

UNIwersytet Warszawski

ROZPRAWA DOKTORSKA

Badanie stochastycznych sprzężeń dynamicznych metodami fizyki statystycznej

Autor:

Jarosław KLAMUT

Promotor:

prof. dr hab. Ryszard KUTNER

Promotor pomocniczy:

dr Tomasz GUBIEC

Wydział Fizyki



Warszawa, marzec 2023

Lista publikacji

Poniżej przedstawiłem listę publikacji, których wyniki stanowią podstawę niniejszej rozprawy:

- Jarosław Klamut i Tomasz Gubiec. **"Continuous time random walk with correlated waiting times. The crucial role of inter-trade times in volatility clustering"**, *Entropy*, 23(12), 2021, <https://doi.org/10.3390/e23121576>.
- Tomasz Gubiec, Jarosław Klamut i Ryszard Kutner. **"Multi-phase long-term autocorrelated diffusion: Stationary continuous-time Weierstrass walk versus flight"**, *Simplicity of Complexity in Economic and Social Systems*, strony 55–88, rozdz. 4, 2021 (edytorzy Dariusz Grech i Janusz Miśkiewicz). Springer International Publishing, https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-56160-4_4.
- Jarosław Klamut, Ryszard Kutner, Tomasz Gubiec i Zbigniew R. Struzik. **"Multibranch multifractality and the phase transitions in time series of mean interevent times"**, *Physical Review E*, 101:063303, Jun 2020, <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.101.063303>.
- Jarosław Klamut i Tomasz Gubiec. **"Directed continuous-time random walk with memory"**, *The European Physical Journal B*, 92(4):69, Apr 2019, <https://doi.org/10.1140/epjb/e2019-90453-y>.

Streszczenie

UNIwersytet Warszawski

Wydział Fizyki

**Badanie stochastycznych
sprzężeń dynamicznych
metodami fizyki statystycznej**

Jarosław KLAMUT

Jednym z działów fizyki statystycznej, który znacząco rozwinął się ostatnimi laty dzięki inspiracji nauk przyrodniczych oraz społeczno-ekonomicznych, jest teoria procesów stochastycznych. Obecnie dynamiki stochastyczne używane są powszechnie do opisu procesów i zjawisk zarówno ściśle fizycznych, jak też zachodzących w układach złożonych należących do szeroko rozumianej fizyki interdyscyplinarnej. Przez pojęcie ‘stochastyczne sprzężenia dynamiczne’ rozumiem takie sprzężenia pomiędzy zmiennymi losowymi, w których biorą udział przedziały czasu. Przykładami takich zmiennych losowych mogą być same czasy międzyzdarzeniowe lub te czasy wraz z towarzyszącymi im przemieszczeniami.

W niniejszej rozprawie skupiam się na wykorzystaniu dynamik stochastycznych do badania aktywności układów złożonych. Posługuję się tutaj czasami pomiędzy pojedynczymi zdarzeniami obserwowanymi w układzie jako wielkościami podstawowymi. Przykładowo, w układach fizycznych mogą to być czasy między przeskokami nośników ładunku zlokalizowanymi w minimum potencjału substratu w procesie relaksacji fotoprądu, a np. w geofizyce odstępów czasu pomiędzy trzęsieniami ziemi. Opis aktywności tych procesów jest komplikowany przez występującą w nich pamięć. Jej skutkiem jest autokorelacja szeregu czasów międzyzdarzeniowych, która prowadzi między innymi do klastrowania zdarzeń. Prominentny przykład, który obrazuje tego rodzaju zjawiska klastrowania w układzie złożonym, stanowią transakcje zawierane na rynkach finansowych wynikające m.in. z istniejącego tam tzw. ‘efektu stadnego’. Dlatego właśnie dane empiryczne dotyczące aktywności giełdowej (dostępne powszechnie w dużych ilościach) wykorzystałem jako podstawę analiz zawartych w mojej rozprawie doktorskiej.

W pierwszej części rozprawy, przedstawiam i szczegółowo opisuję modele błędzenia losowego w czasie ciągłym. Są to procesy stochastyczne, w których zmiennymi losowymi są zarówno zmiany wartości procesu, jak też odstępów czasu pomiędzy tymi zmianami. Następnie wprowadzam, rozwiązuję i analizuję autorski wariant modelu błędzenia losowego w czasie ciągłym ze

skorelowanymi czasami międzyzdarzeniowymi jako podstawę sprzężeń dynamicznych. Własności stochastyczne tego wariantu porównuję z empirycznymi danymi finansowymi. Dane te pozwalają na wyznaczenie wykładnika praw potęgowych charakteryzujących zarówno zaniki krokowej funkcji autokorelacji szeregów czasów międzytransakcyjnych, jak też nieliniowej autokorelacji czasowej szeregów absolutnych zmian cen. Związki empiryczne pomiędzy tymi wykładnikami porównuję z ich odpowiednikami wprowadzonymi jako tezy niniejszej rozprawy. Dzięki temu autorski model posłużył mi m.in. do pokazania kluczowej roli skorelowanych czasów międzytransakcyjnych w tworzeniu zasadniczego efektu jakim jest klastrowanie zmienności.

W drugiej części rozprawy skupiam się na pogłębionej interpretacji zależności obserwowanych w aktywności giełdowej. W tym celu wprowadzam uogólnioną analizę multifraktalną zdetrendowanych fluktuacji opartą na szeregu średnich czasów międzyzdarzeniowych, czyli opartą na podejściu gruboziarnistym. Pozwoliło mi to na uzyskanie niemonotonicznego zachowania wykładnika Höldera, co wcześniej było jedynie okazjonalnie wzmiankowane w literaturze naukowej. Następnie, poprzez uogólnienie standardowego podejścia, uzyskałem szerokie, asymetryczne, wielogałęziowe spektrum multifraktalne, z dobrze określoną stabilnością i dostępnością każdej gałęzi widma.

Abstract

UNIVERSITY OF WARSAW

Faculty of Physics

Analysis of stochastic dynamic couplings by methods of statistical physics

Jarosław KLAMUT

One of the branches of statistical physics that has remarkably developed in recent years due to the inspiration of the natural and socio-economic sciences is the theory of stochastic processes. Currently, stochastic dynamics are widely used to describe processes and phenomena, both strictly physical and occurring in complex systems belonging to the broadly understood interdisciplinary physics. By the term ‘stochastic dynamic couplings’ I refer to couplings between random variables that involve time intervals. Examples of such random variables may be the interevent times themselves or these times together with the corresponding displacements.

In this dissertation I focus on the use of stochastic dynamics to study the activity of complex systems. I use here the times between individual events observed in the system as basic quantities. For example, in physical systems these can be times between charge carrier jumps located in the substrate potential minima in the photocurrent relaxation process, and in geophysics, time intervals between earthquakes. The description of process activity is complicated by the presence of a memory. Its consequence is the autocorrelation of a series of interevent times, which leads, among others, to the clustering of events. A prominent example that illustrates this type of clustering phenomena in a complex system are transactions concluded on financial markets resulting, among others, from the so-called ‘herd effect’. That is why analyzes included in my doctoral dissertation are based on empirical data on stock market activity (widely available in large quantities).

In the first part of the dissertation, I present and describe in detail continuous-time random walk models. These are stochastic processes, in which both changes of the value of the process, as well as time intervals between these changes are random variables. Then, I introduce, solve and analyze the original variant of the continuous-time random walk model with correlated interevent times as the basis for dynamic couplings. I compare the stochastic properties of this variant with empirical financial data. These data make it possible to determine the exponent of the power laws characterizing both the decays of the step autocorrelation function of inter-trade time series, as well

as the non-linear temporal autocorrelation of absolute price change series. I compare the empirical relationships between these exponents with their equivalents introduced as theses of this dissertation. Thanks to this, the author's model served, among others, to show the fundamental role of correlated intrade times in creating the volatility clustering effect.

In the second part of the dissertation, I focus on an in-depth interpretation of the relationships observed in stock market activity. For this purpose, I introduce a generalized multifractal detrended fluctuations analysis based on a series of mean times between events, i.e. based on a coarse-grained approach. This allows me to obtain the non-monotonic behavior of the Hölder exponent, previously only occasionally mentioned in the scientific literature. Then, by generalizing the standard approach, I obtain a wide, asymmetric, multi-branched multifractal spectrum, with well-defined stability of each branch of the spectrum.

Podziękowania

Chciałbym podziękować z całego serca Profesorowi Ryszardowi Kutnerowi oraz Doktorowi Tomaszowi Gubcowi za wyrozumiałe przeprowadzenie mnie przez studia doktoranckie, podczas którego wspierali mnie w moim rozwoju naukowym i osobistym oraz w realizacji moich pomysłów i działań. Niezwykle doceniam ich zaangażowanie oraz rady i inspiracje dotyczące badań, dzięki którym stworzyliśmy owocną współpracę naukową. Serdecznie też dziękuję za czasochłonną i wartościową pomoc podczas pracy nad rozprawą doktorską.

Dziękuję również starszym współdoktorantom, Mateuszowi Wilińskiemu oraz Tomkowi Radusze, którzy pomogli mi odnaleźć się na studiach doktoranckich oraz pokazali, jaką wspaniałą przygodą może być uprawianie nauki. Wspólne projekty zawsze były dla mnie przyjemnością i przynosiły mi wiele radości.

Chciałbym wyrazić wdzięczność moim kochanym rodzicom, Annie i Grzegorzowi, którzy zawsze we mnie wierzyli i wspierali mnie w realizacji moich marzeń i ambicji. Bez nich moje osiągnięcia nie były możliwe.

Jestem wdzięczny również wszystkim innym osobom, których nie wymieniłem tutaj indywidualnie, a dzięki którym mogłem zacząć studia doktoranckie, które inspirowały mnie w tym okresie i pomagały mi w stworzeniu rozprawy doktorskiej.

Spis treści

Lista publikacji	iii
Streszczenie	v
Abstract	vii
Podziękowania	ix
Lista skrótów	xv
1 Wprowadzenie	1
1.1 Aktywność w układach złożonych	1
1.2 Cele i tezy pracy	2
1.3 Konstrukcja rozprawy doktorskiej	4
2 Charakterystyka danych empirycznych	5
2.1 Mechanizm funkcjonowania giełdy	6
2.2 Definicja ceny $p(t)$	7
2.3 Fakty stylizowane	11
2.3.1 Rozkłady logarytmicznych zwrotów	11
2.3.2 Aktywność na giełdzie	13
2.3.3 Liniowe i nieliniowe autokorelacje zmian cen	17
3 Modele błędzenia losowego w czasie ciągłym	21
3.1 Modelowanie procesów punktowych	21
3.1.1 Model Poissona	21
3.1.2 Model autoregresyjnego warunkowego czasu trwania	22
3.1.3 Proces Hawkesa	22
3.2 Ogólne własności i zastosowania modelu błędzenia losowego w czasie ciągłym – uwagi wstępne	23
3.3 Formalizm CTRW	25
3.3.1 Skokowe błędzenie losowe w czasie ciągłym	25
3.3.2 Propagator procesu stochastycznego	27
3.4 Charakterystyki formalizmu CTRW	29
3.4.1 Momenty	29
3.4.2 Autokorelacje	30
3.5 Przeloty oraz spacery	31
3.5.1 Ilościowe definicje przelotów oraz spacerów Weierstrassa	32
3.5.2 Rozkład skoków oraz ich sprzężenie z czasami wycze- kiwania	34

3.5.3	Propagatory spacerów oraz przelotów	37
3.5.4	Momenty spacerów	38
3.5.5	Dyfuzyjny diagram fazowy procesu spacerów	39
3.5.6	Charakterystyka procesu przelotów	41
3.5.7	Podsumowanie	42
4	Modele błędzenia losowego w czasie ciągłym w modelowaniu finansowych szeregów czasowych	45
4.1	Pamięci krótkozasięgowe w finansowych modelach CTRW .	46
4.2	Pamięci dalekozasięgowe w finansowych modelach CTRW . .	47
5	Model błędzenia losowego w czasie ciągłym z pamięcią w szeregu czasów wyczekiwania	51
5.1	Proces czasów	51
5.1.1	Pamięć dalekozasięgowa	53
5.1.2	Krokowa autokorelacja czasów wyczekiwania	54
5.1.3	Krokowa autokorelacja czasów pomiędzy zdarzeniami ekstremalnymi	55
5.2	Właściwy proces	59
5.2.1	Propagator procesu	60
5.2.2	Momenty procesu	66
5.2.3	Przybliżenie dla małych s	68
5.2.4	Momenty procesu w granicy długich czasów	71
5.2.5	Wariancja	73
5.2.6	Autokorelacja prędkości procesu	74
5.3	Symulacje komputerowe	75
5.4	Porównanie z danymi empirycznymi	76
5.5	Podsumowanie	77
6	Multifraktalna analiza aktywności	81
6.1	Analiza multifraktalna	82
6.2	Analiza multifraktalna średnich czasów międzyzdarzeniowych	83
6.2.1	Wewnątrzdzienne fluktuacje średnich czasów międzytransakcyjnych	83
6.2.2	Uogólniona suma statystyczna	86
6.2.3	Hipoteza skalowania	87
6.2.4	Multifraktalność wielogąłęziowa	93
6.2.5	Przemiany fazowe	96
6.3	Podsumowanie	98
7	Zakończenie	101
7.1	Podsumowanie uzyskanych wyników	101
7.2	Ocena kluczowych wyników	103
7.3	Ogólne wnioski	106
A	Opis danych empirycznych	109
B	Empiryczne przykłady faktów stylizowanych	111

C	Momenty procesu spacerów i przelotów Weierstrassa	117
D	Autokowariancja procesu czasów	121
E	Rozwiązanie części $B_n(t)$ propagatora procesu	125
F	Obliczenia momentów procesu w granicy długich czasów	127
G	Częściowa suma statystyczna, wymiary Rényi'ego oraz maksimum widma osobliwości	131
H	Funkcja autokorelacji $\langle F^2(j;s) \rangle$	135
I	Jednowymiarowa transformata Legendre-Fenchela	137
J	Wyniki analizy multifraktalnej dla różnych spółek	143

Lista skrótów

CTRW	C ontinuous- T ime R andom W alk
MF DFA	M ultifractal D etrended F luctuation A nalysis
ACD	A utoregressive C onditional D uration
CTWW	C ontinuous- T ime W eierstrass W alk
CTWF	C ontinuous- T ime W eierstrass F light
MSD	M ean- S quare D isplacement
MSQD	M ean- S quare Q uadratic D isplacement
GARCH	G eneralized A utoregressive C onditional H eteroskedasticity
DFA	D etrended F luctuation A nalysis

Ignacemu i Izabeli

Rozdział 1

Wprowadzenie

1.1 Aktywność w układach złożonych

Dynamiki stochastyczne i teorie procesów stochastycznych mają szerokie zastosowanie w modelowaniu zjawisk zachodzących w świecie realnym. Są wykorzystywane niemal w każdej dziedzinie nauki - przede wszystkim w szeroko rozumianej fizyce, a zwłaszcza w fizyce układów złożonych oraz fizyce interdyscyplinarnej. Służą one między innymi do opisu zjawisk i procesów zachodzących w układach złożonych, takich jak transport i dyfuzja anomalna (w ośrodkach porowatych i amorficznych) czy propagacja na złożonych sieciach komunikacyjnych (sieciach ulic, autostrad, połączeń kolejowych i lotniczych). Wykorzystuje się je również do modelowania dynamiki tłumu (a w tym zagadnień ruchu ulicznego, korkowania się miejskiego ruchu samochodowego czy strategii ewakuacji), a także dynamiki mrowisk oraz interakcji rybosomów podczas syntezy białek [1]–[3].

Do kluczowych pojęć pozwalających na ilościowy opis wspomnianych wcześniej procesów zalicza się pojęcie aktywności. Jedną z jej zasadniczych miar są czasy pomiędzy zdarzeniami (czyli międzyzdarzeniowe, np. pomiędzy punktami zwrotnymi cząsteczki Browna) - im krótsze są te okresy, tym aktywność procesu jest większa. W związku z tym modelowanie zależności i korelacji pomiędzy tymi czasami jest szczególnie istotne dla właściwego zrozumienia i odwzorowania aktywności opisywanych układów. Skorelowane przedziały czasów pomiędzy zdarzeniami obserwujemy w wielu dziedzinach, takich jak np. mechanika kwantowa (transfer elektronów [4], [5]), sejsmologia (trzęsienia ziemi [6]), ekonofizyka (transakcje na giełdach [7], [8]), genomika (odległości pomiędzy nukleotydami [9]), neuronauka (aktywność pojedynczych neuronów [10]), czy też socjofizyka (komunikacja międzyludzka [11], [12]). Wymienione powyżej empiryczne pamięci występują w przeróżnych formach, zarówno krótko- i długozasięgowych, jak i krótko- i długookresowych, a do ich opisu stosuje się korelacje liniowe oraz nieliniowe.

Powszechność wykorzystywania procesów stochastycznych oraz różnorodność aktywności, które opisują, bezpośrednio wskazuje na niezwykle istotną rolę czasów międzyzdarzeniowych w badaniu skomplikowanej ewolucji układów złożonych. W związku z tym **istnieje paląca potrzeba rozwijania**

metodologii modelowania oraz metod badawczych aktywności, zwłaszcza że dotychczasowe podejścia są już daleko niewystarczające. Nie są one w stanie sprostać wyzwaniom, jakie stawiają przed nimi współczesne układy złożone o skomplikowanej strukturze aktywności, reprezentowane między innymi przez dane o transakcjach giełdowych, wykorzystane w niniejszej pracy.

