



Centrum Fizyki Teoretycznej Polskiej Akademii Nauk

Al. Lotników 32/46, 02-668 Warszawa

Tel. (+48 22) 847 09 20, Fax/Tel: (+48 22) 843 13 69

Email: cft@cft.edu.pl

NIP 525-000-92-81

REGON 000844815

Warszawa, 27.09.2022

Dr hab. Mikołaj Korzyński
Centrum Fizyki Teoretycznej PAN
Al. Lotników 32/46
02-668 Warszawa

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Tomasza Smółki

Tytuł rozprawy: ***Geometric and topological aspects of non-trivial solutions of Maxwell and Einstein equations***

Promotor: Prof. dr hab. Jacek Jezierski

Dysertacja mgr Tomasza Smółki ma formę pojedynczej rozprawy zawierającej wyniki opublikowane w dwóch pracach, oraz część wyników jeszcze nieopublikowanych. Jej tematem jest sprowadzanie równań falowych na wielkości tensorowe do równań na wielkości skalarne oraz wykorzystanie tego sformułowania do badania rozwiązań równań Maxwella i Einsteina o specjalnych własnościach topologicznych.

Wprowadzanie wielkości skalnych (potencjałów), które mają uprościć równanie lub układ równań różniczkowych na wielkości wektorowe lub tensorowe, jest bardzo starym pomysłem w fizyce matematycznej. Pomysł ten wykorzystywany jest oczywiście w ogólnej teorii względności: równanie Regge-Wheelera opisuje osiowo symetryczne perturbacje metryki Schwarzschilda. Z kolei Andersson i Blue wykorzystali konstrukcję Ipsera i Fackerella potencjału dla pola elektromagnetycznego do dowiedzenia, że energia pola elektromagnetycznego w powoli obracającej się metryce Kerra jest skończona. Autor rozwija ten pomysł i pokazuje konstrukcję skalarnego równania falowego dla szerszej klasy metryk przy użyciu tzw. konforemnych tensorów Yano-Killinga. Z drugiej strony, rozwiązania o szczególnych własnościach topologicznych równań Maxwella były znane wcześniej, ale autor, korzystając z dorobku promotora, pokazuje jak można uogólnić ich konstrukcję na inne metryki i pole o spinie 2 przy użyciu skalarnego sformułowania równań.

Rozprawa napisana jest w języku angielskim. Autor rozpoczyna rozdział pierwszy od krótkiego rysu historycznego związków topologii z teorią elektromagnetyzmu i ogólną teorią względności. Opisuje następnie zawartość rozprawy, oraz wyszczególnia otrzymane prze siebie nowe rezultaty wchodzące w skład pracy.

W rozdziale drugim autor przedstawia teorię konforemnych tensorów Yano-Killinga oraz ich związki z równaniami Maxwella. Przedstawia też rodzinę metryk Plebańskiego-Demiańskiego, opisuje konforemne tensory Yano-Killinga w tych metrykach i wyprowadza kluczowe równanie skalarne (2.60), do którego redukują się równania Maxwella.

Rozdział trzeci rozpoczyna się od krótkiego przypomnienia rezultatów z topologii. Autor przedstawia rozwłóknienie Hopfa, czyli topologicznie nietrywialne odwzorowanie sfery S^3 w S^2 . Potem przedstawia rozwiązanie Rañady próżniowych równań Maxwella, o strukturze linii sił pól topologicznie równoważnej z rozwłóknieniem Hopfa. Potem dyskutowane są topologiczne ładunki, czyli wielkości zależne od topologii rozwiązania. Ładunkiem, który zajmuje autora, jest indeks Hopfa, zdefiniowany jako odpowiednia całka. Tomasz Smolek pokazuje jego związek ze skrętnością (helicity) pola elektrycznego i magnetycznego oraz wyprowadza warunek zachowania tych skrętności w czasie, wyrażony w języku zmiennej skalarnej.

Dalsza część rozdziału trzeciego poświęcona jest równaniom zlinearyzowanej grawitacji bez źródeł na przestrzeni Minkowskiego. Autor opisuje metody redukcji tych równań do skalarnego równania falowego, analogiczną do metody stosowanej do równań Maxwella, a potem konstrukcję rozwiązań analogicznych do hopfionów w teorii Maxwella. Dalej oblicza energię tych rozwiązań, korzystając z kilku definicji, oraz omawia ładunki topologiczne. Rozdział wieńczy krótkie porównanie formalizmów i uzyskanych rezultatów dla teorii Maxwella i zlinearyzowanej grawitacji.

