrt{\gamma}} R - \hbar k_0 D &= 2\sqrt{\gamma}(1 - C) - \frac{i\Delta + i\hbar\lambda - i\hbar R}{2} \frac{-i\hbar R}{\sqrt{\gamma}}, \\ -i\hbar DR - \hbar k_0 \frac{-i\hbar R}{\sqrt{\gamma}} &= -i(\Delta/2 + \hbar\lambda/2)D, \\ -i\hbar CR &= i\hbar R - i\Delta C. \end{aligned} \quad (11)$$

Równanie na R przyjmuje postać:

$$-R^2 + k_0^2 \frac{R}{(\Delta/2\hbar) + (\lambda/2) - R} - 2\gamma \frac{(\Delta/\hbar) - 2R}{(\Delta/\hbar) - R} + \frac{1}{2}((\Delta/\hbar) + \lambda)R = 0, \quad (12)$$

co sprowadza się do równania (5.35).

Dla $k_0 = 0$ układ równań (11) przechodzi na:

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{-i\hbar R}{\sqrt{\gamma}} R &= 2\gamma(1 - C) - \frac{i\Delta + i\hbar\lambda - i\hbar R}{2} \frac{-i\hbar R}{\sqrt{\gamma}}, \\ 2\hbar DR &= (\Delta + \hbar\lambda)D, \\ \hbar CR &= -\hbar R + \Delta C. \end{aligned} \quad (13)$$

Rozwiązaniem drugiego dla $D \neq 0$, jest $\hbar R = \frac{1}{2}(\Delta + \hbar\lambda)$. To jednak nie spełnia pozostałych równań, zatem $D = 0$ ($X = -Y = -i\hbar R/2\sqrt{\gamma}$). Z pozostałych równań łatwo uzyskać już (5.36).

Oznaczę teraz przez $R_{\Delta/2\hbar+\lambda/2\pm ik_0}$ rozwiązanie dla $k_0 \neq 0$, które przy $\gamma \rightarrow 0$ zbiega do zera. Rozpatrzę przypadek $k_0 \rightarrow 0$ i superpozycję dwóch stanów zanikowych o tych wykładnikach. Z równań (11),

$$X = \frac{-i(\sqrt{\gamma}/\hbar)(\Delta/\hbar - 2R)}{[\Delta/\hbar - R] \cdot [(\Delta/2\hbar) + \lambda/2 + ik_0 - R]}, \quad Y = X^*, \quad (14)$$

a także

$$\text{Im } X = \hbar R/2\sqrt{\gamma} \quad (15)$$

przy czym dla $k_0 = 0$, $X = i\text{Im } X$. Superpozycję dwóch stanów zanikowych należącą do przestrzeni Hilberta zapisać można jako ($C = R(\Delta/\hbar - R)^{-1}$):

$$Ae^{-Rt} \begin{pmatrix} 1 & X \\ X^* & C \end{pmatrix} + A^* e^{-R^*t} \begin{pmatrix} 1 & X^* \\ X & C^* \end{pmatrix} = \quad (16)$$

$$= 2\text{Re} (Ae^{-Rt}) \begin{pmatrix} 1 & \text{Re } X \\ \text{Re } X & \text{Re } C \end{pmatrix} - 2\text{Im} (Ae^{-Rt}) \begin{pmatrix} 1 & \text{Im } X \\ -\text{Im } X & \text{Im } C \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Drugie wyrażenie przechodzi na rozwiązanie uzyskane wyżej dla $k_0 = 0$. Możliwe, że pierwsze wyrażenie nie znika jednak w tej granicy, gdyż np.

$$(e^{i\text{Im } Rt} - e^{-i\text{Im } Rt}) \begin{pmatrix} 1 & \text{Re } X \\ \text{Re } X & \text{Re } C \end{pmatrix} \quad (18)$$

zachowuje się jak funkcja sinc. Nie będę badał tej hipotezy, bo, szczęśliwie, trzy stany dla $k_0 = 0$ wystarczą do konstrukcji interesującego mnie przypadku stanu początkowego.

