

Prof.dr hab.Maciej Przanowski

Łódź 28.09.2022

Profesor Senior

Instytut Fizyki Politechniki Łódzkiej

Wólczańska 217/221, 93-005 Łódź

Ocena rozprawy doktorskiej Pana mgr. Tomasza Smółki p.t.

***“Geometric and topological aspects of non-trivial
solutions of Maxwell and Einstein equations”***

Pozwolę sobie zacząć od dygresji natury filozoficznej, jednak ściśle związanej z wynikami omawianej rozprawy. Znane jest powszechnie stanowisko *platonizmu matematycznego*, którego najwybitniejszym współczesnym przedstawicielem jest Roger Penrose, utrzymującego, że najistotniejsze pojęcia i konstrukcje matematyki nie są dowolnymi tworam i wymyślonymi przez matematyków lecz istnieją realnie i jedynie są przez matematyków odkrywane. Myślę, że zwolennicy takiego stanowiska jako najsilniejszy argument potwierdzający jego słuszność mogą posłużyć się matematyczną konstrukcją elektrodynamiki Maxwella gdzie swoje głębokie zastosowanie mają różnorodne wyniki czystej matematyki, że wspomnimy chociażby o twierdzeniu Stokesa, algebrze tensorów, formach różniczkowych, teorii koneksji w głównej wiązce włóknistej itd. Rozprawa Pana Tomasza Smółki dostarcza jeszcze jednego istotnego przykładu nieoczekiwanego zupełnie zastosowania abstrakcyjnych idei matematycznych w elektrodynamice maxwellowskiej, mianowicie, zastosowania teorii *rozwłóknienia Hopfa* do analizy struktury pola elektromagnetycznego. Wydaje się, że warto na wyniki ocenianej pracy spojrzeć także z takiego, nieco filozoficznego punktu widzenia.

Rozprawa składa się z czterech rozdziałów, Dodatku (Appendix) i bibliografii. W Dodatku zamieścił Autor niektóre wyniki matematyczne wykorzystane w pracy a także różne podejścia do opisu pola elektromagnetycznego i liniowego pola grawitacyjnego. Pierwszy rozdział jest wstępem do pracy gdzie opisana jest zupełnie jasno idea i osiągnięte rezultaty. Rezultaty te przedstawione są

szczegółowo w trzech pozostałych rozdziałach, drugim, trzecim i czwartym, których treści, jak słusznie przyznaje sam Autor są luźno ze sobą powiązane. Przejdę zatem do analizy wyników poszczególnych rozdziałów.

Rozdział 2 zatytułowany „*Konforemna dwu-forma Yano-Killinga i jej zastosowanie w elektrodynamice dla uogólnionej czarnej dziury*” poświęcony jest w istocie zastosowaniu *konforemnej 2-formy Yano-Killinga (CYK tensor)* do opisu pola elektromagnetycznego w polu grawitacyjnym dopuszczającym istnienie takiej 2-formy. Autor rozpoczyna rozdział od krótkiego wprowadzenia w teorię konforemnych 2-form Yano-Killinga korzystając tutaj głównie z pracy J.Jezierskiego i M.Łukasika (ref.[38] w rozprawie). Następnie analizuje rolę tych 2-form w opisie równań Maxwella w czasoprzestrzeni zakrzywionej dochodząc do ogólnego równania (2.26). Efektywność tego równania testuje w przypadku pola elektromagnetycznego dla metryki Plebańskiego-Demiańskiego opisującej uogólnioną czarną dziurę. Kluczowym i znakomitym wynikiem Autora jest dowód, że w rozważanej metryce układ dwóch rzeczywistych równań różniczkowych złożony z fundamentalnego równania (2.26) i analogicznego równania , w którym w miejsce danej konforemnej 2-formy Yano-Killinga wstawiona jest jej forma dualna redukuje się do jednego zespolonego skalarnego równania falowego z zespolonym potencjałem (Twierdzenie 2.3.1., równanie (2.61)). Jest to istotne uogólnienie równania Fackerella-Ipsera otrzymanego w 1972 roku dla słabego pola elektromagnetycznego wokół czarnej dziury Kerra i jest to z pewnością główny bardzo istotny dla ewentualnych dalszych badań w tym kierunku rezultat rozdziału 2. W związku z rozważaniami tego rozdziału mam pewną uwagę natury technicznej. Autor posługuje się tutaj głównie formalizmem tensorowym z domieszką formalizmu tetrad zerowych. Wydaje się jednak, że po udowodnieniu twierdzenia 2.1.4. mówiącego, że dana 2-forma jest konforemną 2-formą Yano-Killinga wtedy i tylko wtedy gdy forma do niej dualna jest także konforemną 2-formą Yano-Killinga, bardziej naturalnym byłby formalizm 2-spinorów. Dla przykładu fundamentalne równanie (2.26) i analogiczne równanie dla dualnej konforemnej 2-formy Yano-Killinga można wspólnie wyrazić w postaci spinorowej równaniem