Rozdział czwarty rozpoczyna się od opisu rozwiązania Kerra-Newmana i jego przypadku granicznego: tzw. magicznego pola elektromagnetycznego. Następnie opisany jest pomysł z przesunięciem fundamentalnego rozwiązania równania falowego o wektor o urojonych składowych. Autor pokazuje jak w wyniku tej procedury pojawia się nowe rozwiązanie, tzw. pre-hopfion lub pre-magiczny hopfion, a rozwiązania topologiczne, czyli magiczne hopfiony, autor otrzymuje działając pewnym prostym operatorem różniczkowym na pre-hopfiony. Dalsza część rozdziału to opis własności tych rozwiązań.

Do rozprawy dołączony jest też suplement zawierający opis technicznych wyników oraz standardowych rezultatów wykorzystywanych w pracy, np. własności laplasjanu na sferze dwuwymiarowej i w przestrzeni $\mathbf{R}^3$ czy rozmaite metody opisu pola elektromagnetycznego. Rozprawę zamyka bibliografia licząca 70 pozycji.

Za najwartościowsze wyniki dysertacji uważam wskazanie jak równania Maxwella można zapisać jako równania na potencjał skalarny w przypadku czarnych dziur Demiańskiego-Plebańskiego oraz topologicznie nietrywialne rozwiązania równań Maxwella zbudowane z tzw. magic field. W sformułowaniu Smółki możliwość redukcji równań Maxwell okazuje się związana z faktem, że w tej rodzinie istnieją dwa, wzajemnie dualne konforemne tensory Yano-Killinga, a ponadto rozpinają one niezmienniczą podprzestrzeń endomorfizmu związanego z tensorem Weyla na przestrzeni dwuform. Z drugiej strony, konstrukcja „magicznych hopfionów” oparta jest na wynikach poprzednich rozdziałów: korzysta z możliwości sprowadzenia równań Maxwella do równania na funkcję skalarną, którą z kolei można zapisać w rozkładzie multipolowym.

Praca Smółki łączy dwie dziedziny fizyki matematycznej: teorię nietrywialnych topologicznie rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych oraz teorię zaburzeń w ogólnej teorii względności. Otrzymane wyniki są ciekawe, mam jednak kilka drobnych zastrzeżeń do samej dysertacji.

W rozdziale 2.3.3, wyprowadzając równanie falowe na zespolone pole skalarne (2.60) autor nie wspomina o problemie przejścia od funkcji skalarnej do całego tensora pola elektromagnetycznego, albo pola o spinie 2 w ogólnym przypadku. Przypadek płaski i - szerzej - sferycznie symetryczny opisane są w dalszej części tekstu, wraz z dokładnym algorytmem opisanym w dodatku B i D, ale opisując przypadek czarnych dziur Plebańskiego-Demiańskiego warto przynajmniej wspomnieć jak można zrekonstruować pole elektromagnetyczne w takiej sytuacji.

Ponadto w pracy doktorskiej znalazło się trochę błędów językowych i redaktorskich. Wymienię ich kilka:

- W podrozdziale 3.1.1, str. 28 liczba mnoga słowa „torus” („tori”) czasem używana zamiennie z pojedynczą
- W podrozdziale 4.1.1, str. 53 autor niekonsekwentnie oznacza ładunek elektryczny czasem e , czasem q
- Wyrażenie „covers with the solution”, użyte m. in. na str. 41, wydaje mi się niepoprawne; lepiej zastąpić je „is identical to the solution”.

Żadna z powyższych uwag nie wpływa na moją pozytywną ocenę rozprawy mgr Smółki i opisanych w niej wyników. **Uważam, że rozprawa doktorska Pana mgr Tomasza Smółki spełnia zwyczajowe i formalne warunki stawiane rozprawom doktorskim i dlatego w oparciu o przepisy Ustawy o Stopniach Naukowych i Tytule Naukowym wnoszę do Rady Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie autora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**

Mikołaj Korzyński

Mikołaj Korzyński

27.09.2022