F.3 Elementy macierzy gęstości rozwiązującej równania Lindblada

Równania (5.34) rozpisuję na składowe macierzy $\hat{\rho}$ i przepisuję z użyciem oznaczeń $y_- = (\rho_{01}(t) - \rho_{10}(t)) / \hbar$, $y_+ = (\rho_{01}(t) + \rho_{10}(t))$:

$$\begin{aligned}\partial_t \rho_{00}(t) &= \frac{\sqrt{\gamma}}{i\hbar} y_-, \\ \partial_t \rho_{11}(t) &= -\frac{\sqrt{\gamma}}{i\hbar} y_- - (\Delta/\hbar) \rho_{11}(t), \\ \partial_t y_-(t) &= -ik_0 y_+ - \frac{\Delta/\hbar + \lambda}{2} y_- - 2\frac{\sqrt{\gamma}}{i\hbar} (\rho_{00}(t) - \rho_{11}(t)), \\ \partial_t y_+(t) &= -ik_0 y_- - \frac{\Delta/\hbar + \lambda}{2} y_+.\end{aligned}\tag{19}$$

Transformata Laplace'a, przy warunkach początkowych $\rho_{00}(0) = x_i$, $y_{\pm}(0) = y_{i,\pm}(0)$, $\rho_{11}(0) = 0$:

$$\begin{aligned}s\tilde{\rho}_{00} - x_i &= \frac{\sqrt{\gamma}}{i\hbar} \tilde{y}_-, \\ s\tilde{\rho}_{11}(t) &= -\frac{\sqrt{\gamma}}{i\hbar} \tilde{y}_- - (\Delta/\hbar) \tilde{\rho}_{11}(t), \\ s\tilde{y}_- &= -ik_0 \tilde{y}_+ - \frac{\Delta/\hbar + \lambda}{2} \tilde{y}_- - 2\frac{\sqrt{\gamma}}{i\hbar} (\tilde{\rho}_{00}(t) - \tilde{\rho}_{11}(t)), \\ s\tilde{y}_+ &= -ik_0 \tilde{y}_- - \frac{\Delta/\hbar + \lambda}{2} \tilde{y}_+,\end{aligned}\tag{20}$$

czyli

$$\begin{aligned}\tilde{y}_- &= \frac{-2\frac{\sqrt{\gamma}}{i\hbar} x_i (s + \Delta/\hbar)(s + \Delta/2\hbar + \lambda/2)}{W(s)}, \\ W(s) &\equiv s(s + \Delta/\hbar)(s + \Delta/2\hbar + \lambda/2)^2 + k_0^2 s(s + \Delta/\hbar), \\ &\quad + 2\gamma(2s + \Delta/\hbar)(s + \Delta/2\hbar + \lambda/2).\end{aligned}\tag{21}$$

Dalej:

$$\tilde{\rho}_{11}(s) = -\frac{2\gamma x_i (s + \Delta/2\hbar + \lambda/2)}{W(s)},\tag{22}$$

przy czym potrzebuję przypadku $x_i = 1$. Oprócz tego potrzebuję:

$$\tilde{\rho}_{00}(s) = \frac{x_i}{s} + \frac{2\gamma x_i (s + \Delta/\hbar)(s + \Delta/2\hbar + \lambda/2)}{sW(s)}.\tag{23}$$

Bibliografia

- [1] N. Bohr. „Discussion with Einstein on epistemological problems in atomic physics”. w: *Quantum theory and measurement*. Red. J. A. Wheeler i W. H. Zurek. T. 53. Princeton University Press, 2014, s. 9–49.
- [2] W. M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger i D. J. Wineland. „Quantum zeno effect”. *Physical Review A* 41.5 (1990), s. 2295.
- [3] S. R. Wilkinson, C. F. Bharucha, M. C. Fischer, K. W. Madison, P. R. Morrow, Q. Niu, B. Sundaram i M. G. Raizen. „Experimental evidence for non-exponential decay in quantum tunnelling”. *Nature* 387.6633 (1997), s. 575–577.
- [4] P. Kwiat, H. Weinfurter, T. Herzog, A. Zeilinger i M. A. Kasevich. „Interaction-free measurement”. *Physical Review Letters* 74.24 (1995), s. 4763.
- [5] M. Kitano, K. Yamane i T. Ikushima. „Spin manipulation by absorption-free optical pumping”. *Physical Review A* 59.5 (1999), s. 3710.
- [6] C. Balzer, R. Huesmann, W. Neuhauser i P. E. Toschek. „The quantum Zeno effect—evolution of an atom impeded by measurement”. *Optics communications* 180.1-3 (2000), s. 115–120.
- [7] T. Nakanishi, K. Yamane i M. Kitano. „Absorption-free optical control of spin systems: The quantum Zeno effect in optical pumping”. *Physical Review A* 65.1 (2001), s. 013404.
- [8] M. Fischer, B. Gutiérrez-Medina i M. Raizen. „Observation of the quantum Zeno and anti-Zeno effects in an unstable system”. *Physical review letters* 87.4 (2001), s. 040402.
- [9] P. Facchi, Y. Nakaguro, H. Nakazato, S. Pascazio, M. Unoki i K. Yuasa. „Optimization of a neutron-spin test of the quantum Zeno effect”. *Physical Review A* 68.1 (2003), s. 012107.
- [10] A. Luis. „Zeno and anti-Zeno effects in two-level systems”. *Physical review A* 67.6 (2003), s. 062113.
- [11] E. W. Streed, J. Mun, M. Boyd, G. K. Campbell, P. Medley, W. Ketterle i D. E. Pritchard. „Continuous and pulsed quantum Zeno effect”. *Physical review letters* 97.26 (2006), s. 260402.
- [12] L. Schulman. „Observational line broadening and the duration of a quantum jump”. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 30.9 (1997), s. L293.
- [13] C. B. Chiu, B. Misra i E. C. G. Sudarshan. „The time scale for the quantum zeno paradox and proton decay”. *Physics Letters B* 117.1-2 (1982), s. 34–40.
- [14] B. Misra i E. C. G. Sudarshan. „The Zeno’s paradox in quantum theory”. *Journal of Mathematical Physics* 18.4 (1977), s. 756–763.
- [15] Y. Aharonov i D. Rohrlich. *Quantum paradoxes: quantum theory for the perplexed*. John Wiley & Sons, 2008.
- [16] L. S. Schulman, A. Ranfagni i D. Mugnai. „Characteristic scales for dominated time evolution”. *Physica Scripta* 49.5 (1994), s. 536.
- [17] R. J. Cook. „What are quantum jumps?” *Physica Scripta* 1988.T21 (1988), s. 49.

