

Streszczenie rozprawy doktorskiej

“Struktury rekurencyjne dla szeregów Nahm’a”

Dmitry Noshchenko

Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Promotor: prof. dr hab. Piotr Sułkowski

Październik 2021

W ciągu ostatniego półwiecza idea unifikacji stała się jednym z przewodnich zagadnień w fizyce teoretycznej. Kluczowym celem tego programu jest sformułowanie kwantowej teorii grawitacji uogólniającej ogólną teorię względności Einsteina oraz jej unifikacja z Modelem Standardowym fizyki cząstek elementarnych. Istotną propozycją, w ramach której ten program mógłby być zrealizowany, jest teoria strun. Niezależnie od samej unifikacji i związków z Modelem Standardowym, teoria ta łączy się także z wieloma zagadnieniami kwantowej teorii pola oraz topologii niskowymiarowej. Właśnie takim związkom poświęcona jest niniejsza rozprawa.

Rozprawa ta poświęcona jest m.in. ważnej rodzinie funkcji q -hipergeometrycznych, zwanych szeregami Nahma, które mają zastosowanie w wielu obszarach fizyki i matematyki. Po raz pierwszy szeregi takie pojawiły się w kontekście dwuwymiarowych wymiernych konforemnych teorii pola [NRT93]. Niezależnie, szeregi takie charakteryzują przestrzenie moduli reprezentacji kołczanów [KS08] (kołczan jest grafem skierowanym, a jego reprezentacja przypisuje przestrzenie wektorowe do jego wierzchołków oraz odwzorowania liniowe do krawędzi). W tym kontekście szeregi Nahma zawierają informację o pewnych liczbowych niezmiennikach – uogólnionych niezmiennikach Dolandsona-Thomasa – które z fizycznego punktu widzenia charakteryzują stany BPS (Bogomol’nyi-Prasad-Sommerfield) supersymetrycznych teorii cechowania odpowiadających takim kołczanom [KS08; GMN10]. Ponadto, dla pewnych szczególnych kołczanów odpowiadających węzłom w ramach korespondencji odkrytej w pracach [Kuc+17; Kuc+19], szeregi Nahma generują niezmienniki tych węzłów, takie jak kolorowe wielomiany HOMFLY-PT (Hoste-Ocneanu-Millet-Freyd-Lickorish-Yetter-Przytycki-Traczyk). Związek kołczanów z węzłami może być wyjaśniony poprzez teorię strun, której amplitudy z jednej strony zawierają informację o wspomnianych wyżej stanach BPS [OV00], a z drugiej związane są z teorią Cherna-Simonsa, w której wartości oczekiwane pętli Wilsona odtwarzają niezmienniki węzłów takie jak wielomiany HOMFLY-PT [Wit89].

Głównym celem niniejszej rozprawy jest zbadanie struktur rekurencyjnych - rekurencji topologicznych, rozwinięć WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin), rekurencji zadawanych przez krzywe kwantowe - dla szeregów Nahma dla ogólnych kołczanów, a także zrozumienie pewnych aspektów korespondencji pomiędzy węzłami i (w tym wypadku pewnymi szczególnymi) kołczanami. Wyniki otrzymane

w ramach rozprawy są także przedstawione w publikacjach [Bor+19; Lar+20; Nos21; Jan+21]. Poza tym na studiach magisterskich zajmowałem się tematami wykraczającymi poza zakres tej pracy; wyniki są prezentowane w [INP15] i [NP16]. Pracę można podzielić na trzy główne części.

W pierwszej części rozprawy, której wyniki są przedstawione również w pracy [Nos21], definiujemy pojęcie wielomianów A dla kołczanów, oraz pokazujemy, że takie wielomiany A zadają klasyczną granicę szeregów Nahma dla kołczanów oraz spełniają wynikające z K -teorii kryterium kwantyzacji [GS12]. Oznacza to, iż ich kwantowe uogólnienie istnieje. Ponadto znajdujemy ciekawą kombinatoryczną strukturę wielomianów A dla kołczanów oraz jawne formuły na ich „ekstremalne” wersje.