1.2 Cele i tezy pracy

Niniejsza rozprawa skoncentrowana jest na **dwóch głównych celach**. **Pierwszy cel** to wyprowadzenie odpowiedniego formalizmu należącego do rodziny tzw. błędzeń losowych w czasie ciągłym (ang. *continuous-time random walk*, CTRW - w dalszej części pracy będę używał takiego właśnie akronimu), będącego w stanie modelować pamięci związane z czasami międzyzdarzeniowymi (czyli stochastyczne sprzężenia dynamiczne) charakterystycznymi dla analizowanych w pracy procesów. Wymaga to omówienia zasadniczych idei leżących u podstaw rodziny formalizmów CTRW, a zwłaszcza omówienia formalizmów typu 'przeloty' (ang. *flights*) oraz typu 'spacery' (ang. *walks*). Rozważania prowadzę m.in. na przykładzie modelu błędzeń losowych Weierstrassa [13], w ramach którego można badać zarówno świat błędzeń normalnych, jak i anomalnych, a w tym np. multifrakalnych. Bogactwo tych błędzeń jest dobrze widoczne na charakterystycznym diagramie fazowym stanowiącym jeden z wyników niniejszej pracy. Diagram ten bazuje na własnościach fluktuacji (wariancji) oraz własnościach pogrubionych ("tłustych") ogonów rozkładu (czyli nadmiarowej kurtozie zwanej także ekscesem).

W dalszym ciągu podaję umotywowaną listę powodów wskazujących na konieczność prowadzenia badań nad aktywnością w układach złożonych. W tym miejscu warto doprecyzować nazwę 'czasy międzyzdarzeniowe' (czy też czasy pomiędzy zdarzeniami). Otóż w przypadku grupy modeli typu przeloty czasy te odpowiadają po prostu czasom wyczekiwania (ang. *waiting times* lub *pausing times*) jakie mają miejsce po każdym skoku (przeskoku) - wygląda to tak, jakby po każdym przeskoku proces "odpoczywał", przy czym ten czas odpoczywania jest zmienną losową. Mamy tutaj do czynienia z trzema rodzajami zależności: 1) pomiędzy wielkościami skoków procesu, 2) pomiędzy czasami międzyzdarzeniowymi i 3) mieszanymi, pomiędzy wielkościami skoków procesu a czasami międzyzdarzeniowymi.

Punktem wyjścia dla osiągnięcia pierwszego celu jest, powszechnie wykorzystywany dotychczas, skokowy model CTRW (należący do grupy przelotów) z krótkozasięgową korelacją pomiędzy kolejnymi skokami procesu. Niestety, jego przewidywania odbiegają od wyników dostarczanych przez dane empiryczne dotyczące nieliniowych autokorelacji prędkości procesu. Rozbieżności te stały się inspiracją mojej głębszej analizy. W tym celu przeprowadziłem symulacje w ramach CTRW. Pokazałem, że wprowadzenie do tego formalizmu długookresowych zależności pomiędzy

czasami międzyzdarzeniowymi istotnie wpływa na własności procesu, w szczególności na autokorelację prędkości procesu znacząco poprawiając jej zgodność z danymi empirycznymi. Stanowi to **wyjściową, kluczową tezę pracy**.

Innymi słowy, wyniki symulacji uwzględniających pamięć długookresową w szeregach czasów międzytransakcyjnych (w rozprawie wykorzystuję dane empiryczne pochodzące z giełdy) okazały się bliższe wynikom użytym na bazie danych empirycznych. Wskazało to jasno na konieczność dokładnego zbadania wpływu skorelowanych czasów wyczekiwania na charakterystykę procesu. Ich analiza skłoniła mnie do postawienia **drugiej tezy** rozprawy, dotyczącej faktów stylizowanych (czyli dobrze ugruntowanych) opisujących własności danych transakcyjnych. Uwzględnienie długookresowych zależności w szeregu czasów międzytransakcyjnych jest kluczowe do precyzyjnego zamodelowania zjawisk klastrowania zarówno aktywności, jak i zmienności (opisane są one dokładniej w rozdziale 2.3). W rozprawie wskazuję, że odtworzenie wykładnika w prawie potęgowym zaniku autokorelacji modułów zmian może być dokonane jedynie przez wykorzystanie skorelowanych czasów wyczekiwania.

W ramach pierwszego celu rozprawy zaproponowałem ogólny formalizm skokowego wariantu CTRW, uwzględniającego długookresowe (zanikające potęgowo) autokorelacje pomiędzy czasami wyczekiwania, spójne z własnościami empirycznymi czasów międzytransakcyjnych. Poprzez rozwiązanie tego wariantu, czyli wyznaczenie jego charakterystyk, zrealizowałem **pierwszą tezę** rozprawy. Następnie, otrzymane wyniki teoretyczne porównałem z odpowiednimi pochodzącymi z danych empirycznych. Dzięki takiemu podejściu zrealizowałem **drugą tezę** pracy pokazującą mechanizm klastrowania zmienności na rynkach finansowych.

Jest faktem stylizowanym, że notowania giełdowe przejawiają różnego rodzaju zachowania multifraktalne. Ponieważ zjawiska klastrowania aktywności i zmienności występują w różnych skalach czasowych, dlatego uzasadnionym jest sformułowanie **drugiego celu** mojej rozprawy. Dotyczy on wieloskalowych/wielofraktalnych (multifraktalnych) procesów stochastycznych. Skupiłem się na rozwinięciu nowych metod analizy wielofraktalnej i zastosowaniu ich do badania aktywności procesów stochastycznych. Na podkreślenie zasługuje zwłaszcza nowatorskie wykorzystanie w pracy transformacji Legendre-Fenchela. Umożliwiła mi ona opisanie niemonotonicznego przebiegu uogólnionego wykładnika Hursta oraz wykładnika Höldera a stąd opisanie bogatego, wielogałęziowego kształtu widma tego wykładnika. Pozwoliło mi to na uogólnienie analizy zdetrendowanych wielofraktalnych fluktuacji (ang. *multifractal detrended fluctuation analysis*, MFDFA). Stanowi to konkretną realizację **drugiego celu** niniejszej rozprawy.

1.3 Konstrukcja rozprawy doktorskiej

Konstrukcja mojej rozprawy doktorskiej jest następująca:

1. W pierwszym rozdziale zamieściłem wprowadzenie do rozprawy, podałem jej główne cele i tezy oraz przedstawiłem układ pracy.
2. Następnie, w rozdziale drugim, omówiłem dane empiryczne, z których korzystałem, a przede wszystkim zwróciłem uwagę na ich specyficzną charakterystykę. Głębsze zrozumienie tkwiących w nich zjawisk i procesów, możliwe dzięki odpowiedniemu modelowaniu, jest **zasadniczym, ogólnym celem** niniejszej rozprawy.
3. W trzecim rozdziale wprowadziłem formalizm błędzenia losowego w czasie ciągłym (CTRW) oraz przedstawiłem aktualny stan modeli CTRW wraz z porównaniem do innych alternatywnych modeli. W szczególności przedstawiłem też wyniki z pracy [13], porównujące różne definicje CTRW, na przykładzie spacerów oraz przelotów Weierstrassa.
4. W czwartym rozdziale pracy przedstawiłem obecnie istniejące modele CTRW oraz zwróciłem uwagę na ich wykorzystanie do opisu danych empirycznych. Na tym tle przedstawiłem wyniki zamieszczone w publikacji [14]. Omówiłem je w kontekście motywacji empirycznych i teoretycznych niniejszej rozprawy, stanowiących podstawę do stworzenia modelu uwzględniającego dalekozasięgowe korelacje pomiędzy czasami wyczekiwania.
5. W piątym rozdziale wprowadziłem i rozwiązałem kluczowy dla tej rozprawy autorski model CTRW z długą pamięcią pomiędzy czasami międzyzdarzeniowymi, który przedstawiłem w publikacji [15]. Wyniki uzyskane w ramach tego modelu porównałem z danymi empirycznymi.
6. Wyniki zaprezentowane w poprzednich rozdziałach, wskazują na potrzebę dalszej, pogłębionej analizy aktywności procesu. Dlatego w kolejnej części (rozd. 6), przedstawiłem autorskie rozwinięcie metodologii analizy mulifraktalnej zdetrendowanych fluktuacji (MFDFA) w zastosowaniu do badania aktywności procesu. Stosowanie tej metodologii wymaga analizy niemonotonicznego przebiegu wykładnika Höldera. Wyniki przedstawione w tym rozdziale bazują na mojej publikacji [16].
7. Kolejny rozdział stanowi zakończenie podsumowujące wyniki całej rozprawy.
8. Rozprawę uzupełniają dodatki, w których znajdują się szczegółowe opisy danych empirycznych, dłuższe obliczenia matematyczne oraz rozszerzenie i uogólnienie konkretnych wyników analizy danych empirycznych. Całość zamyka literatura przedmiotu, do której odwołuje się w niniejszej rozprawie.

Rozdział 2

Charakterystyka danych empirycznych

Zrealizowanie celów rozprawy doktorskiej wymaga wykorzystania danych empirycznych. Po pierwsze, to na podstawie ich własności wyprowadzam część motywacji niniejszej rozprawy. Po drugie, są one niezbędne do przeprowadzenia analizy multifraktalnej. Po trzecie, wykorzystuję je bezpośrednio do weryfikacji modelu teoretycznego.

Rozważany przeze mnie w rozdz. 5 oryginalny proces błędzenia losowego w czasie ciągłym wynika nie tylko z inspiracji teoretycznych, ale również z motywacji bezpośrednio związanych z danymi empirycznymi. Konkretnie własności wybranych danych skłoniły mnie do konstrukcji formalizmu wprowadzającego pamięć pomiędzy czasami międzyzdarzeniowymi. Wykorzystałem go do analizy procesu z potęgowo zanikającą autokorelacją czasów międzyzdarzeniowych mierzonych tyknięciami chronometru (liczbą kroków/stopni czasowej separacji). Na tej drodze porównałem rozwiązanie analityczne (uzyskane w ramach mojego formalizmu) z danymi empirycznymi. Analogicznie rzecz się ma w przypadku multifraktalnej analizy aktywności układów złożonych (patrz rozdz. 6) - ona także musi zostać przeprowadzona na konkretnych danych empirycznych. Pozwala to prawidłowo zobrazować rozwijaną procedurę, będącą uogólnieniem dotychczasowej analizy multifraktalnej. Uzyskane przeze mnie wyniki wspomnianych powyżej analiz danych empirycznych są oryginalne i stanowią jeden z filarów niniejszej rozprawy.

Modelowanie aktywności układów złożonych wymaga mikroskopowego spojrzenia na badane procesy, tzn. takiego, które pozwala wyróżnić pojedyncze zdarzenia, a poprzez to pojedyncze czasy międzyzdarzeniowe. Zaproponowane przeze mnie metodologie są uniwersalne w takim sensie, że mogą być zastosowane do opisu zjawisk należących do szerokiej palety z tradycyjnie rozumianej fizyki oraz fizyki interdyscyplinarnej (patrz rozdz. 1.1), w których obserwujemy czasy międzyzdarzeniowe. Prominentnym przykładem może być tutaj jeden z najbardziej złożonych mechanizmów społeczno-ekonomicznych jakim jest giełda, czyli rynek sprzedającego i kupującego (ang. *double auction market*). Kupujący konkurują na nim o zakup dostępnych w danym momencie papierów wartościowych, dążąc do zawarcia transakcji po możliwie najniższej cenie. Jednocześnie sprzedający

akceptują możliwie najwyższe złożone oferty kupna. Od blisko trzech dekad systemy giełdowe obsługiwane są elektronicznie. Dzięki temu stało się możliwe gromadzenie i przetwarzanie gigantycznych zbiorów danych empirycznych dotyczących aktywności zarejestrowanych na giełdach podmiotów.

Aktywność na giełdzie jest procesem złożonym, zawierającym niestacjonarności, zależności długookresowe, jak też zjawiska klastrowania [17]. Model będący w stanie odwzorować powyższe skomplikowane zależności powinien umożliwiać modelowanie aktywności układów złożonych pochodzących także z innych obszarów. Jednak to dane giełdowe stanowią potencjalnie jeden z bardziej wymagających testów dla takiego modelu.

W poniższym rozdziale przedstawiłem charakterystykę finansowych danych empirycznych. Wykorzystałem w tym celu dane transakcyjne pochodzące z Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie (GPW), dotyczące cen akcji spółek z fazy notowań ciągłych sesji giełdowych z okresu od 15.04.2013 do 15.04.2020. Dokładniejszy opis używanych danych znajduje się w dodatku A.

2.1 Mechanizm funkcjonowania giełdy

Na świecie istnieje wiele giełd, których zasady funkcjonowania mogą się różnić w szczegółach, jednak główne mechanizmy działania są podobne [18]. Inwestorzy uczestniczą w handlu poprzez składanie zleceń. Istnieją dwa podstawowe rodzaje zleceń: zlecenie kupna oraz zlecenie sprzedaży. Każde zlecenie musi zawierać odpowiedni zestaw informacji. Pierwszą z nich jest instrument zlecenia, czyli podmiot jakiego dotyczy dane zlecenie. Inwestor musi też określić wolumen zlecenia, czyli liczbę papierów wartościowych jakie zamierza kupić bądź sprzedać. Ze względu na cenę realizacji, zlecenia dzielą się na dwa główne typy. Zlecenia rynkowe (ang. *market orders*) mają zostać zrealizowane natychmiast po złożeniu, po najlepszej obecnie dostępnej cenie. Natomiast zlecenia z limitem (ang. *limit orders*) określają maksymalną cenę dla zleceń kupna (oraz minimalną cenę dla zleceń sprzedaży), po której wykona się zlecenie. W przypadku kiedy w momencie złożenia takie zlecenie nie może być zrealizowane, pozostaje one aktywne, tworząc księgę bądź arkusz zleceń (ang. *order book*). Ostatnią niezbędną informacją jest termin realizacji zlecenia. Zlecenie z limitem, które trafi do arkusza zleceń, może mieć zdefiniowany termin ważności, po którym staje się nieaktualne i jest usuwane z rynku. Dodatkowo można też ustalać warunki aktywacji, dopiero po spełnieniu których zlecenie staje się aktywne i może być zrealizowane, na przykład dla zleceń typu stop-limit [19]. Oczywiście dopuszcza się również wiele innych rodzajów zleceń, które powstają w wyniku lekkich modyfikacji powyżej przedstawionych reguł. Jednak celem tego wstępu jest jedynie przybliżenie idei i podstawowych zasad funkcjonowania giełdy. Dokładniejsze opisy typów zleceń i zasad ich parowania można znaleźć między innymi w [18], [20], [21].

Transakcja zostaje zawarta w momencie, kiedy na giełdzie spotkają się zlecenia kupna i sprzedaży z odpowiadającymi sobie cenami. Obie strony za pomocą giełdy wymieniają się papierami wartościowymi o ustalonej cenie i liczbie.

Również harmonogram sesji wpływa na czas realizacji zleceń. Oto harmonogram sesji GPW od 15.04.2013 [22]:

- 8:30 - 9:00. Faza przed otwarciem
- 9:00. Faza otwarcia
- 9:00 - 16:50. Faza notowań ciągłych
- 16:50 - 17:00. Faza przed zamknięciem
- 17:00. Faza zamknięcia
- 17:00 - 17:05. Faza dogrywki

Pierwsze zlecenia można składać od 8:30, jednak nie są one wykonywane od razu. Realizowane są one dopiero w fazie otwarcia o 9:00, kiedy też ustalany jest kurs otwarcia. Następnie przez 7 godzin i 50 minut pomiędzy 9:00 a 16:50 trwa faza notowań ciągłych, z której dane transakcyjne wykorzystuję w niniejszej pracy doktorskiej. Jest to okres standardowego funkcjonowania giełdy. Następnie przez 10 minut można składać zlecenia na fazę zamknięcia, analogicznie jak przed fazą otwarcia. O 17:00 następują transakcje na zamknięcie wraz z publikacją kursu zamknięcia. Faza dogrywki jest okresem kiedy można zawierać transakcje po cenie zamknięcia. Oczywiście harmonogram giełdy dotyczy jedynie dni handlowych, czyli standardowego tygodnia pracy, oprócz dni świątecznych.

2.2 Definicja ceny $p(t)$

Używane przeze mnie pojęcie 'cena' wydaje się być intuicyjne, jednak wbrew pozorom nie ma jednej ścisłej definicji ceny danego instrumentu w czasie $p(t)$. Rozpatrując jeden instrument finansowy, w danym momencie istnieje wiele aktywnych zleceń z limitem, które razem tworzą księgę zleceń. Przykładowy prawdziwy arkusz zleceń przedstawiony jest w tabeli 2.1 oraz na rys. 2.1.