- [18] K. Kraus. „Measuring processes in quantum mechanics I. Continuous observation and the watchdog effect”. *Foundations of Physics* 11.7 (1981), s. 547–576.
- [19] E. Joos. „Continuous measurement: Watchdog effect versus golden rule”. *Physical Review D* 29.8 (1984), s. 1626.
- [20] T. Petrosky, S. Tasaki i I. Prigogine. „Quantum zeno effect”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 170.2 (1991), s. 306–325.
- [21] L. S. Schulman. „Continuous and pulsed observations in the quantum Zeno effect”. *Physical Review A* 57.3 (1998), s. 1509.
- [22] K. Koshino i A. Shimizu. „Quantum Zeno effect by general measurements”. *Physics reports* 412.4 (2005), s. 191–275.
- [23] H. M. Wiseman i G. J. Milburn. *Quantum measurement and control*. Cambridge university press, 2009.
- [24] A. Bednorz, W. Belzig i A. Nitzan. „Nonclassical time correlation functions in continuous quantum measurement”. *New Journal of Physics* 14.1 (2012), s. 013009.
- [25] B. Elattari i S. A. Gurvitz. „Effect of measurement on the decay rate of a quantum system”. *Physical review letters* 84.10 (2000), s. 2047.
- [26] B. Elattari i S. A. Gurvitz. „Influence of measurement on the lifetime and the linewidth of unstable systems”. *Physical Review A* 62.3 (2000), s. 032102.
- [27] A. Bednorz i W. Belzig. „Formulation of time-resolved counting statistics based on a positive-operator-valued measure”. *Physical review letters* 101.20 (2008), s. 206803.
- [28] A. Bednorz i W. Belzig. „Quasiprobabilistic interpretation of weak measurements in mesoscopic junctions”. *Physical review letters* 105.10 (2010), s. 106803.
- [29] S. Pascazio. „All you ever wanted to know about the quantum Zeno effect in 70 minutes”. *Open Systems & Information Dynamics* 21.01n02 (2014), s. 1440007.
- [30] L. Fonda, G. C. Ghirardi i A. Rimini. „On the Fermi golden rule”. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)* 25.4 (1975), s. 537–548.
- [31] Z. Zhou, Z. Lü, H. Zheng i H.-S. Goan. „Quantum Zeno and anti-Zeno effects in open quantum systems”. *Physical Review A* 96.3 (2017), s. 032101.
- [32] Y. Aharonov, D. Z. Albert i L. Vaidman. „How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100”. *Physical review letters* 60.14 (1988), s. 1351.
- [33] B. M. Garraway. „Decay of an atom coupled strongly to a reservoir”. *Physical Review A* 55.6 (1997), s. 4636.
- [34] M. R. Da Costa, A. O. Caldeira, S. M. Dutra i H. Westfahl Jr. „Exact diagonalization of two quantum models for the damped harmonic oscillator”. *Physical Review A* 61.2 (2000), s. 022107.
- [35] Z. Zhou, Z. Lü i H. Zheng. „Protecting coherence by reservoir engineering: intense bath disturbance”. *Quantum Information Processing* 15.8 (2016), s. 3223–3241.
- [36] A. G. Kofman i G. Kurizki. „Acceleration of quantum decay processes by frequent observations”. *Nature* 405.6786 (2000), s. 546.
- [37] R. Sawyer. „Slowing of decay processes by interactions with a medium”. *Physical review letters* 69.17 (1992), s. 2457.
- [38] B. Nagels, L. J. F. Hermans i P. L. Chapovsky. „Quantum Zeno effect induced by collisions”. *Physical review letters* 79.17 (1997), s. 3097.