$$\left(\square - \frac{1}{6}R\right)f^{AB}q_{AB} + \frac{1}{2}f^{AB}C_{ABCD}q^{CD} = 0, \quad A,...,D=1,2$$

gdzie symetryczne spinory: f_{AB} , q_{AB} i C_{ABCD} odpowiadają tensorom $F_{\mu\nu}$, $Q_{\mu\nu}$ i tensorowi Weyla $C_{\sigma\lambda\mu\nu}$, odpowiednio. Funkcja skalarna z kluczowego równania (2.61) w formalizmie spinorowym jest po prostu $\Phi \sim f^{AB}y_{AB}$, gdzie symetryczny spinor y_{AB} jest obrazem spinorowym tensora $Y_{\mu\nu} + i(*Y_{\mu\nu})$. Przy odpowiedniej konwencji równanie na wartości własne

tensora Weyla (2.56) przyjmuje postać $C_{ABCD}y^{CD} = Vy_{AB}$. Podobnie, można przedstawić wiele pozostałych równań w formalizmie spinorowym.

Powyższe uwagi w żadnym razie nie są uwagami krytycznymi. Służą one jedynie próbie dyskusji nad najefektywniejszym formalizmem dla rozwiązania przedstawionych problemów. Jestem ciekawy zdania Autora w tej materii. Mam natomiast dwie drobne uwagi krytyczne :

- (1) Na str.13 jest podane twierdzenie, Theorem 2.1.1., które pojawia się powtórnie w identycznej formie na str.18 jako Proposition 2.2.1.
- (2) W równaniu (2.59) przy operatorze $\square$ brakuje członu: $-\frac{1}{6}R$.

Następny rozdział, rozdział 3, zatytułowany „*Hopfiony*” poświęcony jest oryginalnemu, opracowanemu przez T.Smołkę podejściu do znajdowania rozwiązań równań Maxwella, które posiadają strukturę *hopfionów elektromagnetycznych* lub, wprowadzonych przez Autora, *uogólnionych hopfionów elektromagnetycznych*. W następnym kroku Autor analogicznie bada rozwiązania równań liniowej grawitacji posiadające strukturę *hopfionu grawitacyjnego* lub, wprowadzonego przez analogię do elektrodynamiki, *uogólnionego hopfionu grawitacyjnego*. Termin *hopfion* odnosi się pierwotnie do rozwiązania równań pola przedstawiającego soliton z indeksem Hopfa równym 1. Okazuje się, że tego rodzaju konfiguracje pola pojawiają się w stanach nadciekłych, w plazmie czy w kondensatach Bosego-Einsteina. Autora interesują jednak hopfiony będące rozwiązaniami próżniowych równań Maxwella a także, przez analogię, rozwiązania próżniowych równań liniowej grawitacji, które to równania są w tym ostatnim przypadku po prostu tożsamościami Bianchi dla tensora (ewentualnie spinora) Weyla. Ze znakomitych prac (J.Swearngin, A.Thompson *et al.* [61], A.Thompson, A.Wickes *et al.* [65]) wiadomo, że matematyczna struktura hopfionu jest ściśle związana z teorią twistorów- jego obraz geometryczny ma strukturę *kongruencji Robinsona*. W pracach tych hopfiony znajdowane są metodami teorii twistorów. Pan Tomasz Smółka w swojej rozprawie doktorskiej proponuje inną metodę, która w naturalny sposób prowadzi do konstrukcji *uogólnionych hopfionów*. W przypadku (uogólnionych) hopfionów elektromagnetycznych metoda ta opiera się na redukcji próżniowych równań Maxwella w czasoprzestrzeni Minkowskiego do równania falowego (3.27) na jedną funkcję zespoloną Φ