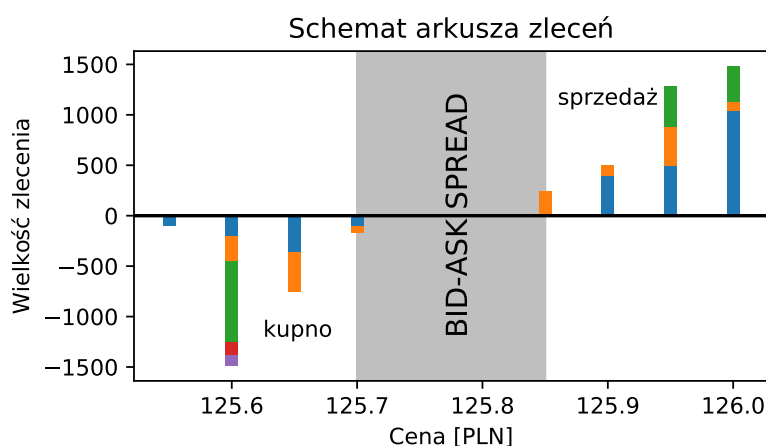
Podstawowym, najbardziej całościowym podejściem do badania ceny instrumentu jest podanie arkusza zleceń w każdym momencie. Jednak takie podejście wymaga przetworzenia dużej ilości złożonych danych, a ponadto takie dane nie są dostępne publicznie. Naturalnym uproszczeniem jest podzielenie arkusza na zlecenia kupna oraz sprzedaży. Wtedy każdej ze stron można próbować przypisać tylko jedną cenę. Cena kupna dla każdej chwili definiowana jest na podstawie aktywnych wtedy zleceń kupna, np. jako średnia

Zlecenia kupna				
Cena [PLN]	Liczba	Czas złożenia	Wolumen	Wartość
125.70	102	11:01:45	102	12 821.40
125.70	70	11:02:16	172	21 620.40
125.65	356	10:58:30	528	66 351.80
125.65	400	11:01:24	928	116 611.80
125.60	200	16:37:24	1128	141 731.80
125.60	250	10:57:58	1378	173 131.80
125.60	800	10:59:29	2178	273 611.80
125.60	125	11:01:21	2303	289 311.80
125.60	114	11:02:43	2417	303 630.20
125.55	100	09:10:11	2517	316 185.20
Zlecenia sprzedaży				
Cena [PLN]	Liczba	Czas złożenia	Wolumen	Wartość
125.85	10	10:58:39	10	1 258.50
125.85	231	11:04:34	241	30 329.85
125.90	391	10:57:41	632	79 556.75
125.90	108	11:04:30	740	93 153.95
125.95	490	10:57:37	1230	154 869.45
125.95	391	10:57:46	1621	204 115.90
125.95	404	10:57:46	2025	254 999.70
126.00	1040	10:57:32	3065	386 039.70
126.00	87	10:57:33	3152	397 001.70
126.00	356	10:57:42	3508	441 857.70

Tabela 2.1: Przykład księgi zleceń. Wypisano po 10 najbardziej korzystnych zleceń dla każdej ze stron, dotyczących akcji PE-KAO, aktywnych o 11:05 w dniu 14 VII 2016. Cena, liczba i czas złożenia dotyczą bezpośrednio najkorzystniejszych zleceń. Wolumen oznacza łączną liczbę złożonych zleceń po danej i bardziej korzystnych cenach, natomiast wartość oznacza łączną cenę tych papierów.

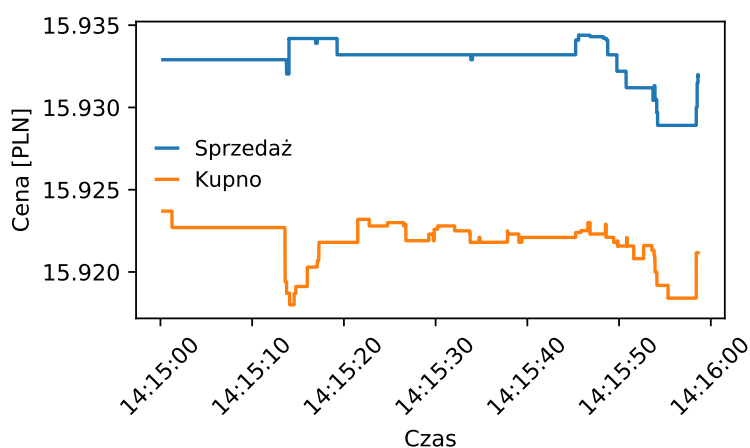
(arytmetyczna lub ważona wolumenem) ze wszystkich bądź kilku najlepszych zleceń. Jednak najczęściej definiuje się ją po prostu jako najwyższą cenę po jakiej rynek może kupić dany instrument. Analogicznie można zdefiniować cenę sprzedaży. Te ceny i ich przykładowe zachowanie w czasie pokazane są na rys. 2.2. Patrząc na niego od razu można zauważyć potrzebę zdefiniowania kolejnej wielkości, jaką jest różnica pomiędzy tymi cenami. Nazywana jest ona po angielsku *bid-ask spread* bądź w skrócie po prostu *spread*. Ta różnica w jednym momencie jest dobrze pokazana w jednym momencie na rys. 2.1. W przypadku kiedy chcemy posługiwać się tylko jedną wartością ceny $p(t)$, możemy wyznaczyć średnią arytmetyczną z cen kupna i sprzedaży.

Alternatywne podejście do określenia ceny instrumentu polega na rozpatrywaniu jedynie transakcji, bez uwzględniania aktywnych zleceń. Każda

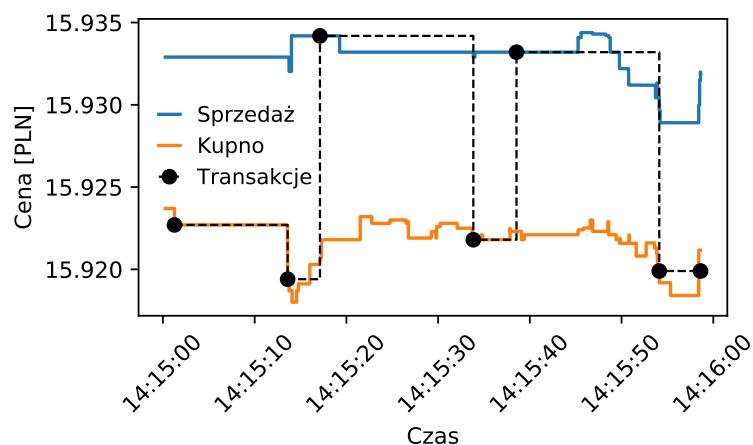


Rysunek 2.1: Schemat arkusza zleceń na podstawie 10 najlepszych aktywnych zleceń dla każdej ze stron, przedstawionych w tabeli 2.1, z godziny 11:05 w dniu 14 VII 2016. Różne kolory symbolizują różne zlecenia z tą samą ceną.

transakcja posiada konkretną cenę, na którą zgodziły się dwie strony rynku. Oznacza to, że zarówno inwestor kupujący dany walor, jak i sprzedający uznali tę cenę za sprawiedliwą cenę instrumentu i dokonała się faktyczna wymiana. Przy takim podejściu, cena waloru zmienia się w momencie pojawienia się nowej transakcji i przyjmuje jej wartość. Następnie jest ona stała aż do chwili zawarcia kolejnej transakcji. W niniejszej pracy będę korzystał z tak właśnie zdefiniowanej ceny waloru $p(t)$. Zauważmy, że przy takiej definicji, ceny transakcji będą znajdowały się na jednym z wykresów cen kupna lub sprzedaży. Zobrazowane jest to na rys. 2.3. Powoduje to "skakanie" ceny transakcyjnej pomiędzy cenami bid i ask, co opisane jest dokładniej w rozdziale 2.3.3.



Rysunek 2.2: Przykładowe krzywe ceny kupna i sprzedaży, wyznaczone jako najbardziej korzystne aktywne zlecenia. Pionowa przerwa pomiędzy nimi odpowiada bid-ask spreadowi.



Rysunek 2.3: Przykładowe krzywe ceny kupna i sprzedaży z rys. 2.2. Dodatkowo czarnymi kropkami oznaczono czas i cenę zachodzących przykładowych transakcji. Przerywaną linią przedstawiona jest chwilowa cena instrumentu. Po zmianie krzywej, na której znajduje się cena, kolejna transakcja może zajść po cenie na tej samej krzywej lub drugiej. Oznacza to, że kolejna zmiana ceny będzie albo losowa albo w przybliżeniu przeciwna poprzedniej zmianie, gdyż cena powróci na poprzednią krzywą.

2.3 Fakty stylizowane

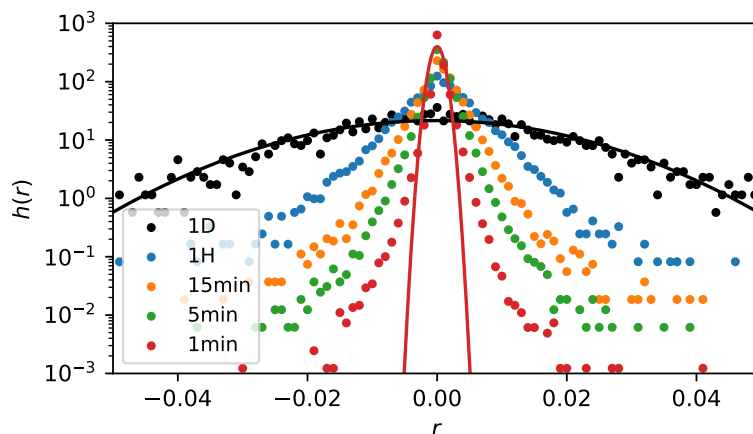
Od dawna badanie statystycznych własności cen akcji na giełdzie jest popularnym tematem wśród naukowców. Charakterystyki, które występują w zdecydowanej większości szeregów finansowych i które zostały obszernie zbadane oraz opisane, nazywamy faktami stylizowanymi. Najistotniejsze fakty stylizowane zostały zebrane między innymi w pracy [17]. Poniżej przedstawię najbardziej znane fakty stylizowane dotyczące rozkładów i autokorelacji zmian cen oraz aktywności na giełdzie, posługując się dla przykładu danymi używanymi w całej rozprawie. Wyniki w tym rozdziale dotyczą jedynie zmian cen wewnątrz sesji handlowej, bez uwzględniania zmian cen pomiędzy ceną zamknięcia jednego dnia a ceną otwarcia kolejnego dnia handlowego.

2.3.1 Rozkłady logarytmicznych zwrotów

Standardową metodą badania dynamiki ceny, jest rozważanie logarytmicznych stóp zwrotu. Logarytmiczna stopa zwrotu $r(t)$ ceny $p(t)$ w czasie t z okresu Δt jest zadana jako:

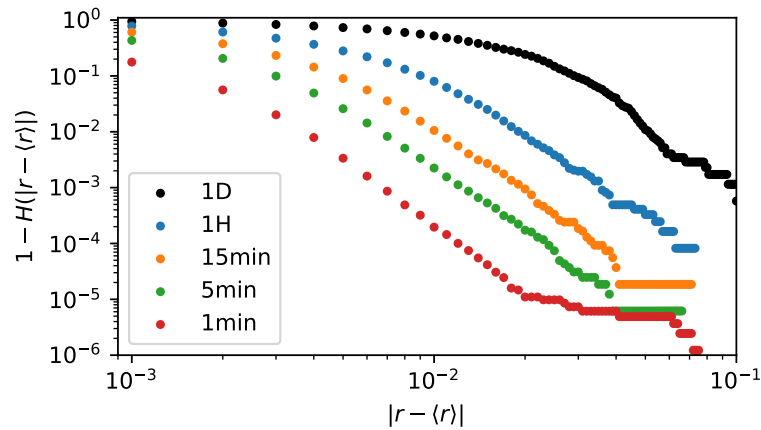
$$r_{\Delta t}(t) = \log \left(\frac{p(t)}{p(t - \Delta t)} \right) = \log[p(t)] - \log[p(t - \Delta t)]. \quad (2.1)$$

Rozważane dane pogrupowałem według różnych okresów: 1 minuta, 5 minut, 15 minut, 1 godzina oraz 1 dzień. Na rys. 2.4 prezentuję empiryczne rozkłady logarytmicznych stóp zwrotu $h(r)$ dla różnych skal czasowych w skali półlogarytmicznej.



Rysunek 2.4: Empiryczne rozkłady wewnątrzsesyjnych logarytmicznych stóp zwrotu $h(r_{\Delta t})$ dla różnych kroków czasowych Δt . Dla dłuższych skal czasowych rozkłady coraz bardziej zbliżają się do rozkładu normalnego (linie ciągłe). Dane na wykresach w tym podrozdziale dotyczą spółki PKNORLEN z okresu 15.04.2013 do 15.04.2020.

Ciągłe linie to parabole odpowiadające dopasowanym rozkładom normalnym dla dwóch skrajnych skal czasowych. Dla minutowej skali zdecydowanie widać, że ogony rozkładu zanikają znacznie wolniej niż rozkład normalny, a nawet wolniej niż funkcja wykładnicza (która w tej skali reprezentowana byłaby linią prostą). Na wykresie widać też, że czym większa skala, tym ogony stają się mniej grube, a sam rozkład zbliża się do rozkładu normalnego. Dokładniej ten efekt prezentuję na rys. 2.5 w skali logarytmicznej.

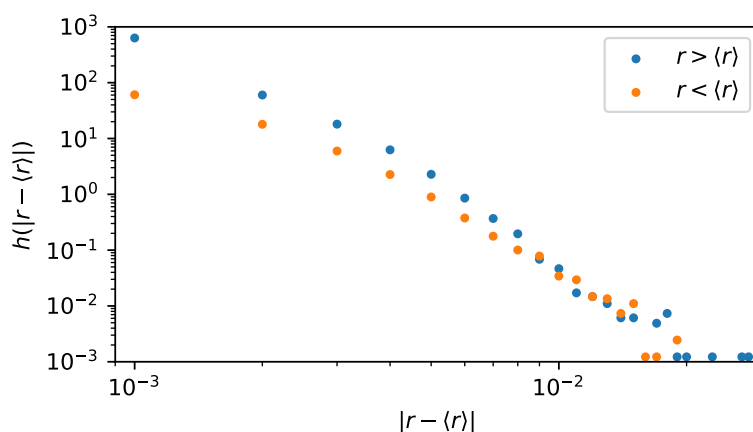


Rysunek 2.5: Wykresy dopełnień empirycznych dystrybuant rozkładów modułów odchyłeń logarytmicznych stóp zwrotu od średniej dla różnych kroków czasowych Δt . Dla krótszych skal czasowych ogony rozkładów dają się dobrze zamodelować rozkładami potęgowymi, dla dłuższych skal czasowych rozkłady coraz bardziej zbliżają się do rozkładu normalnego.

Aby zbadać jedynie ogony, rozważam rozkład wartości bezwzględnej różnicy logarytmicznego zwrotu od średniego logarytmicznego zwrotu. Dodatkowo wykres przedstawia nie rozkład, a dopełnienie dystrybuanty rozkładu $H(r) = \int_{-\infty}^r h(r') dr'$, czyli prawdopodobieństwo, że zmiana będzie większa niż rozpatrywana różnica. Widać, że dla krótszych skal czasowych ogony zanikają potęgowo, jednak coraz szybciej wraz ze wzrostem skali. Natomiast dzienne zmiany zanikają szybciej niż potęgowo. Własności, które przedstawiłem powyżej to dwa fakty stylizowane. Pierwszy mówi o tym, że rozkłady logarytmicznych stóp zwrotu są gruboogonowe i ich ogony zazwyczaj mogą być dobrze przybliżone rozkładami potęgowymi. Jednak zwykle wykładnik ten jest większy niż 3, co oznacza istnienie dwóch pierwszych momentów zmian. Natomiast drugi fakt mówi o dążeniu do gaussowości wraz ze wzrostem skali. Czym większej skali używamy, tym rozkład zmian zbliża się do rozkładu normalnego.

Trzeci fakt stylizowany dotyczący rozkładów logarytmicznych zwrotów odnosi się do ich niesymetryczności. Konkretnie lewa (ujemna) strona rozkładu zazwyczaj posiada lekko grubszy, wolniej zanikający ogon.

Oznacza to, że olbrzymie spadki ceny zdarzają się częściej niż analogiczne logarytmiczne wzrosty. Rozkład dla rozważanych danych empirycznych przedstawiam na rys. 2.6. Podzieliłem na nim jednominutowe zmiany na większe od średniej oraz mniejsze od średniej, a następnie narysowałem ich rozkład. Widać, że obydwa ogony zanikają potęgowo, jednak ogon odpowiadający spadkom zanika z odrobinę mniejszym wykładnikiem.

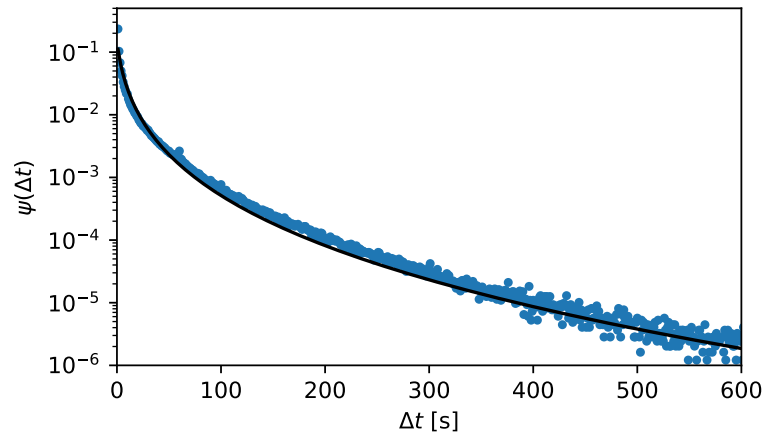


Rysunek 2.6: Wykresy empirycznych rozkładów modułów odchyleń logarytmicznych stóp zwrotu od średniej dla jednominutowego kroku czasowego. Rozkład zysków ($r > \langle r \rangle$) zanika szybciej niż rozkład strat.

2.3.2 Aktywność na giełdzie

Przy analizie danych transakcyjnych jako podstawowe wydarzenie wygodnie wybrać pojedynczą transakcję. W związku z tym aktywność na giełdzie mierzyć można poprzez czasy pomiędzy transakcjami Δt . Zatem podstawowym procesem opisującym wydarzenia na giełdzie jest proces punktowy opisujący te okresy. Tak jak w przypadku wielu innych procesów punktowych opisujących społeczne bądź ekonomiczne zachowania, charakterystyka procesu transakcji jest daleka od procesu Poissona. Na początek możemy przyrzeć się rozkładowi długości czasów międzytransakcyjnych $\psi(\Delta t)$ przedstawionym na rys. 2.7 w skali półlogarytmicznej i 2.8 w skali logarytmicznej. Oczywiście rozpatruję jedynie okresy w czasie handlu ciągłego, nie uwzględniając okresów pomiędzy różnymi sesjami handlowymi.