- [39] A. Beige, D. Braun, B. Tregenna i P. L. Knight. „Quantum computing using dissipation to remain in a decoherence-free subspace”. *Physical review letters* 85.8 (2000), s. 1762.
- [40] G. E. Stedman. „Fermi’s Golden Rule—An Exercise in Quantum Field Theory”. *American Journal of Physics* 39.2 (1971), s. 205–214.
- [41] H. Nakazato, M. Namiki i S. Pascazio. „Temporal behavior of quantum mechanical systems”. *International Journal of Modern Physics B* 10.03 (1996), s. 247–295.
- [42] F. Giacosa i G. Pagliara. „Oscillations in the decay law: A possible quantum mechanical explanation of the anomaly in the experiment at the GSI facility”. *Quantum Matter* 2.1 (2013), s. 54–59.
- [43] F. Giacosa. „Non-exponential decay in Quantum Mechanics and Quantum Field Theory”. w: *Journal of Physics: Conference Series*. T. 538. 1. IOP Publishing. 2014, s. 012008.
- [44] L. Khalfin. „Contribution to the decay theory of a quasi-stationary state”. *Sov. Phys. JETP* 6.6 (1958), s. 1053–1063.
- [45] L. I. Plimak i S. Stenholm. „Causal signal transmission by quantum fields. V: Generalised Keldysh rotations and electromagnetic response of the Dirac sea”. *Annals of Physics* 327.11 (2012), s. 2691–2741.
- [46] A. Matzkin. „Weak values and quantum properties”. *Foundations of Physics* 49.3 (2019), s. 298–316.
- [47] E. P. Wigner. „On the quantum correction for thermodynamic equilibrium”. *Phys. Rev* 40 (1932), s. 749.
- [48] M. Hillery, R. F. O’Connell, M. O. Scully i E. P. Wigner. „Distribution functions in physics: Fundamentals”. *Physics reports* 106.3 (1984), s. 121–167.
- [49] W. P. Schleich. *Quantum optics in phase space*. John Wiley & Sons, 2011.
- [50] L. I. Plimak i S. Stenholm. „Causal signal transmission by quantum fields. II: Quantum-statistical response of interacting bosons”. *Annals of Physics* 323.8 (2008), s. 1989–2017.
- [51] A. Bednorz, K. Franke i W. Belzig. „Noninvasiveness and time symmetry of weak measurements”. *New Journal of Physics* 15.2 (2013), s. 023043.
- [52] S. Sołtan, M. Frączak, W. Belzig i A. Bednorz. „Conservation laws in quantum noninvasive measurements”. *Physical Review Research* 3.1 (2021), s. 013247.
- [53] S. Sołtan, M. Frączak, W. Belzig i A. Bednorz. „Modelling of weak quantum measurements consistent with conservation laws”. *The European Physical Journal Special Topics* (2021), s. 1–7.
- [54] J. S. Bell. „On the Einstein Podolsky Rosen paradox”. *Physics Physique Fizika* 1.3 (1964), s. 195.
- [55] A. J. Leggett i A. Garg. „Quantum mechanics versus macroscopic realism: Is the flux there when nobody looks?” *Physical Review Letters* 54.9 (1985), s. 857.
- [56] K. Friedrichs. „On the perturbation of continuous spectra”. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 1.4 (1948), s. 361–406.
- [57] I. Białynicki-Birula i T. Sowiński. „Quantum electrodynamics of qubits”. *Physical Review A* 76.6 (2007), s. 062106.
- [58] K. T. Alligood, T. D. Sauer i J. A. Yorke. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, 1996.
- [59] E. Rees. „Graphical discussion of the roots of a quartic equation”. *The American Mathematical Monthly* 29.2 (1922), s. 51–55.

- [60] T. Sowiński. „Two-level atom at finite temperature”. *arXiv preprint arXiv:0901.3268* (2009).
- [61] A. S. Holevo. *Probabilistic and statistical aspects of quantum theory*. T. 1. Springer Science & Business Media, 2011.
- [62] M.-D. Choi. „Completely positive linear maps on complex matrices”. *Linear algebra and its applications* 10.3 (1975), s. 285–290.
- [63] V. Belavkin i P. Staszewski. „A Radon-Nikodym theorem for completely positive maps”. *Reports on mathematical physics* 24.1 (1986), s. 49–55.
- [64] R. Beneduci. „Notes on Naimark’s dilation theorem”. w: *Journal of Physics: Conference Series*. T. 1638. 1. IOP Publishing. 2020, s. 012006.
- [65] J. Von Neumann. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton university press, 2018.