argumentów rzeczywistych. Funkcja ta jest rozumiana jako iloczyn skalarny wektora Riemanna-Silbersteina i wektora położenia. Jak dowodzi Autor w Dodatku B istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między rozwiązaniami równań Maxwella a tak rozumianymi funkcjami harmonicznymi. Jak słusznie zwraca uwagę, rozważana redukcja jest konsekwencją ogólnego równania (2.26) z rozdziału 2 dla konkretnej konforemnej 2-formy Yano-Killinga $\tilde{Y}=R dt\wedge dR$. Jest to bardzo ciekawe spostrzeżenie, które może prowadzić do rozważania (uogólnionych) hopfionów elektromagnetycznych w przestrzeniach zakrzywionych. Warto odnotować także bardzo ciekawe i istotne Stwierdzenie 3.3.1. (Proposition 3.3.1.) nakładające więzy na „rozwiązania hopfionowe” równania falowego (3.27) wynikające z warunków zachowania ładunków topologicznych: skrętności elektrycznej i magnetycznej. Jednym z głównych rezultatów omawianego rozdziału 3 jest wzór (3.40) przedstawiający proponowane przez Autora rozwiązanie Φ_H równania falowego (3.27) dla uogólnionego hopfionu elektromagnetycznego. Uważam, że sama idea wprowadzenia pojęcia uogólnionych hopfionów elektromagnetycznych i metoda ich opisu przy pomocy równania falowego jest istotnym osiągnięciem T.Słomki. Formalizm rozwinięty w rozprawie dostarcza efektywnej metody badania (uogólnionych) hopfionów elektromagnetycznych alternatywnej do metody opartej na teorii twistorów. Szkoda, że Autor nie rozważył głębiej relacji między proponowanym przez siebie podejściem a podejściem twistorowym. Brakuje mi także w pracy jakiegoś obrazu geometrycznego uogólnionego hopfionu elektromagnetycznego dla $l > 1$. W Dodatku D rozprawy pokazane jest jak stosując znany w teorii grawitacji rozkład tensora Weyla na część elektryczną i magnetyczną można zredukować równania pola dla liniowej grawitacji do równania falowego na przestrzeni Minkowskiego (D.21) na funkcję zespoloną Ψ (patrz (D.21)), analogicznie jak miało to miejsce w elektrodynamice. Przedstawiona jest także metoda rozkodowania rozwiązania tego równania tak, aby w rezultacie otrzymać odpowiedni tensor Weyla. Korzystając z tego formalizmu Autor w dalszej części rozdziału 3 znajduje konkretne rozwiązanie Ψ_H , które opisuje według nomenklatury Autora uogólniony hopfion grawitacyjny. Znakomitym rezultatem jest fakt, że zarówno uogólniony hopfion elektromagnetyczny jak i uogólniony hopfion grawitacyjny przedstawia ta sama funkcja skalarna (dla $l \geq 2$). Pozostała część rozdziału 3 przeznaczona jest na badanie energii zlinearyzowanego