Widać znaczne odstępstwo od rozkładu wykładniczego, który byłby obserwowany w procesie Poissona. W szczególności występuje grubszy ogon, co dobrze widać na rys. 2.7 w skali półlogarytmicznej. Jednak na rys. 2.8 widać, że rozkład ten nie zanika też potęgowo, gdyż w skali logarytmicznej nie układa się w linię prostą. Istnieje wiele prac modelujących ten niezwykle ciekawy rozkład [23]–[26]. Na powyższych wykresach używam



Rysunek 2.7: Empiryczny rozkład czasów międzytransakcyjnych $\psi(\Delta t)$ (niebieskie kropki) w skali półlogarytmicznej wraz z dopasowanym rozkładem wykładniczego Weibulla (linia ciągła).

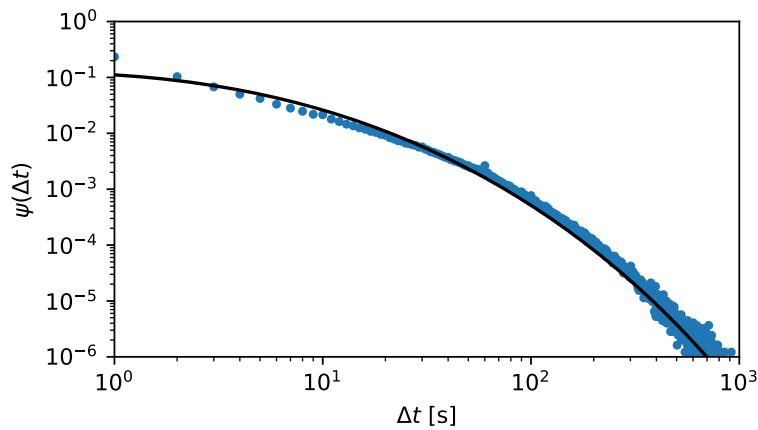
rozkładu wykładniczego Weibulla (ang. *Exponentiated Weibull distribution* [27]) zadanego przez dystrybuantę:

$$\text{ExpWeibull}_{a,c}(x) = [1 - \exp(-x^c)]^a, \quad x > 0, a > 0, c > 0. \quad (2.2)$$

Parametry dopasowane metodą największej wiarygodności to $a = 4.72$ oraz $c = 0.353$.

Innym faktem stylizowanym jest niestacjonarność wewnątrzdzienna, często nazywana ‘efektem lunchu’, opisana między innymi w [28], [29]. Aktywność na giełdzie nie jest stała w ciągu sesji handlowej. Zazwyczaj najwięcej transakcji wykonywanych jest na początku oraz na końcu sesji. Na i wkrótce po otwarciu następuje reakcja na wydarzenia z innych giełd oraz wiadomości z okresu bez handlu. Występuje także sprzężenie zwrotne, ponieważ zwyczajowa największa płynność i największa liczba transakcji w tym okresie umożliwia zajmowanie pozycji przy względnie najniższych kosztach, sprzyjając dalszemu wzrostowi aktywności inwestorów. Podobny mechanizm obserwuje się na koniec sesji, kiedy też inwestorzy dostosowują pozycje, by zoptymalizować ryzyko związane z przetrzymywaniem aktywów przez noc. Okres środkowy, w okolicach pory obiadowej, jest okresem z najmniejszą liczbą transakcji. Z jednej strony transakcje wynikające z informacji sprzed otwarcia giełdy zostały już wykonane oraz ludzie decydujący o zawieraniu nowych pozycji często mają obiadowe przerwy w pracy. Z drugiej strony występuje analogiczne sprzężenie zwrotne: skoro o tej porze jest mniej transakcji i ofert na rynku, to ciężiej otworzyć nową pozycję.

Ten efekt można pokazać dzieląc sesję handlową na 94 pięciominutowe okienka, w których zliczam liczbę transakcji. Następnie wynik dla



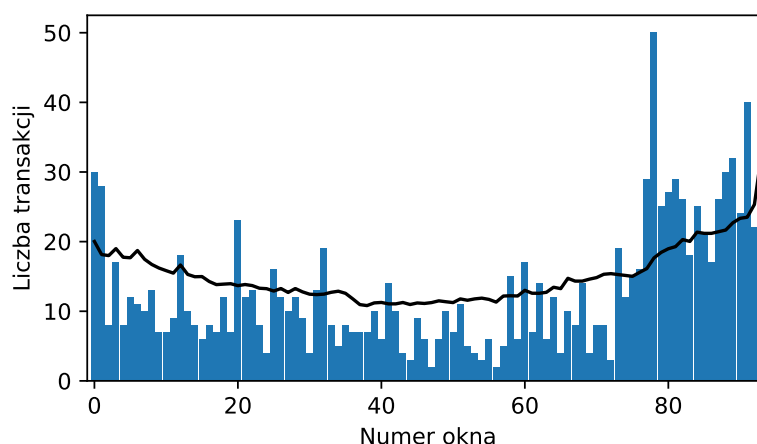
Rysunek 2.8: Empiryczny rozkład czasów międzytransakcyjnych $\psi(\Delta t)$ (niebieskie kropki) w skali logarytmicznej wraz z dopasowanym rozkładem wykładniczego Weibulla (linia ciągła).

każdego okienka można uśrednić po wszystkich dniach. Wynik tej procedury przedstawiam jako czarną linię na rys. 2.9. Dodatkowo niebieskie słupki prezentują przykładową realizację aktywności dla jednego losowego dnia. Z wykresu można odczytać, że w ciągu pierwszych minut sesji średnia aktywność to około 20 transakcji na 5 minut. Następnie aktywność spada mniej więcej do około 11 transakcji na 5 minut w 38. okienku odpowiadającym okresowi od 12:05 do 12:10. Potem aktywność znowu rośnie, osiągając maksymalną wartość około 33 transakcji w ostatnie 5 minut handlu. Zatem widać, że największa średnia aktywność wewnątrzdziennej jest prawie 3 razy większa od minimalnej.

Kolejnym efektem powszechnie występującym na rynkach finansowych jest klastrowanie aktywności. Transakcje na giełdzie nie występują niezależnie od siebie. Mogą być one reakcją na wiadomości rynkowe bądź zmianę ceny danego lub innego aktywa. Zatem w naturalny sposób w danych transakcyjnych obserwowane są okresy spokojne, jak i aktywne. Zjawisko to występuje na wszystkich skalach czasowych - obserwowane jest zarówno w danych sekundowych, jak i miesięcznych i jest niezależne od niestacjonarności wewnątrzdziennej. Przedstawione jest to również na rys. 2.9. W przypadku jednego dnia występują pięciominutowe okienka zawierające zarówno tylko 2 transakcje, jak również 50.

Elementarną metodą zbadania tego zjawiska jest wyznaczenie autokorelacji (ACF) szeregu czasów międzytransakcyjnych $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \dots$. Znormalizowana krokowa autokorelacja szeregu zmiennych i.i.d. definiowana jest jako średnia:

$$\text{ACF}_{\Delta t}(n) = \frac{\langle \Delta t_i \Delta t_{i+n} \rangle - \langle \Delta t \rangle^2}{\sigma_{\Delta t}^2}, \quad (2.3)$$

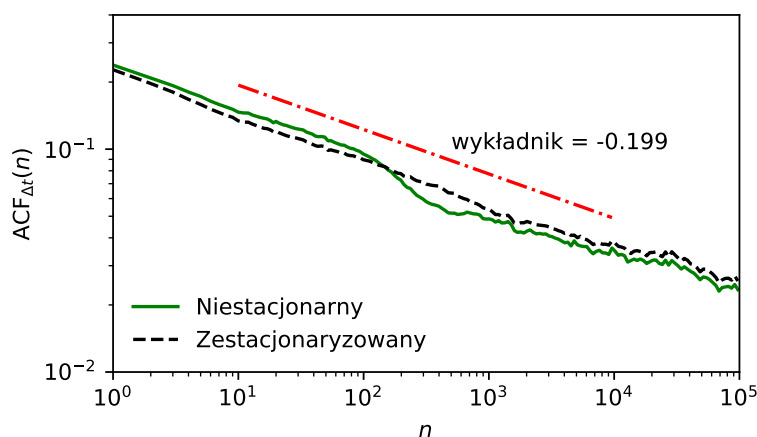


Rysunek 2.9: Niebieskimi słupkami przedstawiony jest wykres empirycznej liczby transakcji w 5-minutowych oknach czasowych dla przykładowo wybranego dnia 06.05.2019. Widzimy na nim efekt klastrowania aktywności: okresy z dużą liczbą transakcji występują przy sobie. Natomiast czarną linią przedstawiona jest średnia dla każdego okna wyliczona na podstawie danych ze wszystkich rozpatrywanych dni. Obrazuje ona niestacjonarność wewnątrzdzienną, okresy na początku i końcu sesji są najbardziej aktywne, natomiast w okolicach połowy sesji liczba transakcji jest najmniejsza.

gdzie $\langle \cdot \rangle$ oznacza operację uśredniania. Wielkość ta określa średnią siłę korelacji pomiędzy elementem w szeregu a elementem oddalonym o n miejsc. Jeśli jest dodatnia, to oznacza, że wielkość oddalonego elementu będzie podobna do wielkości rozważanego elementu. W szczególności z procedury normalizacji wynika, że $ACF_{\Delta t}(0) = 1$. Natomiast nieznormalizowaną wielkość, zdefiniowaną jedynie przez licznik, nazywamy autokowariancją.

Już sama wewnątrzdzienna niestacjonarność przedstawiona na rysunku 2.9 wprowadza zależności pomiędzy czasami międzytransakcyjnymi. Dlatego, by wyznaczyć autokorelację niewynikającą z tego efektu, należy zestacjonaryzować czasy wyczekiwania. Robię to, wykorzystując wewnątrzdzienny wzór aktywności, przedstawiony jako czarna linia na rys. 2.9. Każdy czas międzytransakcyjny dzielę przez średni czas w przypadającym pięciominutowym okienku. Wzory wewnątrzdziennie wyznaczam osobno dla każdego dnia tygodnia. Tak wyznaczone autokorelacje przedstawiam na rys. 2.10 w skali logarytmicznej. Autokorelacja zestacjonaryzowanych danych nie faluje dla przesunięcia paruset kroków, co normalnie wynika z efektu lunchu. Jednak autokorelacja dalej jest znaczna i zanika bardzo powoli z wykładnikiem bliskim 0.2. Pokazuje to, że zależności pomiędzy okresami bez transakcji są bezskalowe, rozciągają się na wiele skal. Warto zauważyć, że dla rozważanych danych transakcyjnych, dziennie występuje około 1419 czasów międzytransakcyjnych. Natomiast autokorelacja jest istotna nawet po 10000 krokach, co pokazuje że zależności te widoczne są nawet dla

przesunąć czasowych rzędu tygodni.

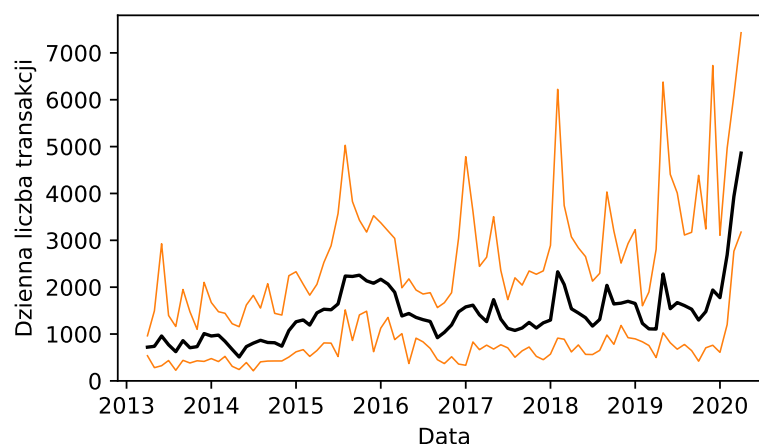


Rysunek 2.10: Wykres autokorelacji krokowej szeregu empirycznych czasów międzytransakcyjnych dla danych surowych (niestacjonarnych) oraz zestacjonaryzowanych (procedura opisana w głównym tekście). Autokorelacja danych zestacjonaryzowanych zanika potęgowo z niewielkim wykładnikiem. Zanik widzimy na wielu skalach (od sąsiednich czasów do przesunięć rzędu tygodni).

W tym miejscu warto pokazać też średnią dzienną liczbę transakcji dla kolejnych miesięcy (czarna linia na rys. 2.11). Pomarańczowe linie prezentują maksymalną i minimalną dzienną liczbę transakcji dla każdego miesiąca. W przypadku rozważanej spółki PKNORLEN widzimy ogólny trend wzrostowy aktywności.

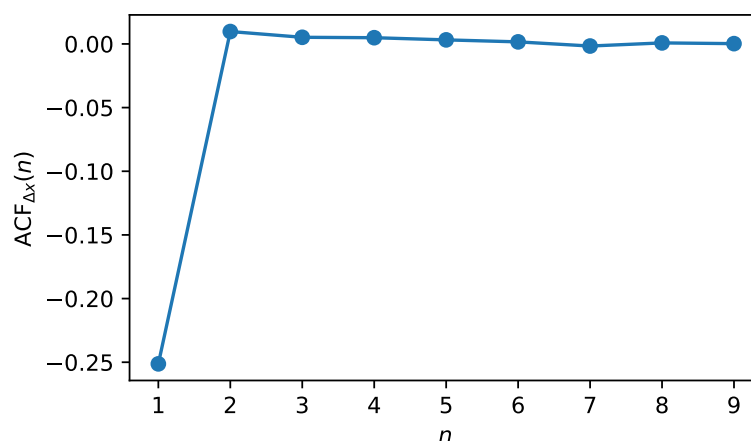
2.3.3 Liniowe i nieliniowe autokorelacje zmian cen

Niezwykle istotną charakterystyką dynamiki ceny jest zachowanie się autokorelacji jej zmian, szczególnie ze względów praktycznych - przewidzenie kierunku zmiany ceny pozwala wprost na zbudowanie strategii inwestycyjnej. W danych transakcyjnych obserwujemy zjawisko po angielsku nazywane *bid-ask bounce*, odpowiadające 'skakaniu' ceny pomiędzy cenami kupna i sprzedaży. Z tego też powodu występuje negatywna korelacja zmiany ceny z kolejną zmianą. Jest to jednak tylko techniczny skutek konstrukcji zasad księgi zleceń, na podstawie którego nie da się w prosty sposób stworzyć strategii inwestycyjnej. Techniczny opis powstawania tego zjawiska znajduje się w rozdziale 2.2. Dalsze zmiany nie są już istotnie skorelowane (dokładniejszy opis tego efektu oraz modele go tłumaczące można znaleźć w [30], [31]). Oznacza to, że patrząc na podstawowe zależności, wcześniejsze zmiany ceny aktywa nie wpływają na jej przyszłe zmiany. Innymi słowy, patrząc jedynie



Rysunek 2.11: Wykres średniej (linia czarna), minimalnej oraz maksymalnej (linie pomarańczowe) dziennej liczby transakcji dla każdego z rozpatrywanych miesięcy.

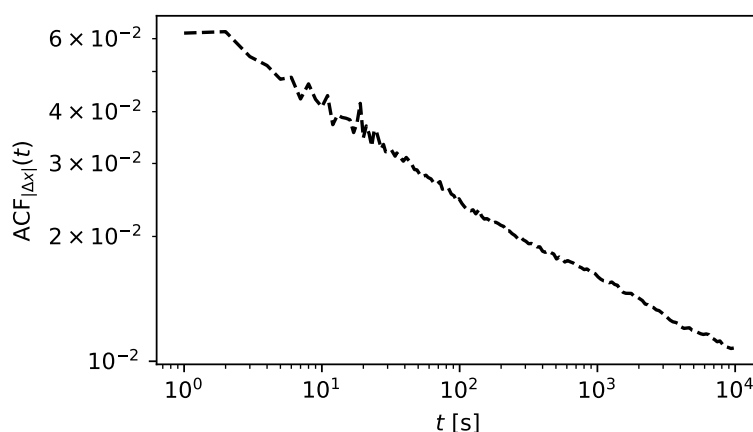
na historię ceny nie jesteśmy w stanie przewidzieć przyszłych zmian. Autokorelacja logarytmicznych zmian cen przedstawiona jest na rys. 2.12.



Rysunek 2.12: Wykres empirycznej autokorelacji krokowej szeregu logarytmicznych zmian ceny. Pierwsza, negatywna wartość odpowiada zjawisku bid-ask bounce opisanemu w głównym tekście. Kolejne wartości są bliskie zeru.

Innym równie ważnym tematem jest kwestia ogólnie nazywana zarządzaniem ryzykiem. W tym przypadku ważniejsza od samego kierunku zmiany ceny aktywa jest wielkość tej zmiany. Istnieje wiele miar opisujących tę wielkość, przykładowo wariancja, odchylenie standardowe czy drugi moment zmian lub statystyki pochodzące z rozkładu modułów zmian, jak średnia czy odpowiednie percentyle. Jednak ogólne wnioski są niezależne od używanej metody i wskazują na kolejny fakt stylizowany, jakim jest klastrowanie

zmienności. Okresy większej zmienności zazwyczaj sąsiadują ze sobą. Oznacza to, że możemy oczekiwać, że po okresie, w którym obserwuje się duże skoki ceny, wystąpi kolejny okres również z dużymi zmianami. Natomiast okres spokojny powinien być poprzedzony również względnie spokojnym okresem. Zależności te są dalekozasięgowe i są widoczne na wszystkich skalach - zaczynając od sekundowych i kończąc na skali miesięcznej. Matematycznie to zjawisko najłatwiej opisać autokorelacją modułów zmian. Jest ona dodatnia i zanika bardzo powoli, można ją dobrze przybliżyć zanikiem potęgowym o małym wykładniku. Zagadnienie modelowania i przyczyn występowania tego zjawiska jest wciąż obiektem wielu prac naukowych [32]–[34].