Druga część rozprawy, której wyniki są przedstawione również w publikacji [Lar+20], poświęcona jest zastosowaniu rekurencji topologicznych dla szeregów Nahma. Rekurencje te pozwalają obliczać funkcje korelacji dowolnego rzędu dla danej krzywej spektralnej [Eyn14] (określenie „krzywa spektralna” pochodzi z teorii modeli macierzowych, w ramach których rekurencje topologiczne zostały sformułowane po raz pierwszy). Rekurencje te określane są jako „topologiczne”, numerowane są one charakterystykami Eulera funkcji korelacji, odpowiadających powierzchniom Riemanna z nakłuciami. W naszych badaniach krzywe spektralne identyfikujemy z wielomianami A dla kołczanów i dla nich stosujemy rekurencje topologiczne, pokazując, że rekonstruuje one odpowiadające tym wielomianom A szeregi Nahma. Rekurencja topologiczna umożliwia zatem kwantyzację wielomianów A i pozwala wyznaczyć ich kwantowe odpowiedniki. Problem ten jest interesujący, ponieważ w pracy [EO15] wykazano, iż amplitudy wyznaczone przez topologiczne rekurencje w modelu B mogą być reinterpretowane jako amplitudy strun topologicznych w modelu A . Rozważając topologiczne rekurencje dla wielomianu A dla kołczanu wyznaczamy zatem amplitudy odpowiadającego mu modelu A topologicznej teorii strun. Ponadto, w tej części rozprawy badamy też kwantowe struktury Airy i podajemy ogólną definicję struktury r -Airy’ego (wyniki te przedstawioną są również w pracy [Bor+19]). Chociaż struktury Airy nie są bezpośrednio związane z sumami Nahma, to kwantowe struktury Airy uogólniają rekurencje topologiczne i mają bezpośredni związek ze strukturami algebricznymi pochodzącymi z konforemnych teorii pola.

Wykazawszy, iż wielomiany A spełniają warunki kwantyzacji, oraz wyznaczwszy ich kwantowe odpowiedniki przy użyciu topologicznych rekurencji, w ostatniej części rozprawy rozważamy kwantowe obiekty, czyli szeregi Nahma odpowiadające różnym węzłom. W szczególności badamy relację lokalnej równoważności dla takich kołczanów, co pozwala na lepsze zrozumienie zależności między węzłami i kołczanami. Z relacji tej wynika, że temu samemu węzłowi może odpowiadać więcej niż jeden kołczan; badana przez nas relacja pozwala znaleźć rekurencyjnie wszystkie równoważne kołczany dla danego węzła. Wyniki tej części są również przedstawione w [Jan+21].

Podsumowując, w niniejszej rozprawie otrzymujemy kilka interesujących wyników dotyczących szeregów Nahma. W szczególności pokazujemy, że wielomiany A dla kołczanów spełniają warunki kwantyzacji, a związany z danym kołczanem szereg Nahma może być zrekonstruowany przy użyciu rekurencji topologicznych. Wyznaczamy także różne równoważne kołczany dla danego węzła, zadające te same sumy Nahma. Wyniki te otwierają również pole do przyszłych badań.