pola grawitacyjnego. W szczególności Autor wylicza tutaj quasi-lokalne gęstości energii (superenergii) dla hopfionu grawitacyjnego i porównuje z odpowiadającym rezultatem dla hopfionu elektromagnetycznego. Cała ta część rozważań jest niezwykle ciekawa i dowodzi świetnej orientacji T.Smołki w trudnych zagadnieniach dotyczących pojęcia energii pola grawitacyjnego. Na szczególną uwagę zasługuje Twierdzenie 3.4.1. , w którym Autor dowodzi równoważności ,w przypadku „pola zlokalizowanego”, wzorów na energię zlinearyzowanego pola grawitacyjnego podanych przez J.Jezierskiego (ref.[32]) oraz I.Białynickiego-Birulę (ref. [8]). Szczególnie interesujące są także wyniki podrozdziału 3.4.5. gdzie podane są wzory na ładunki topologiczne dla liniowej grawitacji i wykazana jest istotna analogia z wzorami na elektromagnetyczne ładunki topologiczne. Zaznaczmy na koniec, że rozdział 3 jest właściwie wierna kopią pracy T.Smołki i J.Jezierskiego opublikowanej w 2018 roku w *Classical and Quantum Gravity* (ref. [58]). Drobną uwagę dotyczącą oznaczenia. Na str.35 po wzorze (3.28) i dalej używa Autor litery R na oznaczenie współrzędnej radialnej, gdy wcześniej i w wielu innych miejscach jest to małe r .

Last but not least rozdział pracy, rozdział 4, zatytułowany jest „Hopfiony magiczne”. Zarówno samo pojęcie *hopfiony magiczne* jak i teoria tych hopfionów są oryginalnymi i niezwykle obiecującymi dla dalszych badań osiągnięciami Pana Tomasza Smołki. Punktem wyjścia był dla niego istniejący od 1965 roku w ogólnej teorii względności tzw. algorytm Newmana-Janisa. Algorytm ten jest dobrze znany wszystkim zajmującym się metodami analizy zespolonej w teorii względności i prowadzi do wygenerowania metryki Kerra-Newmana z metryki Reissnera-Nordströma. Składa się on z kilku kroków: zapisania metryki Reissnera-Nordströma przy pomocy tetrady zerowej, rozszerzenia współrzędnych czasoprzestrzennych do przestrzeni zespolonej, zapisania tetrady zerowej w odpowiedni sposób używając tych współrzędnych , dokonania przesunięcia urojonego dwóch współrzędnych, dokonania cięcia rzeczywistego metryki. Algorytm ten był potem uogólniany na wiele sposobów w wielu pracach (n.p.,E.T.Newman i inni (1965), M.Demiański i E.T.Newman(1966), M.Demiański(1972) , S.P.Drake i P.Szekeres (2000)). Nie można nie wspomnieć, że podobna idea w dziedzinie liniowych pól została rozwinięta wcześniej w pracy A.Trautmana: (A.Trautman, Analytic solutions of Lorentz-invariant linear

equations, *Proc.R.Soc. A* 270, 326 (1962)).