Rysunek 2.13: Wykres empirycznej czasowej autokorelacji modułów logarytmicznych zmian ceny w skali logarytmicznej. Autokorelacja jest dodatnia i zanika bardzo powoli, z dobrym przybliżeniem w sposób potęgowy. Jest istotna w wielu skalach czasowych.

Rozdział 3

Modele błędzenia losowego w czasie ciągłym

W niniejszym rozdziale wprowadzam tematykę modelowania aktywności, przedstawiam różne podejścia do opisu procesów punktowych oraz argumentuję, dlaczego zdecydowałem się na użycie modeli błędzenia losowego w czasie ciągłym. Podaję ich definicję oraz metodykę analizy ich charakterystyk. W szczególności przedstawiam wyniki pracy [13], w której analizowałem różnice pomiędzy przelotami a spacerami Weierstrassa, bazując na zachowaniu w czasie drugiego i czwartego momentu procesu, czyli wariancji oraz kurtozy dla przestrzeni izotropowej i jednorodnego czasu w obecności fluktuacji.

Aktywność jest ogólnym pojęciem, odnoszącym się do szerokiego spektrum procesów fizycznych, jednak w mojej pracy skupiam się na analizie aktywności w procesach punktowych – czyli takich, w których obserwuje się dobrze zlokalizowane w czasie i przestrzeni zdarzenia losowe. W takim przypadku naturalnymi miarami aktywności są liczność zdarzeń w ustalonym przedziale czasowym, intensywność procesu, czyli gęstość prawdopodobieństwa wystąpienia zdarzenia, bądź też czasy międzyzdarzeniowe, które wykorzystuję do badania aktywności procesów.

3.1 Modelowanie procesów punktowych

3.1.1 Model Poissona

Podstawowym procesem stochastycznym opisującym zdarzenia statystycznie niezależne jest proces Poissona, w którym czasy między zdarzeniami, Δt , pochodzą z rozkładu wykładniczego:

$$\psi(\Delta t) = \lambda \exp(-\lambda \Delta t), \quad \Delta t \geq 0, \lambda > 0. \quad (3.1)$$

Jak widać, czasy międzyzdarzeniowe wybierane są losowo, przy czym intensywność procesu λ jest niezależna zarówno od Δt , jak też od kolejności losowania. Proces ten traktuję w rozprawie jako referencyjny, do którego odnoszę (głównie w rozdziale 6) wyniki analiz danych empirycznych.

Oczywiście, w przypadku procesów ze skorelowanymi czasami międzyzdarzeniowymi, konieczne jest użycie bardziej wyrafinowanych modeli.

3.1.2 Model autoregresyjnego warunkowego czasu trwania

Istnieje wiele sposobów modelowania zależności pomiędzy czasami międzyzdarzeniowymi za pomocą procesów punktowych w czasie ciągłym [35], [36]. Powszechnie znanym przykładem jest model autoregresyjnego warunkowego czasu trwania (ang. *Autoregressive Conditional Duration*, ACD) [37], wprowadzony w 1998 roku. W tym modelu czas do kolejnego zdarzenia jest kombinacją liniową poprzedzających go przedziałów czasu. Ścisłej rzecz biorąc, n -ty przedział czasu międzyzdarzeniowego jest dany w postaci $\Delta t_n = \theta_n z_n$, gdzie z_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, są niezależnymi dodatnimi zmiennymi z rozkładu o średniej równej 1. Natomiast współczynnik θ_n jest miarą zależności aktualnego przedziału czasu od poprzednich przedziałów. Dla modelu ACD(m, q) jest on dany w postaci liniowej rekurencji:

$$\theta_n = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta t_{n-i} + \sum_{i=1}^q \beta_i \theta_{n-i}, \quad m, q \leq n, \alpha_0 > 0, \alpha_i, \beta_i \geq 0, \quad (3.2)$$

gdzie parametry m i q określają zasięgi pamięci w tym procesie. Model ten został wprowadzony do opisu transakcji nieregularnie występujących na giełdzie, gdzie czasy międzytransakcyjne posiadają dodatnią autokorelację. Jest wciąż używany w modelowaniu danych finansowych [35], a także np. ryzyka kredytowego [38]. Ponadto, dzięki swojej uniwersalności, znalazł liczne zastosowania także poza rynkami finansowymi, na przykład do opisu rozprzestrzeniania się zakażeń wirusem polio [39] czy korków w ruchu ulicznym [40]. Kanoniczna wersja modelu uwzględniała jedynie pamięci krótkozasięgowe, dlatego początkowe prace skupiały się na takim jego zastosowaniu, przykładowo z wykorzystaniem pamięci jednokrokowej [41]. Wraz z rosnącą popularnością modelu powstawały wersje uwzględniające także pamięci długookresowe [42].

3.1.3 Proces Hawkesa

Innym przykładem modelu uwzględniającego czasy międzyzdarzeniowe w procesach punktowych w czasie ciągłym jest proces Hawkesa [43], [44]. Został zaproponowany w 1971 roku i początkowo był używany do opisu trzęsień ziemi [45]. Jednak ostatnimi czasy zyskał na popularności szczególnie w kontekście modelowania aktywności społecznej (wiadomości na Twitterze [46], filmów na YouTube [47], wiadomości email czy rozmów na komunikatorach [48]) oraz w finansach [49]. Jest to samopobudzający się proces, co oznacza, że każde wydarzenie może spowodować kolejne wydarzenie. Procesy Hawkesa oparte są na intensywności, czyli prawdopodobieństwie warunkowym wystąpienia zdarzenia. Wystąpienie zdarzenia powoduje wzrost

intensywności procesu, co skutkuje większym prawdopodobieństwem wystąpienia kolejnego zdarzenia. Matematycznie można to zapisać następująco:

$$\lambda(t) = \lambda_0(t) + \sum_{t_i: t_i < t} h(t - t_i), \quad (3.3)$$

gdzie $\lambda_0(t)$ to intensywność bazowego procesu Poissona, natomiast $h(\cdot)$ jest funkcją określającą natężenie i zasięg pamięci procesu. Podobnie jak w przypadku modeli ACD, początkowe zastosowanie procesów Hawkesa dotyczyło zależności krótkozasięgowych [45] (gdzie funkcja $h(\cdot)$ zanika wykładniczo). Jednak ostatnio zostały zaproponowane modele z pamięcią długookresową [49], [50] (gdzie funkcja $h(\cdot)$ zanika potęgowo). W ogólności, procesy Hawkesa pozwalają lepiej zrozumieć i wytłumaczyć badane zjawisko, jednak modele ACD są łatwiejsze w analizie danych empirycznych.

3.2 Ogólne własności i zastosowania modelu błędzenia losowego w czasie ciągłym – uwagi wstępne

Model błędzenia losowego w czasie ciągłym (ang. *Continuous-Time Random Walk*, CTRW) został zaproponowany przez fizyków Montrolla i Weissa w 1965 roku [51]. Od tego czasu stał się modelem szeroko używanym w fizyce, przykładowo w modelowaniu amorficznych, światłoczułych filmów [52], [53], ośrodków porowatych [54], [55], w modelowaniu starzenia się szkła [56], [57], transportu koherentnego oraz transportu elektronowego [58], [59], w modelowaniu geofizycznym [60], [61] czy astrofizycznym [62], [63]. Często wykorzystuje się go też do modelowania układów złożonych [64]–[69], szczególnie w tematyce związanej z transportem w fizyce plazmy, materiałach szklistych, czy w nauce o komórkach [70] oraz w fizyce interdyscyplinarnej: fizyce biomedycznej [71], [72], ekonofizyce [8], [23], [73]–[77] czy socjofizyce [78]. Szersza lista zastosowań i ich krótkie omówienie znajduje się w pracy przeglądowej [79], w której zebrane zostały najważniejsze osiągnięcia z 50-letniej historii różnych wariantów formalizmu CTRW.

Jednym z pierwszych istotniejszych osiągnięć w ramach formalizmu CTRW była możliwość wytłumaczenia i modelowania zarówno dyfuzji normalnej, jak i anomalnej – subdyfuzji oraz superdyfuzji. Oryginalnie, wyniki te zostały otrzymane poprzez zastosowanie gruboogonowych rozkładów skoków oraz czasów wyczekiwania [80]. Zaproponowano też metody stacjonaryzacji różnych wariantów formalizmu CTRW poprzez stacjonaryzację pierwszego skoku [81], [82].

Istotną cechą wskazującą na elastyczność formalizmu CTRW jest możliwość uwzględniania w jego ramach różnych zależności między podstawowymi elementami procesu. Skorelowane skoki były początkowo rozważane w

tematyce dyfuzji gazów w ośrodkach porowatych [83]–[85]. Ostatnio używane są też m.in. w modelowaniu danych transakcyjnych [14], [30], [31] – opisałem to w rozdziale 4.1. Wykorzystana tam została zasada przekory Le Chateliera. Jest ona obecna w zjawisku *bid-ask bounce* (wprowadzonym w rozdziale 2.3.3). Wynika z niego tendencja ceny do powrotu do swojej poprzedniej wartości. Rozważałem tam także sprzężenie między skokami i czasami wyczekiwania pomiędzy nimi [75], [77], [86], w wyniku których można było uzyskać m.in. zjawisko superdyfuzji. Wspomniane sprzężenie występuje także w wielce charakterystycznych procesach Weierstrassa, które omówiłem w podrozdziale 3.5. Procesy te pozwalają na badania zarówno dyfuzji normalnej, jak też anomalnej oraz przelotów i spacerów Lévy’ego.

Zagadnienie, które jest przedmiotem mojego zainteresowania dotyczy zależności pomiędzy czasami międzyzdarzeniowymi. Ostatnio opublikowano kilka prac rozważających formalizm CTRW ze **skorelowanymi czasami wyczekiwania** [87]–[94]. Zależności te były wprowadzane poprzez jądro pamięci albo przez konstruowanie podporządkowanego (ang. *subordinated*) szeregu czasów wyczekiwania. **Jednak zagadnienie to wymaga prowadzenia dalszych badań, gdyż dotychczasowe modele mają zbyt uproszczony charakter.** Przykładowo w niektórych z tych modeli wprowadzenie zależności w szeregach czasów wyczekiwania prowadzi do ich niestacjonarności. W innym przypadku rozważane są jedynie procesy z rozkładem czasów o nieskończonej średniej i rozkładem skoków o nieskończonej wariancji. Ponadto, co jest nadzwyczaj istotne, przewidywania tych modeli nie były dotychczas porównywane z danymi empirycznymi.

Istotną zaletą formalizmu CTRW jest możliwość badania w jego ramach procesów złożonych biorących pod uwagę sprzężenia pomiędzy zmiennymi losowymi jakimi są zarówno czasy międzyzdarzeniowe, jak też zmiany procesu. Możliwość uwzględnienia obydwu rodzajów sprzężeń dynamicznych pozwala na pogłębioną analizę procesów stochastycznych znacznie bliższych procesom rzeczywistym, co wskazuje na przewagę formalizmu CTRW nad modelami typu ACD czy Hawkesa. W modelach CTRW można w naturalny sposób analizować (gdyż są na to nastawione) takie charakterystyki procesu jak jego wariancje czy autokorelacje. Zaproponowany w niniejszej rozprawie wariant formalizmu CTRW pozwala zbadać nie tylko podstawowe charakterystyki procesu, jak średnią i wariancję, ale też bardziej złożone charakterystyki, jak propagator procesu bądź autokorelacja prędkości i modułu prędkości procesu.

Należy wspomnieć, że istnieje rozszerzenie procesów punktowych o wartości nazwane znakowanymi procesami punktowymi (ang. *marked point processes*) [95], [96]. Obok procesu punktowego, niezbędny jest również szereg towarzyszących oznaczeń (ang. *marks*), których wartości reprezentują stan procesu. Każdemu wydarzeniu z procesu punktowego przypisana jest jedna wartość z drugiego szeregu. Jednak formalizm takiego rozwiązania oparty jest na formalizmie procesów punktowych. Formalizm CTRW jest

znacznie lepiej dostosowany do wyznaczenia szczegółowych charakterystyk procesu.

Modele CTRW pozwalają na uwzględnienie fluktuujących oraz skorelowanych czasów międzytransakcyjnych w przeciwieństwie do kanonicznych modeli szeregów finansowych, takich jak ARIMA (odwzorowującego zależności pomiędzy kolejnymi zmianami ceny) czy GARCH (opisującego heteroskedastyczność, czyli zmienną w czasie wariancję procesu). Zatem, formalizm CTRW jest naturalnym wyborem dla modelowania wykorzystywanych w rozprawie danych empirycznych, gdyż łączy on potrzebne cechy procesów punktowych oraz szeregów czasowych. Jego elastyczność pozwala uwzględnić zarówno zjawisko klastrowania aktywności czy ogólniej klastrowania zmienności, jak też zjawisko *bid-ask bounce* (powrotu ceny aktywa do poprzedniej wartości, patrz rozdz. 2.3.3).

3.3 Formalizm CTRW

Celem zdefiniowania dowolnego procesu stochastycznego potrzebne jest zbudowanie metodologii otrzymywania jego trajektorii, czyli wartości procesu w zależności od czasu $x(t)$.

3.3.1 Skokowe błędzenie losowe w czasie ciągłym

Błędzenie losowe w czasie ciągłym o charakterze skokowym jest procesem stochastycznym, którego trajektoria zdefiniowana jest przez ciąg zmian wartości procesu $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots$, zwanych skokami procesu oraz ciąg przedziałów czasu pomiędzy tymi zmianami $\Delta t_1 = t_0 - t_1$, $\Delta t_2 = t_2 - t_1, \dots$, zwanych czasami wyczekiwania, przy czym x_j jest wartością procesu w chwili t_j , $j = 0, 1, 2, \dots$. Zmiany wartości procesu są tutaj natychmiastowe, zatem w okresach pomiędzy skokami wartość procesu nie ulega zmianie. Przykładową trajektorię tego procesu przedstawiłem na rysunku 3.1.

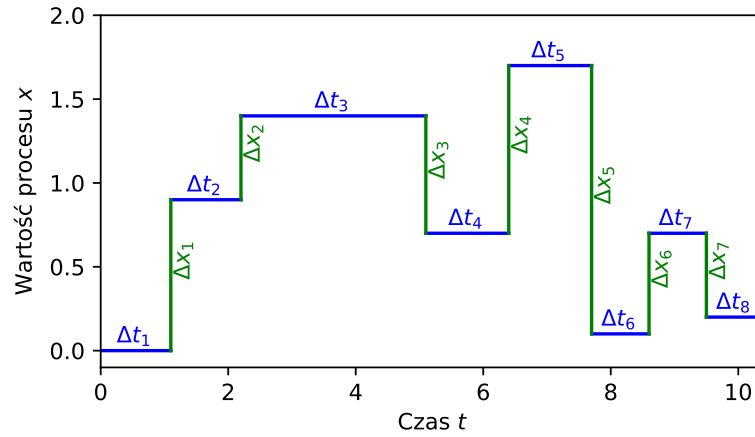
Definicja formalizmu CTRW bazuje na gęstości ostrego prawdopodobieństwa warunkowego wystąpienia n -tej pary typu (skok procesu, czas wyczekiwania) w zależności od poprzednich tego typu par, które zapisuję następująco:

$$p(\Delta x_n, \Delta t_n | \Delta x_{n-1}, \Delta t_{n-1}; \Delta x_{n-2}, \Delta t_{n-2}; \dots; \Delta x_1, \Delta t_1), \quad (3.4)$$

gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$, indeksuje kolejne punkty zwrotne trajektorii, a zarazem kolejne chwile. Termin "ostre" oznacza tutaj sytuację, w której wartość procesu x_j jest osiągnięta dokładnie w chwili t_j .

Kanoniczny, skokowy model CTRW Montrolla i Weissa opiera się na trzech założeniach:

- (1) aktualne wartości skoku i czasu wyczekiwania nie zależą od swoich przeszłych wartości,



Rysunek 3.1: Przykładowa trajektoria skokowego błędzenia losowego w czasie ciągłym. Niebieskim kolorem oznaczone są części trajektorii odpowiadające momentom, kiedy wartość procesu jest stała przez czas wyczekiwania Δt_i . Po jego upływie następuje natychmiastowa zmiana wartości procesu o wielkość skoku Δx_i , przedstawiona zielonym kolorem. Proces skokowego błędzenia losowego w czasie ciągłym jest oczywiście idealizacją procesów rzeczywistych.

- (2) wartości skoku i czasu wyczekiwania w każdej parze są od siebie statystycznie niezależne,
- (3) wszystkie skoki pochodzą z tego samego rozkładu $h(\Delta x)$, podobnie wszystkie czasy wyczekiwania z tego samego rozkładu $\psi(\Delta t)$; rozkłady te są niezależne od n .