Bibliografia

- [NRT93] Werner Nahm, Andreas Recknagel i Michael Terhoeven. “Dilogarithm Identities in Conformal Field Theory”. W: *Mod. Phys. Lett.* (1993). arXiv: hep-th/9211034.
- [KS08] Maxim Kontsevich i Yan Soibelman. “Stability structures, motivic Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations”. W: (2008). arXiv: 0811.2435 [math.AG].
- [GMN10] Davide Gaiotto, Gregory W. Moore i Andrew Neitzke. “Four-dimensional wall-crossing via three-dimensional field theory”. W: *Commun. Math. Phys.* 299 (2010), s. 163–224. DOI: 10.1007/s00220-010-1071-2. arXiv: 0807.4723 [hep-th].
- [Kuc+17] Piotr Kucharski, Markus Reineke, Marko Stosic i Piotr Sulkowski. “BPS states, knots and quivers”. W: *Phys. Rev. D* 96 (2017), s. 121902. DOI: 10.1103/PhysRevD.96.121902. arXiv: 1707.02991 [hep-th].
- [Kuc+19] Piotr Kucharski, Markus Reineke, Marko Stosic i Piotr Sulkowski. “Knots-quivers correspondence”. W: *Adv. Theor. Math. Phys.* 23.7 (2019), s. 1685. arXiv: 1707.04017 [hep-th].
- [OV00] Hiroshi Ooguri i Cumrun Vafa. “Knot invariants and topological strings”. W: *Nucl. Phys. B* 577 (2000), s. 419–438. DOI: 10.1016/S0550-3213(00)00118-8. arXiv: hep-th/9912123.
- [Wit89] Edward Witten. “Quantum field theory and the Jones polynomial”. W: *Comm. Math. Phys.* 121.3 (1989), s. 351–399. ISSN: 0010-3616.
- [Bor+19] Gaëtan Borot, Vincent Bouchard, Nitin K. Chidambaram, Thomas Creutzig i Dmitry Noshchenko. “Higher Airy structures, W algebras and topological recursion (accepted in *Memoirs of the AMS*)”. W: (2019). arXiv: 1812.08738 [math-ph].
- [Lar+20] Helder Larraguivel, Dmitry Noshchenko, Miłosz Panfil i Piotr Sulkowski. “Nahm sums, quiver A-polynomials and topological recursion”. W: *JHEP* 07 (2020), s. 151. DOI: 10.1007/JHEP07(2020)151. arXiv: 2005.01776 [hep-th].
- [Nos21] Dmitry Noshchenko. “Combinatorics of Nahm sums, quiver resultants and the K-theoretic condition”. W: *JHEP* 03 (2021), s. 236. DOI: 10.1007/JHEP03(2021)236. arXiv: 2007.15398 [hep-th].
- [Jan+21] Jakub Jankowski, Piotr Kucharski, Helder Larraguivel, Dmitry Noshchenko i Piotr Sulkowski. “Permutohedra for knots and quivers (accepted in *Physical Review D*)”. W: (maj 2021). arXiv: 2105.11806 [hep-th].
- [INP15] Igor Il’in, Dmitry Noshchenko i Andrey Perezhogin. “On classification of high-order integrable nonlinear partial differential equations”. W: *Chaos, Solitons & Fractals* 76.C (2015), s. 278–281. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.04.0. arXiv: 1611.09292 [nlin.SI].
- [NP16] Dmitry Noshchenko i Andrey Perezhogin. “On the Painlevé property of a hydrodynamic system”. W: 11 (2016). *Red. E3S Web of Conferences*. DOI: 10.1051/e3sconf/20161100017.
- [GS12] Sergei Gukov i Piotr Sulkowski. “A-polynomial, B-model, and Quantization”. W: *JHEP* 1202 (2012), s. 070. DOI: 10.1007/JHEP02(2012)070. arXiv: 1108.0002 [hep-th].
- [Eyn14] Bertrand Eynard. “A short overview of the “Topological recursion””. W: preprint arXiv:1412.3286 (2014).
- [EO15] Bertrand Eynard i Nicolas Orantin. “Computation of Open Gromov–Witten Invariants for Toric Calabi–Yau 3-Folds by Topological Recursion, a Proof of the BKMP Conjecture”. W: *Commun. Math. Phys.* 337.2 (2015), s. 483–567. DOI: 10.1007/s00220-015-2361-5. arXiv: 1205.1103 [math-ph].