Wracając do rozprawy Pana Smółki. W omawianym rozdziale 4 Autor jeszcze raz rozważa równanie falowe (3.27) na uogólniony hopfion elektromagnetyczny. Zwraca następnie uwagę, że rozwiązanie hopfionowe Φ_H dla $l = 0$ można otrzymać dokonując urojonej translacji współrzędnej czasowej rozwiązania podstawowego czterowymiarowego równania Laplace'a po odpowiednim rozszerzeniu analitycznym. Rozwiązanie to nazywane jest *rozwiązaniem pre-hopfionowym*. Fundamentalnym rezultatem jest następnie znalezienie przez Autora operatora $\mathcal{S}$, który generuje kolejne rozwiązania hopfionowe działając wielokrotnie na rozwiązanie pre-hopfionowe. Dalszy krok, inspirowany algorytmem Newmana-Janisa, polega na dokonaniu jeszcze jednej urojonej translacji w rozwiązaniu pre-hopfionowym, tym razem translacji współrzędnej przestrzennej. Tak otrzymany obiekt nazywa Autor *pre-hopfionem magicznym*. Działając kolejno operatorem $\mathcal{S}$ na pre-hopfion magiczny otrzymuje obiekty, które nazywa *hopfionami magicznymi* (w pewnej analogii do *magicznego pola elektromagnetycznego* otrzymanego przez graniczne przejście $m \rightarrow 0$ w metryce Kerra-Newmana). Są to niezwykle interesujące wyniki i jestem przekonany, że kierunek badania wskazany przez T.Słomkę doprowadzi do dalszych ważnych rezultatów. Autor zresztą sam w Epilogu sugeruje obiecujący kierunek badań. W szczególności zwraca uwagę na istotny wpływ wielkości parametrów translacji (α, a) na własności hopfionów magicznych. Wcześniej bada także podstawowe własności tych hopfionów. Znajduje zależność skrętności elektrycznej i magnetycznej od tych parametrów. Dowodzi, że ładunek hopfionu magicznego jest równy zero oraz, że dla $\alpha > a$ gęstość energii jest wszędzie skończona. Cały rozdział 4 czytałem z najwyższą ciekawością i jego wartość naukową oceniam bardzo wysoko ponieważ zawiera on istotne wyniki dla zrozumienia teorii hopfionów i w nieoczekiwany sposób łączy tę teorię z osiągnięciami teorii grawitacji (metryka Kerra-Newmana, formalizm tetradowy Newmana-Penrose'a, transformacje zespolone typu Newmana-Janisa). Mam drobne uwagi krytyczne „natury redakcyjnej”. Przy końcu str.53 na oznaczenie masy używa się symbolu M gdy wcześniej (wzór (4.3)) używa się m . Podobnie, na str.61 we wzorze (4.55) harmonika sferyczna oznaczona jest przez Y_l natomiast w następnej linii przez Y^l . Na str.53, dwa wiersze powyżej wzoru (4.5) powinno być: „...when the mass...” zamiast „...with the mass...” ; na str.62, dwa wiersze powyżej wzoru (4.67)

powinno być: „In other words,...” zamiast „In oder words,...”.

Ostatnią część rozprawy tworzy bibliografia, która w mojej opinii zawiera najważniejsze pozycje związane tematycznie z zawartością tej rozprawy.

Reasumując, rozprawę doktorską Pana Tomasza Smółki oceniam bardzo wysoko. Moje drobne uwagi krytyczne i dodatkowe komentarze zupełnie nie wpływają na tę ocenę. Uważam, że rozprawa spełnia wszystkie wymagania stawiane rozprawom doktorskim zawiązka i wnoszę o dopuszczenie Pana mgr. Tomasza Smółki do publicznej jej obrony.

Wnoszę także o wyróżnienie niniejszej rozprawy doktorskiej. Moje stanowisko uzasadnione jest znakomitymi wynikami przedstawionymi w rozprawie. Wyniki te są na wysokim poziomie światowym i dotyczą istotnych problemów fizyki. Wiele z nich zostało opublikowane w dwóch artykułach w *Classical and Quantum Gravity*. Pozwolę sobie jeszcze raz zwrócić uwagę na podstawowe osiągnięcia Autora, które w zupełności kwalifikują rozprawę do wyróżnienia. Po pierwsze, rozprawa zawiera wiele oryginalnych i ważnych rezultatów dotyczących zastosowania konforemnych 2-form Yano-Killinga w badaniu pola elektromagnetycznego w zakrzywionej czasoprzestrzeni, w szczególności w czasoprzestrzeni wokół uogólnionej czarnej dziury z metryką Plebańskiego-Demiańskiego. Wnosi także duży wkład do teorii hopfionów proponując oryginalne efektywne podejście do znajdowania rozwiązań równań Maxwella, rozwiązań przedstawiających (uogólnione) hopfiony elektromagnetyczne. Podobnie proponuje analogiczne podejście do znajdowania równań liniowej grawitacji, które interpretowane są jako uogólnione hopfiony grawitacyjne. Znakomitym osiągnięciem T.Smółki jest wprowadzenie pojęcia *hopfionu magicznego*, podanie efektywnej metody znajdowania tego typu hopfionów oraz przebadanie niektórych ich własności. Wymienione wyniki Autora rozprawy z pewnością będą podstawą dla wielu do dalszych intensywnych badań.



Maciej Przanowski