Powyższe warunki pozwalają na przedstawienie gęstości prawdopodobieństwa danego wzorem (3.4) w prostszej postaci:

$$p(\Delta x_n, \Delta t_n | \Delta x_{n-1}, \Delta t_{n-1}; \Delta x_{n-2}, \Delta t_{n-2}; \dots; \Delta x_1, \Delta t_1) = p(\Delta x_n, \Delta t_n), \quad (3.5)$$

którą wykorzystuję w dalszej części tego rozdziału. Ma miejsce normalizacja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta x_n \int_0^{\infty} d\Delta t_n p(\Delta x_n, \Delta t_n) = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

W ogólności, może wystąpić sprzężenie dynamiczne zmiennych losowych Δx_n i Δt_n , wtedy gęstość prawdopodobieństwa $p(\Delta x_n, \Delta t_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, nie rozkłada się na czynniki przestrzenny i czasowy. Faktoryzacja ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy to sprzężenie znika. W takim przypadku

$$p(\Delta x_n, \Delta t_n) = h(\Delta x_n)\psi(\Delta t_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.7)$$

gdzie obie gęstości prawdopodobieństwa, przestrzenna $h(\cdot)$ i czasowa $\psi(\cdot)$, są unormowane.

3.3.2 Propagator procesu stochastycznego

Wielkością, która pozwala na pełną charakterystykę procesu stochastycznego, jest jego propagator $P(x_2, t_2 | x_1, t_1)$, czyli prawdopodobieństwo warunkowe tego, że w chwili t_2 proces będzie miał wartość x_2 pod warunkiem, że w czasie $t_1 \leq t_2$ proces miał wartość x_1 . Dla jednorodnych procesów stochastycznych w przestrzeni i czasie (czyli ściśle stacjonarnych), co ma miejsce w stanie równowagi statystycznej układu, zachodzi następująca równość:

$$P(x_2, t_2 | x_1, t_1) = P(x_2 + \Delta x, t_2 + \Delta t | x_1 + \Delta x, t_1 + \Delta t), \quad (3.8)$$

określająca translacyjną niezmienniczość procesu stochastycznego w przestrzeni i czasie. Zatem, przyjmując $\Delta x = -x_1$ a $\Delta t = -t_1$, możemy propagator procesu wyrazić w następującej postaci:

$$P(x, t) \stackrel{\text{def.}}{=} P(x, t | 0, 0) = P(x_2 - x_1, t_2 - t_1 | 0, 0), \quad x \stackrel{\text{def.}}{=} x_2 - x_1, \quad t \stackrel{\text{def.}}{=} t_2 - t_1.$$

Wyraź teraz propagator procesu, $P(x, t)$ za pomocą propagatorów cząstkowych, $P_n(x, t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, następująco:

$$P(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, t), \quad (3.9)$$

gdzie propagator cząstkowy $P_n(x, t)$ oznacza gęstość prawdopodobieństwa tego, że w chwili t proces ma wartość x i wykonał do tego czasu dokładnie n przemieszczeń (tutaj skoków). Powyższą równość wygodniej jest przedstawić (ze względów technicznych) w równoważnej postaci wyrażonej za pomocą transformat Fouriera oraz Laplace'a. Mianowicie,

$$\tilde{P}(k, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n(k, s), \quad (3.10)$$

gdzie

$$\tilde{Y}(k, s) = \mathcal{F}\{\mathcal{L}\{Y(x, t)\}\} = \int_0^{\infty} dt e^{-st} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} Y(x, t), \quad (3.11)$$

przy czym $Y(x, t)$ jest dowolną funkcją od zmiennych niezależnych x oraz t .

Można teraz wypisać równanie dla n -krokowego propagatora $P_n(x, t)$ w następującej postaci,

$$\begin{aligned} P_0(x, t) &= \delta(x - x_0) \Psi(t - t_0), \\ P_n(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \\ &\quad p(x_1 - x_0, t_1 - t_0) p(x_2 - x_1, t_2 - t_1) \dots p(x - x_{n-1}, t_n - t_{n-1}) \\ &\quad \Psi(t - t_n), \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.12)$$

gdzie prawdopodobieństwo przetrwania w dowolnym miejscu przez okres czasu od 0 do t jest dane wzorem:

$$\Psi(t) = \int_t^\infty dt' \psi(t'). \quad (3.13)$$

gdzie

$$\psi(t') = \int_{-\infty}^\infty dx' p(x', t') \quad (3.14)$$

Dokonując w równaniu (3.12) transformacji Fouriera względem zmiennej $x - x_0$ oraz Laplace'a względem zmiennej $t - t_0$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0(k, s) &= \tilde{\Psi}(s), \\ \tilde{P}_n(k, s) &= \tilde{\Psi}(s) [\tilde{p}(k, s)]^n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.15)$$

Korzystając z równań (3.15) i (3.10) otrzymujemy, że propagator jest sumą nieskończonego szeregu geometrycznego o ilorazie $|\tilde{p}(k, s)| \leq 1$ postaci:

$$\tilde{P}(k, s) = \frac{\tilde{\Psi}(s)}{1 - \tilde{p}(k, s)} = \frac{1 - \tilde{\psi}(s)}{s} \frac{1}{1 - \tilde{p}(k, s)}, \quad (3.16)$$

gdzie w drugiej równości wykorzystaliśmy transformatę Laplace'a równania (3.13) postaci:

$$\tilde{\Psi}(s) = \frac{1 - \tilde{\psi}(s)}{s}. \quad (3.17)$$

Jak widać, bazowym rozkładem kanonicznego formalizmu CTRW jest transformata Fouriera-Laplace'a, $\tilde{p}(k, s)$, lokalnego rozkładu $p(\Delta x, \Delta t)$. Zatem, można stwierdzić, że lokalne własności procesu CTRW pozwalają wyznaczyć charakterystyki globalne tego procesu. Wynika to z tego, że rozpatrujemy układ znajdujący się w stanie równowagi statystycznej, co nie wyklucza jednak istnienia w układzie nawet gigantycznych fluktuacji. Jest to wykorzystywane przeze mnie w podrozdziałach 3.5.1 – 3.5.6 do ilościowej analizy stochastycznego procesu Weierstrassa.

Równanie (3.16) jest ogólną, kanoniczną formułą formalizmu CTRW uwzględniającą sprzężenie dynamiczne pomiędzy zmiennymi losowymi, które tutaj jest wyrażone w domenie Fouriera-Laplace'a.

W przypadku braku wspomnianego powyżej sprzężenia ma miejsce faktoryzacja rozkładu bazowego, $\tilde{p}(k, s) = \tilde{\psi}(s)\tilde{h}(k)$, co prowadzi do następującej, uproszczonej formuły:

$$\tilde{P}(k, s) = \frac{1 - \tilde{\psi}(s)}{s} \frac{1}{1 - \tilde{\psi}(s)\tilde{h}(k)}. \quad (3.18)$$

Jak wiadomo, propagator stanowi kluczową wielkość procesu stochastycznego (tutaj dany ogólnym wzorem (3.16)), gdyż możemy na jego podstawie wyznaczyć inne charakterystyki procesu, takie jak np. momenty, a w tym zwłaszcza momenty centralne i absolutne, a z nich kolejne miary, w tym m.in. kurtozy oraz autokorelacje. Miary te są konieczne zarówno do uzyskania niezbędnej wiedzy o procesie, jak też do opisu faktów empirycznych.

3.4 Charakterystyki formalizmu CTRW

3.4.1 Momenty

Ważnymi wielkościami opisującymi własności procesów stochastycznych są jego momenty $m_j(t)$, które możemy wyznaczyć wprost z propagatora w następujący sposób:

$$m_j(t) = \langle x^j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^j P(x, t) dx, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.19)$$

Z drugiej strony, można je otrzymać dysponując transformatą propagatora $\tilde{P}(k; s)$ jako jego odpowiednie pochodne w punkcie $k = 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_j(s) &= i^{-j} \frac{\partial^j \tilde{P}(k; s)}{\partial k^j} \Big|_{k=0}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \\ m_j(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\tilde{m}_j(s)]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Występują też przypadki, gdy całka we wzorze (3.19) jest nieokreślona lub rozbieżna. Wówczas nie możemy przypisać j -emu momentowi skończonej wartości.

Wielkością często wykorzystywaną w kontekście drugiego i czwartego momentu jest, oprócz wariancji, nadmiarowa kurtoza, zwana także ekscesem, zdefiniowana jako $\kappa(t) = \mu_4(t) - 3\mu_2(t)$, gdzie μ_j , $j = 2, 4$, są momentami centralnymi, odpowiednio, stopnia drugiego (wariancja) i czwartego. Oczywiście, momenty centralne są równe zwykłym jeżeli w procesie nie występuje dryf, gdyż wówczas znikają wszystkie zwykłe momenty stopnia nieparzystego. Ponieważ kurtoza nadmiarowa rozkładu normalnego znika, więc jeśli w procesie występuje niezerowa kurtoza, możemy określić go jako proces niegaussowski. Przy czym znikanie kurtozy nie determinuje gaussowskiego charakteru procesu – do tego potrzebne jest również znikanie wszystkich wyższych kumulant procesu, czyli stopnia wyższego niż czwarty [97]. W rozdz. 3.5 analizuję własności procesów wykorzystując właśnie drugą i czwartą kumulantę pod nieobecność kumulant nieparzystych.

Skrót	G	nG
B	B-G	B-nG
nB	nB-G	nB-nG

Tabela 3.1: Tabela przedstawia generyczną klasyfikację procesów dyfuzji: B oznacza proces Browna, nB oznacza proces niebrownowski, G oznacza proces Gaussa, nG oznacza proces niegaussowski.

Pożyteczną, generyczną klasyfikację procesów dyfuzji przedstawiłem w tabeli 3.1. Użyłem w niej następujących skrótów:

- B oznacza proces Browna,
- nB oznacza proces niebrownowski,
- G oznacza proces Gaussa,
- nG oznacza proces niegaussowski.

Mówimy, że proces dyfuzji jest typu Browna jeżeli jego wariancja jest asymptotycznie liniową funkcją czasu. Niebrownowski proces dyfuzji jest jego zaprzeczeniem. Natomiast mamy do czynienia z dyfuzyjnym procesem Gaussa jeżeli wartości procesu podlegają rozkładowi Gaussa. Proces niegaussowski jest jego zaprzeczeniem. Zauważmy, że proces typu B-G jest odpowiednikiem Centralnego Twierdzenia Granicznego (CTG) – dotyczy czasu ciągłego a nie dyskretnego jak to ma miejsce w CTG. Pierwszy wiersz w tabeli 3.1 definiuje dyfuzję normalną (nie mylić z rozkładem normalnym), czyli brownowską, a ostatni wiersz w tej tabeli definiuje dyfuzję anomalną, czyli niebrownowską. Ponadto, pierwsza kolumna tabeli dotyczy dyfuzji gaussowskiej, a druga niegaussowskiej.

Klasyfikacja przedstawiona w tabeli 3.1 dotyczy zarówno procesów typu przelotów/lotów (ang. *flights*), czyli skokowych, jak też spacerów (ang. *walks*) zachodzących w czasie ciągłym. Porównanie ich dyfuzyjnych diagramów fazowych (czyli ich asymptotycznych w czasie własności) przedstawiłem w rozdz. 3.5 na bazie "uniwersalnych" procesów Weierstrassa.

3.4.2 Autokorelacje

Ważną wielkością charakteryzującą proces stochastyczny jest zależna od czasu autokowariancja prędkości procesu $\text{COV}_v(t)$ oraz standaryzowana autokowariancja, czyli zależna od czasu autokorelacja prędkości procesu $\text{ACF}_v(t)$. Dla stacjonarnego procesu stochastycznego autokowariancję prędkości procesu można wyznaczyć z dwóch pierwszych momentów procesu:

$$\text{COV}_v(t) = \frac{d^2 m_2(t)}{2dt^2} - \left(\frac{dm_1(t)}{dt} \right)^2. \quad (3.21)$$

Autokorelację możemy otrzymać dzieląc autokowariancję przez początkową wariancję prędkości $\sigma_v^2(t=0) = \langle [v(t=0)]^2 \rangle - \langle v(t=0) \rangle^2$. Wtedy, $ACF_v(t=0) = 1$. Prędkość procesu stochastycznego definiujemy za pomocą następującego ilorazu różnicowego:

$$v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\Delta x}{\Delta t_+} = \frac{x(t + \Delta t_+) - x(t)}{\Delta t_+}. \quad (3.22)$$

Oznaczenie Δt_+ mówi, że iloraz różnicowy jest liczony w czasie wprzód, natomiast Δx należy rozumieć jako jednokrokowe przemieszczenie procesu (skokowe lub nie) w czasie wprzód. Dobrze to ilustruje rysunek 3.2 na przykładach procesów Weierstrassa (opisanych w rozdz. 3.5).

Należy rozróżniać autokowariancję/autokorelację czasową i autokowariancję/autokorelację krokową. W autokowariancji/autokorelacji krokowej argumentem jest liczba kroków (równa liczbie punktów zwrotnych) o jaką przesuwamy się w szeregu czasowym. Oznacza to średniowanie po zespole statystycznym szeregów czasowych przy ustalonej liczbie kroków a nie przy ustalonym czasie – w różnych szeregach czasowych czas potrzebny na wykonanie ustalonej liczby kroków może być różny. Natomiast w autokowariancji/autokorelacji czasowej przedział czasu jest ustalony a zmianie może ulegać liczba kroków, jaka miała miejsce w tym przedziale czasu.

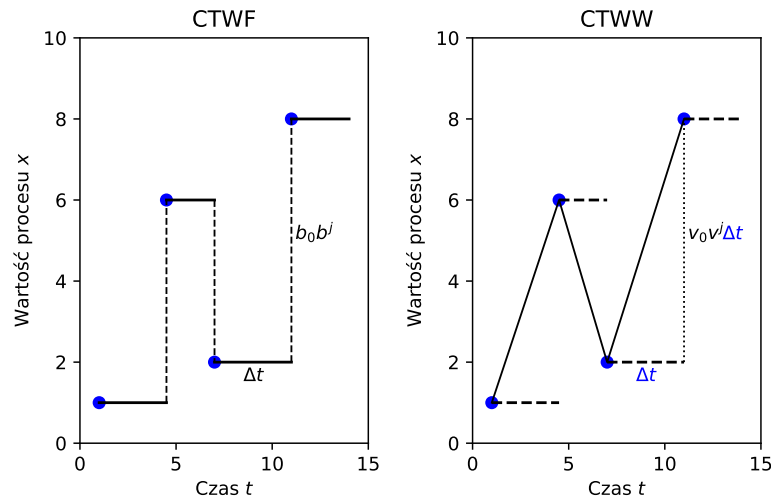
3.5 Przeloty oraz spacery

Rozdział ten oparty jest na wynikach publikacji [13] i dotyczy własności formalizmów CTRW typu 'przelotów' oraz 'spacerów'. Tego typu dychotomia jest typową klasyfikacją trajektorii błędzeń losowych, dlatego badanie jej konsekwencji jest tak ważnym elementem niniejszej rozprawy. Zbudowanie trajektorii błędzenia losowego w czasie ciągłym dla obu wspomnianych typów polega na określeniu jej kolejnych punktów zwrotnych – zdarzeń losowych. Punkty te pojawiają się w wyniku losowania kolejnych zmian procesu i odpowiadających im przedziałów czasu.

Procesy stochastyczne typu przelotów są dobrze widoczne w wewnątrzdziennej szeregach finansowych. Cena (zgodnie z definicją podaną w rozdz. 2.2) pozostaje przedziałami stała, a zmienia się "natychmiastowo" inicjując realizację nowej transakcji. W przypadku procesu stochastycznego typu spacerów, zamiast natychmiastowo przeskakiwać do nowej lokalizacji po upływie losowego czasu wyczekiwania, proces wędruje przez cały ten okres czasu ze stałą prędkością. Czyli ma miejsce budowanie trajektorii procesu za pomocą losowych odcinków łączących punkty zwrotne. Tego typu proces CTRW nadaje się do modelowania np. położenia ptaków (np. albatrosów [98], [99]) czy samolotów, podróżujących pomiędzy różnymi miejscami docelowymi.

Porównanie trajektorii przelotów i spacerów znajduje się na rysunku

3.2. Niektóre różnice, jakie niosą ze sobą te dwie metody budowania procesu, zaprezentowane zostały m.in. w pracy [100]. W tym rozdziale używam procesu hierarchicznego błędzenia Weierstrassa, aby porównać obydwa rodzaje błędzeń (przeloty ze spacerami). Błędzenia Weierstrassa cechują się sprzężeniem pomiędzy zmianą wartości procesu a odpowiadającym mu czasem realizacji, z którego wynikają odmienne charakterystyki przelotów oraz spacerów Weierstrassa. **Wybór procesów Weierstrassa wynika z faktu, że można je wykorzystywać jako reprezentantów dowolnej klasy uniwersalności poprzez odpowiedni wybór parametrów procesów.** Jest to wielce przydatna własność kategoryzująca w badaniu wspomnianych powyżej sprzężeń. Jest o tym mowa w dalszej części rozprawy. W rozprawie porównuję **dyfuzyjne diagramy fazowe przelotów Weierstrassa (ang. *continuous-time Weierstrass flight*, CTWF) z odpowiadającym im spacerom Weierstrassa (ang. *continuous-time Weierstrass walk*, CTWW).**



Rysunek 3.2: Porównanie trajektorii (czarne ciągłe linie) jednowymiarowych przelotów, czyli CTWF oraz spacerów, czyli CTWW, na przykładzie procesów Weierstrassa. Niebieskie kropki reprezentują punkty zwrotne, które łączone są odpowiednimi trajektoriami. Dla CTWF wartość procesu jest przedziałami stała, a w przypadku wystąpienia nowego zdarzenia pojawia się natychmiastowy skok położenia (przelot) do nowej lokalizacji. Natomiast w przypadku CTWW prędkość procesu jest przedziałami stała przez cały okres czasu upływający pomiędzy kolejnymi punktami zwrotnymi.

3.5.1 Ilościowe definicje przelotów oraz spacerów Weierstrassa

Podstawową własnością wyróżniającą procesy Weierstrassa jest zgeometryzowana hierarchiczna stochastyczna struktura zdarzeń. Każde kolejne

pokolenie tej hierarchii oznacza zdarzenie występujące z mniejszą częstotliwością, ale większe zarówno co do absolutnej zmiany wartości procesu, jak też długości przedziału czasu potrzebnego na realizację tego zdarzenia. Procesy Weierstrassa można zdefiniować poprzez (wielopokoleniowy) rozkład $p(\Delta x, \Delta t)$ kolejnego przemieszczenia Δx oraz czasu Δt potrzebnego na jego pokonanie. W ramach każdego pokolenia z osobna zmiany te, w przypadku przelotów, są statystycznie niezależne od poprzednich, jednak sumarycznie rzecz biorąc ma miejsce dla obu typów sprzężenie pomiędzy Δx oraz Δt . Zatem, rozkład $p(\Delta x, \Delta t)$ w ogólności nie rozkłada się na osobne czynniki przestrzenne i czasowe, czyli $p(\Delta x, \Delta t) \neq h(\Delta x)\psi(\Delta t)$.

W świetle powyższego, dla zadanego poziomu hierarchii j formalizmu CTWF można zaproponować wyrażenie postaci:

$$p_j^F \left(\frac{\Delta x}{b_0 b^j}, \frac{\Delta t}{\tau_0 \tau^j} \right) = \frac{1}{b_0 b^j} \frac{1}{\tau_0 \tau^j} \phi \left(\frac{\Delta x}{b_0 b^j}, \frac{\Delta t}{\tau_0 \tau^j} \right), \quad (3.23)$$

gdzie $b_0, b > 1$, τ_0 oraz $\tau > 1$ są parametrami procesu, a $\phi(\cdot, \cdot)$ jest znormalizowaną funkcją skalującą niezależną od poziomu j , czyli $\int_0^\infty d\vartheta \int_{-\infty}^\infty dy \phi(y, \vartheta) = 1$. Dodatkowo, zakładam symetryczność funkcji ϕ ze względu na przestrzenną zmienną y , co powoduje, że rozważany proces nie posiada dryfu. Przyjmuję dla przelotów i spacerów, że przestrzeń jest izotropowa a czas jednorodny. Wszystkie wielkości związane z przelotami będą posiadały górny indeks F , natomiast ze spacerami W . Powyższy wzór można interpretować następująco: wielkości skoków zarządzane są przez wielkość iloczynu $b_0 b^j$, który w oczywisty sposób zależny jest od poziomu hierarchii j , natomiast czasy wyczekiwania są niezależne od wielkości skoków i również zarządzane są poziomem j poprzez wartość iloczynu $\tau_0 \tau^j$. Przy czym, im wyższy poziom w hierarchii, z tym (średnio rzecz biorąc) większymi skokami i czasami wyczekiwania mamy do czynienia.

Analogiczna definicja dla spacerów Weierstrassa jest następująca:

$$p_j^W \left(\frac{\Delta x}{v_0 v^j \Delta t}, \frac{\Delta t}{\tau_0 \tau^j} \right) = \frac{1}{v_0 v^j \Delta t} \frac{1}{\tau_0 \tau^j} \phi \left(\frac{\Delta x}{v_0 v^j \Delta t}, \frac{\Delta t}{\tau_0 \tau^j} \right), \quad (3.24)$$

gdzie $v_0, v > 0$ to parametry procesu. W przypadku spacerów rysunek 3.2 (prawy panel) dobrze ilustruje zdefiniowane powyższym wzorem sprzężenie pomiędzy pojedynczym przemieszczeniem procesu a czasem potrzebnym na jego pokonanie. Występuje tutaj prędkość pokoleniowa $v_0 v^j$ z jaką porusza proces w przedziale czasu Δt . Parametry procesów są dobrane w sposób naturalny, tzn. tak aby w każdym pokoleniu (na każdym poziomie hierarchii) zachodziły równości:

$$b_0 b^j = v_0 v^j \langle \Delta t \rangle_j, \quad \langle \Delta t \rangle_j = \tau_0 \tau^j, \quad b_0 = v_0 \tau_0, \quad b = v \tau, \quad (3.25)$$

gdzie $\langle \Delta t \rangle_j$ jest średnim czasem wyczekiwania dla pokolenia j . Jak widać, w przypadku spacerów, proces jest przedziałami liniową funkcją czasu.

Występuje tutaj liniowa zależność czasoprzestrzenna na każdym poziomie hierarchii.

Każdy kolejny poziom w hierarchii występuje z mniejszą wagą – mniejszą częstotliwością. Przyjmujemy przypadek najprostsz, gdy stosunek tych wag w kolejnych pokoleniach jest stały. Prowadzi to do następującego wyrażenia:

$$w(j) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{1}{N^j}, \quad N > 1, \quad (3.26)$$

definiującego rozkład geometryczny sterowany parametrem N , który określa stosunek kolejnych wag $\frac{w(j+1)}{w(j)} = \frac{1}{N}$ niezależnie od j . Jest to zgodne z geometrycznym charakterem v^j , τ^j oraz b^j .

W tym miejscu warto wprowadzić parametry złożone typu wykładników fraktalnych $\beta = \frac{\log N}{\log b}$ oraz $\alpha = \frac{\log N}{\log \tau}$. **To właśnie te dwa parametry α i β charakteryzują asymptotyczne własności procesów Weierstrassa i definiują ich przynależność do określonej dyfuzyjnej klasy uniwersalności.** Wykazuję poniżej, że są to podstawowe wykładniki pozwalające budować dyfuzyjne diagramy fazowe zarówno dla procesu typu CTWF, jak też CTWW.

W oparciu o rozważania przeprowadzone w niniejszym podrozdziale definiuję jednokrokowe rozkłady postaci:

$$\begin{aligned} p^F(\Delta x, \Delta t) &= \sum_{j=0}^{\infty} w(j) \frac{1}{b_0 b^j} \frac{1}{\tau_0 \tau^j} \phi\left(\frac{\Delta x}{b_0 b^j}, \frac{\Delta t}{\tau_0 \tau^j}\right), \\ p^W(\Delta x, \Delta t) &= \sum_{j=0}^{\infty} w(j) \frac{1}{v_0 v^j \Delta t} \frac{1}{\tau_0 \tau^j} \phi\left(\frac{\Delta x}{v_0 v^j \Delta t}, \frac{\Delta t}{\tau_0 \tau^j}\right), \end{aligned} \quad (3.27)$$

stanowiące uogólnione (hierarchiczne) rozkłady Weierstrassa. W dalszym ciągu wprowadzę jawną postać funkcji skalowania ϕ wspólna dla przeLOTów i spacerów.

3.5.2 Rozkład skoków oraz ich sprzężenie z czasami wyczekiwania

Aby pokazać różnicę pomiędzy przelotami i spacerami, wyznaczam drugi moment pojedynczych skoków – w przypadku spacerów uwzględniam jeszcze losowość czasu wyczekiwania. Dla ustalonego poziomu j można ze wzorów (3.23) i (3.24) łatwo wyznaczyć zależność:

$$\langle \Delta x^2 \rangle_j^W = \langle \Delta x^2 \rangle_j^F \frac{\langle y^2 \theta^2 \rangle}{\langle y^2 \rangle}, \quad (3.28)$$

gdzie moment $\langle y^n \vartheta^m \rangle = \int_0^\infty d\vartheta \vartheta^m \int_{-\infty}^\infty dy y^n \phi(y, \vartheta)$, $n, m \geq 0$, przy czym $y = \frac{\Delta x}{v_0 v^j \Delta t}$ a $\vartheta = \frac{\Delta t}{\tau_0 \tau^j}$ oraz w oparciu o wyrażenie (3.23) otrzymujemy:

$$\langle \Delta x^2 \rangle_j^F = b_0^2 b^{2j} \langle y^2 \rangle, \quad (3.29)$$

gdzie $\langle y^2 \rangle$ jest momentem brzegowym bezwymiarowej zmiennej losowej y .

W przypadku, gdy funkcja skalująca ϕ faktoryzuje się (co ma miejsce poniżej - patrz wzór (3.32)), zachodzi $\langle y^n \vartheta^m \rangle = \langle y^n \rangle \langle \vartheta^m \rangle$ a stąd równanie (3.28) upraszcza się do postaci:

$$\langle \Delta x^2 \rangle_j^W = \langle \vartheta^2 \rangle \langle \Delta x^2 \rangle_j^F, \quad (3.30)$$

gdzie $\langle \vartheta^2 \rangle$ jest drugim momentem bezwymiarowej zmiennej losowej ϑ . W powyższej relacji współczynnikiem proporcjonalności jest wariancja zmiennej losowej ϑ , która wzbogaca fluktuacje przemieszczenia spaceru (w stosunku do przelotu) na sposób multiplikatywny.

Powyższe wyrażenie w połączeniu z wzorami (3.27) wyznacza związek pomiędzy sumarycznymi (ważonymi/hierarchicznymi) drugimi momentami pojedynczych przemieszczeń dla spacerów i przelotów. Mianowicie,

$$\begin{aligned} \langle \Delta x^2 \rangle^W &= \sum_{j=0}^{\infty} w(j) \langle \Delta x^2 \rangle_j^W = \langle \Delta x^2 \rangle^F \langle \vartheta^2 \rangle = b_0^2 Y \langle y^2 \rangle \langle \vartheta^2 \rangle, \\ Y &= \begin{cases} \frac{1-1/N}{1-b^2/N} > 1 & \text{dla } \beta > 2, \\ \infty & \text{dla } \beta < 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Jak widać, zakres zmienności parametru β określa przedział, w którym istnieje drugi moment pojedynczych przemieszczeń dla obydwu procesów Weierstrassa, bądź nie istnieje (tzn. jest nieskończony). Powyższe wyrażenie jest interesujące, gdyż pomimo istnienia zależności pomiędzy zmiennymi losowymi Δx oraz Δt ma miejsce faktoryzacja wariancji jednokrokowego przemieszczenia na część przestrzenną i czasową.

Aby dokładniej zobrazować różnice występujące pomiędzy przelotami a spacerami, przyjmę prostą postać ϕ , której będę używać też w dalszych obliczeniach w tym rozdziale:

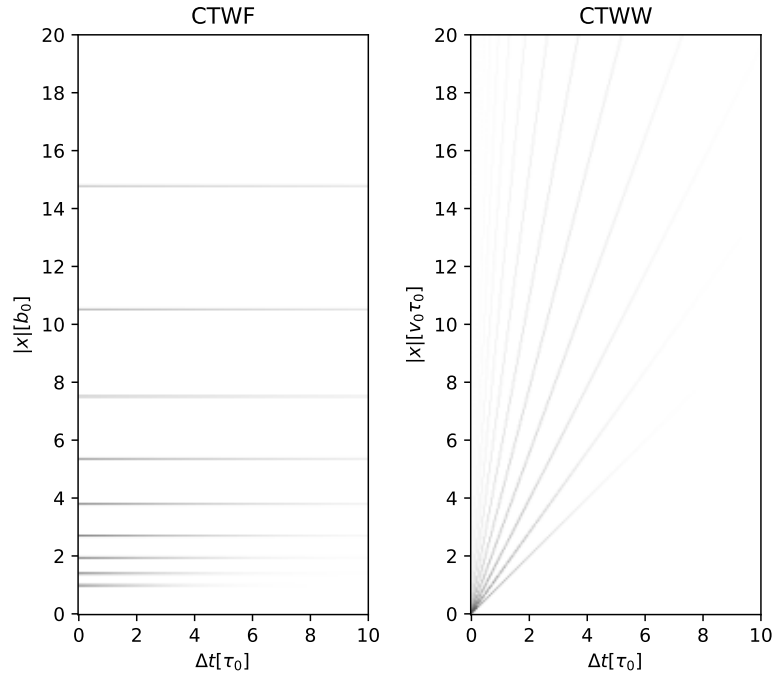
$$\phi(y, \vartheta) = \frac{1}{2} [\delta(y-1) + \delta(y+1)] \exp(-\vartheta). \quad (3.32)$$

Wstawiając konkretne postaci ϕ oraz $w(j)$ do równań (3.27) otrzymujemy jawne postaci łączonych rozkładów przemieszczeń Δx i odpowiadających im przedziałów czasu Δt :

$$p(\Delta x, \Delta t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sum_{j=0}^{\infty} N^{-j} [\delta(x - z_j) + \delta(x + z_j)] \frac{1}{\tau_0 \tau^j} \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_0 \tau^j}\right)$$

$$\stackrel{\text{ozn.}}{=} \begin{cases} p^F(\Delta x, \Delta t), & \text{dla } z_j = b_0 b^j, \\ p^W(\Delta x, \Delta t), & \text{dla } z_j = v_0 v^j \Delta t. \end{cases} \quad (3.33)$$

Histogramy tych rozkładów przedstawiłem na rysunku 3.3. Na tym wykresie dobrze widać (prawy panel) sprzężenie pomiędzy wartościami przemieszczeń a czasami potrzebnymi na ich pokonanie. Lewy panel ilustruje brak takiego sprzężenia.



Rysunek 3.3: Przedstawienie składowych pokoleniowych łącznego rozkładu dla przelotów (lewy panel) oraz spacerów (prawy panel), zgodnie ze wzorem (3.33) dla wartości $N = 1.05$, $\tau = 1.3$, $b = 1.4$ i $v = 1.4$. Poszczególne linie na obu panelach są indeksowane poziomem j , opisując składowe pokoleniowe obu rozkładów. Wzrost intensywności szarości piksela odpowiada większej wartości rozkładu – jest ona tłumiona czynnikiem wykładniczym. Prawy panel dobrze ilustruje sprzężenie wartości czasu wyczekiwania z wartością skoku.

Ze wzoru (3.33) łatwo otrzymam rozkłady brzegowe postaci:

$$\begin{aligned}\psi^F(\Delta t) &= \psi^W(\Delta t) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sum_{j=0}^{\infty} N^{-j} \frac{1}{\tau_0 \tau^j} \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_0 \tau^j}\right), \\ h^F(\Delta x) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sum_{j=0}^{\infty} N^{-j} \delta(|\Delta x| - b_0 b^j), \\ h^W(\Delta x) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sum_{j=0}^{\infty} N^{-j} \exp\left(-\frac{|\Delta x|}{b_0 b^j}\right),\end{aligned}\tag{3.34}$$

które używam poniżej do wyznaczenia propagatorów.

3.5.3 Propagatory spacerów oraz przelotów

Propagatory zestacjonaryzowane ze względu na warunki początkowe wyrażone są następująco ogólnymi wzorami w domenie Fouriera-Laplace'a [101]:

$$\tilde{P}_{st}^{W,F}(k, s) = \tilde{\Xi}^{W,F}(k, s) + \tilde{\chi}^{W,F}(k, s) \tilde{P}^{W,F}(k, s),\tag{3.35}$$

gdzie dla spacerów:

$$\begin{aligned}\tilde{\Xi}^W(k, s) &= \tau_0 \left(1 - \frac{\tau}{N}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\tau^2}{N}\right)^j \tilde{\Theta}_j^W(k, s), \\ \tilde{\chi}^W(k, s) &= \left(1 - \frac{\tau}{N}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\tau}{N}\right)^j \tilde{\Theta}_j^W(k, s), \\ \tilde{P}^W(k, s) &= \frac{\tilde{\Psi}^W(k, s)}{1 - \tilde{p}^W(k, s)} = \tau_0 \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\tau}{N}\right)^j \tilde{\Theta}_j^W(k, s)}{\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{N}\right)^j \left(1 - \tilde{\Theta}_j^W(k, s)\right)}, \\ \tilde{\Theta}_j^W(k, s) &= \frac{s \tau_0 \tau^j + 1}{(s \tau_0 \tau^j + 1)^2 + (k b_0 b^j)^2},\end{aligned}\tag{3.36}$$

natomiast dla przelotów:

$$\begin{aligned}\tilde{\Xi}^F(k, s) &= \tau_0 \left(1 - \frac{\tau}{N}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\tau^2}{N}\right)^j \tilde{\Theta}_j^F(k, s), \\ \tilde{\chi}^F(k, s) &= \left(1 - \frac{\tau}{N}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\tau}{N}\right)^j \tilde{\Theta}_j^F(k, s), \\ \tilde{P}^F(k, s) &= \frac{\tilde{\Psi}^F(k=0, s)}{1 - \tilde{p}^F(k, s)} = \tau_0 \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\tau}{N}\right)^j \tilde{\Theta}_j^F(k=0, s)}{\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{N}\right)^j \left(1 - \tilde{\Theta}_j^F(k, s)\right)}, \\ \tilde{\Theta}_j^F(k, s) &= \cos(k b_0 b^j) \tilde{\Theta}_j^W(k=0, s),\end{aligned}\tag{3.37}$$

przy czym indeks st oznacza stan stacjonarny. Pierwszy składnik po prawej stronie równania (3.35) opisuje przetrwanie procesu stacjonarnego (spaceru lub przelotu) w początku układu, a pierwszy czynnik w drugim składniku stacjonarny rozkład pojedynczego przemieszczenia (spaceru lub przelotu). Stan stacjonarny uzyskuje się tutaj poprzez takie średniowanie stanu niestacjonarnego po warunku początkowym, które prowadzi do niezależności od wyboru chwili początkowej. Dzięki temu uzyskuje się kluczową relację (3.35) pomiędzy stacjonarnymi i niestacjonarnymi propagatorami, zarówno dla procesu przelotów jak i spacerów. W dalszym ciągu wykorzystuję kluczowy wzór (3.35) do analizy zestacjonaryzowanych parzystych momentów przestrzennych.

3.5.4 Momenty spacerów

Zgodnie z wynikami zawartymi w pracach [102], [103], drugi moment procesu spacerów można zapisać jako sumę części regularnej i singularnej:

$$\langle x(t)^2 \rangle_{st}^W = \langle x(t)^2 \rangle_{st}^{Wreg} + \langle x(t)^2 \rangle_{st}^{Wsing}. \quad (3.38)$$

Wyraz regularny odpowiada brownowskiemu (liniowemu) wzrostowi wariancji z czasem:

$$\langle x(t)^2 \rangle_{st}^{Wreg} = 2D_{st}^W t = \frac{\langle \Delta x^2 \rangle^W}{\langle \Delta t \rangle} t. \quad (3.39)$$

Natomiast część singularna jest równa:

$$\begin{aligned} \langle x(t)^2 \rangle_{st}^{Wsing} &= \frac{2D_{st}^{Wf}}{\Gamma(\eta_1 + 1)} \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{\eta_1}, \\ D_{st}^{Wf} &= b_0^2 \frac{\tau_0}{\langle \Delta t \rangle} \frac{1 - 1/N}{\log N} \frac{\pi \alpha}{|\sin(\pi(\eta_1 - 1))|}, \\ \eta_1 &= 1 + \alpha \left(\frac{2}{\beta} - 1 \right), \quad \eta_1 \neq 1, \quad \eta_1 < 2, \end{aligned} \quad (3.40)$$

gdzie $\Gamma(\cdot)$ to funkcja gamma Eulera. Przechodząc do funkcji autokorelacji prędkości procesu, korzysta się, oczywiście, jedynie z części singularnej:

$$C_{st}^W(t) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \langle x(t)^2 \rangle_{st}^W = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \langle x(t)^2 \rangle_{st}^{Wsing} = \frac{1}{\tau_0} \frac{\eta_1 - 1}{\Gamma(\eta_1)} D_{st}^{Wf} \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{-(2-\eta_1)}, \quad (3.41)$$

gdzie $\eta_1 < 2$. W podobny sposób można przeanalizować czwarty moment, dla którego również zachodzi:

$$\begin{aligned}
 \langle x(t)^4 \rangle_{st}^W &= \langle X(t)^4 \rangle_{st}^{Wreg} + \langle x(t)^4 \rangle_{st}^{Wsing}, \\
 \langle x(t)^4 \rangle_{st}^{Wreg} &= 12 \left(D_{st}^W \right)^2 t^2 = 12 \left(D_{st}^W \right)^2 t^2, \\
 \langle x(t)^4 \rangle_{st}^{Wsing} &= \frac{12 D_{st}^{2fW}}{\Gamma(\eta_2 + 1)} \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{\eta_2}, \\
 D_{st}^{2fW} &= b_0^4 \frac{\tau_0}{\langle \Delta t \rangle} \frac{1 - 1/N}{\log N} \frac{\pi \alpha (\eta_2 - 2)(\eta_2 - 3)}{\sin(\pi(\eta_2 - 1))}, \\
 \eta_2 &= 1 + \alpha \left(\frac{4}{\beta} - 1 \right), \quad \eta_2 < 4,
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

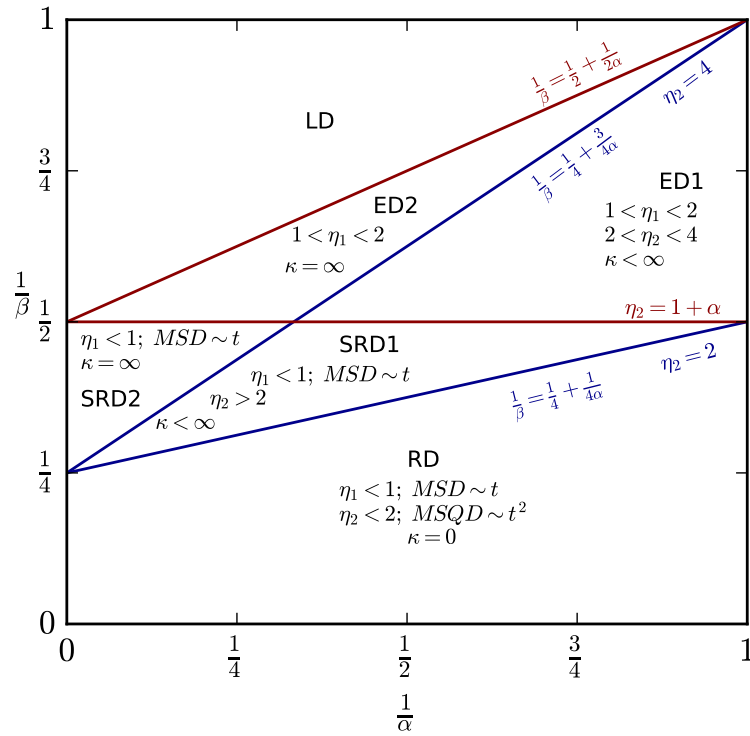
gdzie D_{st}^{2fW} jest fraktalnym współczynnikiem super-Burnetta. Wyprowadzenie powyższych wzorów wraz z zakresem ich stosowalności zamieściłem w dodatku C.

3.5.5 Dyfuzyjny diagram fazowy procesu spacerów

Połączenie równań (3.40) i (3.42) pozwala na zbudowanie wygodnych dyfuzyjnych diagramów fazowych procesu spacerów Weierstrassa w zmiennych $\frac{1}{\alpha}$ oraz $\frac{1}{\beta}$ za pomocą drugiego (MSD) i czwartego (MSQD) momentu procesu. Diagramy te zostały zbudowane dla asymptotycznie długich czasów $t \gg \tau_0 \tau$ (stąd przymiotnik "dyfuzyjne"). Odpowiednie obliczenia zawarłem w dodatku C. Na rys. 3.4 wyróżniłem sześć osobnych faz, które omówiłem poniżej (w oparciu o wcześniejszą publikację [13]).

Pierwszy poziom klasyfikacji (drugorzędowy) wynika z zachowania drugiego momentu i dzieli diagram na trzy zasadnicze obszary.

1. Dla $\frac{1}{\beta} < \frac{1}{2}$ mamy do czynienia z obszarem (składającym się z faz pół-regularnych SRD1 i SRD2 oraz fazy regularnej RD), które charakteryzują się liniową zależnością drugiego momentu (MSD) od czasu t oraz subliniową zależnością składowej singularnej MSD od czasu. Innymi słowy, składowa regularna $\langle x(t)^2 \rangle_{st}^{Wreg}$ dominuje tutaj nad składową singularną $\langle x(t)^2 \rangle_{st}^{Wsing}$. Ta druga stanowi podstawę potęgowego zanikania w czasie funkcji autokorelacji prędkości procesu. Różnice pomiędzy tymi fazami są widoczne dopiero na poziomie MSQD – jej składowej singularnej oraz nadmiarowej kurtozy.
2. Kolejny obszar diagramu fazowego leżący pomiędzy czerwonymi liniami prostymi zadanymi równaniami $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{2}$ oraz $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha}$ (składający się z dwóch faz ED1 i ED2), jest scharakteryzowany superliniową zależnością składnika singularnego $\langle x(t)^2 \rangle_{st}^{Wsing}$ od czasu t (wykładnik η_1 przyjmuje tutaj wartości pomiędzy 1 a 2). Oznacza to, że MSD jest



Rysunek 3.4: Diagram z sześcioma fazami dyfuzyjnymi dla stacjonarnego procesu CTWW. Dokładny opis znajduje się w głównym tekście w rozdziale 3.5.5. Użyte tutaj skróty: MSD (ang. *stationary mean-square displacement*) $= \langle x(t)^2 \rangle_{st}^W$, MSQD (ang. *stationary mean-square quadratic displacement*) $= \langle x(t)^4 \rangle_{st}^W$. (Uwaga: κ oznacza tutaj skrótowo wartość absolutną kurtozy.)

skończone, ale rośnie szybciej niż liniowo (superliniowo), z wykładnikiem η_1 , przy czym jego granicą górną dla tego obszaru jest wartość $\eta_1 = 2$ odpowiadająca dyfuzji balistycznej.

3. Dla obszaru odpowiadającego ostatniej części diagramu fazowego leżącego powyżej górnej czerwonej linii, MSD jest rozbieżne $\langle x(t)^2 \rangle_{st}^W = \infty$, dla $t > 0$. Jest to faza dyfuzji Lévy'ego (LD).

Jak widać, dyfuzyjny diagram fazowy przedstawiony na rys. 3.4 wprowadza zasadniczą klasyfikację procesu Weierstrassa, scharakteryzowaną asymptotycznym (w czasie) zachowaniem drugiego (MSD) i czwartego (MSQD) momentu. Teraz omawiam wkłady do charakterystyki poszczególnych dyfuzyjnych faz diagramu, jakie daje ten drugi, czyli do charakterystyki na poziomie czwartego rzędu.

1. Faza leżąca poniżej dolnej niebieskiej linii prostej (zdefiniowanej przez wartość wykładnika $\eta_2 = 2$) jest scharakteryzowana przez liniową zależność $MSD \sim t$ oraz brak nadmiarowej kurtozy $\kappa = 0$ (czyli znikanie kumulanty, tzn. półzmiennika czwartego rzędu), a ponadto przez

czwarty moment (MSQD) rosnący kwadratowo z czasem, $\langle x(t)^4 \rangle_{st}^W \sim t^2$. Jest to faza dyfuzji regularnej RD. Jednak nie wiemy czy wyższe kumulanty znikają w tej fazie, co oznacza, że nie wiemy czy należy tą fazę traktować jak gaussowską. Zatem, możemy na nią patrzeć co najwyżej jak na dyfuzję brownowską. Innymi słowy, procesy należące do tej fazy trzeba lokować w trzeciej kolumnie i drugim wierszu (element B-nG) tabeli 3.1.

2. Dla faz diagramu (SRD1 i ED1) znajdującymi się pomiędzy niebieskimi (ukośnymi) liniami prostymi odpowiadającymi wartościom wykładników (dolna linia) $\eta_2 = 2$ a (górną) $\eta_2 = 4$, istnieje skończona nadmiarowa kurtoza, a czwarty moment procesu rośnie w czasie szybciej niż kwadratowo, z wartością wykładnika η_2 ograniczoną od góry wartością równą 4.
3. Fazy leżące pomiędzy górnymi liniami prostymi: niebieską i czerwoną (czyli SRD2 i ED2) są scharakteryzowane rozbieżną nadmiarową kurtozą wynikającą z rozbieżności MSQD.
4. Natomiast obszar powyżej górnej czerwonej linii prostej stanowi fazę LD.

Jak widać, mamy tutaj do czynienia z sześcioma fazami: RD, SRD1, SRD2, ED1, ED2, LD. Pięć spośród tych faz (czyli za wyjątkiem fazy LD) charakteryzują się długozasięgowym (potęgowym) zanikiem autokorelacji prędkości procesu z wykładnikiem zaniku równym $2 - \eta_1$, gdzie $\eta_1 < 2$. Z punktu widzenia skończonej wartości MSD, fazy te ograniczone są od góry dyfuzją balistyczną. Zauważmy jeszcze, że wspomnianych pięć faz zajmuje 3/4 obszaru diagramu fazowego (pozostałe 1/4 obszaru dotyczy fazy LD).

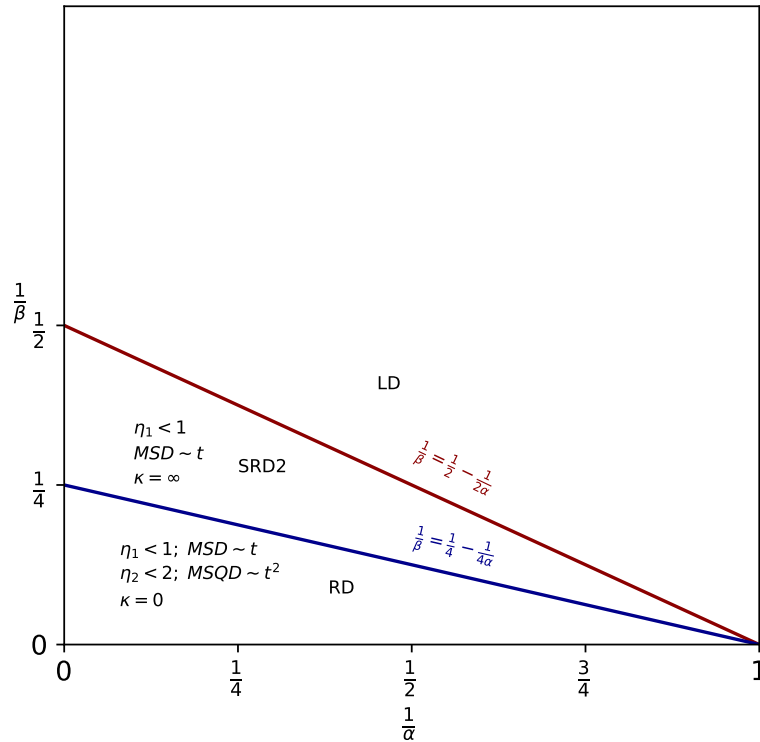
3.5.6 Charakterystyka procesu przelotów

Z technicznego punktu widzenia, analiza stacjonarnego procesu CTWF jest analogiczna do tej dla procesu CTWW. Jednakże na skutek tego, że prędkości procesu pomiędzy punktami zwrotnymi są nieskończone (proces jest typu skokowego), faza LD zajmuje znacznie większy obszar (3/4 całego diagramu fazowego) w porównaniu z pozostałymi fazami (patrz rys. 3.5). W tych pozostałych fazach składowa singularna jest zdominowana przez liniowe zachowanie drugiego momentu w funkcji czasu (gdyż $\eta_1 < 1$). Prowadzi to z jednej strony do procesu brownowskiego, a z drugiej do potęgowego zaniku funkcji autokorelacji prędkości procesu.

Na diagramie fazowym linie rozdziału faz dla procesu CTWF nie przecinają się w przeciwieństwie do procesu CTWW. Obszar diagramu poniżej czerwonej linii jest rozdzielony niebieską linią, odpowiadającą dwóm fazom, w których czwarty moment procesu zachowuje się różnie. Powyżej niej znajduje się półregularna dyfuzja SRD2 z nieskończoną kurtozą $\kappa = \infty$ należąca do fazy oznaczonej w tabeli 3.1 przez element B-nG. Poniżej jest obszar dyfuzji regularnej RD; jednak podobnie jak w przypadku procesu

spacerów, jest to obszar fazy brownowskiej, ale niegaussowskiej (także B-nG).

Fakt, że diagram fazowy dla stacjonarnego procesu CTWW jest bogatszy (posiada większą liczbę faz) od analogicznego dla procesu CTWF nie dziwi. Proces CTWW dostarcza więcej możliwości, gdyż pojedyncze przemieszczenie w tym procesie jest (dodatkowo) bezpośrednio zależne od czasu (w przeciwieństwie do procesu stacjonarnego CTWF). Dokładniejsza analiza zachowania momentów dla procesu przelotów (podobnie jak dla spacerów) jest zawarta w dodatku C.



Rysunek 3.5: Diagram z trzema fazami dyfuzyjnymi dla stacjonarnego procesu CTWF. Jak widać, faza LD zajmuje trzykrotnie większy obszar niż pozostałe fazy razem wzięte – odwrotnie jak ma to miejsce dla procesu CTWW (patrz rys. 3.4).

3.5.7 Podsumowanie

W niniejszym podrozdziale przedstawiłem wpływ hierarchicznego sprzężenia czasoprzestrzennego na dyfuzję. W przypadku CTWW zaprezentowałem to, jak na dyfuzję oddziałują: zhierarchizowana prędkości procesu, średni czas relaksacji oraz dodatkowe sprzężenie powstałe ze względu na czasy elementarnych (jednokrokowych) przemieszczeń pomiędzy punktami zwrotnymi trajektorii błędzenia. W przypadku CTWF, w którym nie występuje wspomniane dodatkowe sprzężenie, ukazałem zależności między

dyfuzją a zhierarchizowanymi elementarnymi przemieszczeniami tego procesu.

Kluczowym, nowatorskim wynikiem tego rozdziału, wynikającym z wymienionych powyżej sprzężeń, są diagramy fazowe dla procesu spacerów (rys. 3.4) i przelotów (rys. 3.5), wykazujące różnorodność procesów Weierstrassa. Zasadniczo można wyróżnić trzy główne cechy tych diagramów fazowych, a mianowicie:

- (i) Powód istnienia większej liczby faz w przypadku diagramu dla procesu CTWW, w porównaniu z tym dla CTWF, ma charakter fluktuacyjny, co determinuje też zachowania zarówno MSD, jak i MSQD. Dynamika stochastyczna wyrażona w postaci elementarnego, pojedynczego przemieszczenia procesu CTWW $v_0 v^j \Delta t$ zależy zarówno od $v_0 v^j$, jak też od fluktuującej zmiennej losowej Δt , podczas gdy dla CTWF tylko od $b_0 b^j$. Zatem dla procesu CTWW mamy do czynienia (w ramach równań dynamiki stochastycznej) z dwiema zmiennymi losowymi (j oraz Δt), podczas gdy dla procesu CTWF tylko z jedną (j).
- (ii) W przypadku obu procesów fazy zdefiniowane skończoną wartością MSD dla skończonego czasu, są ograniczone przez dyfuzję balistyczną (scharakteryzowaną wykładnikiem $\eta_1 = 2$). Pokonanie tego ograniczenia i przejście do obszaru superbalistycznego (hiperdyfuzji) byłoby możliwe w przypadku procesu CTWW pod warunkiem zastąpienia ruchu jednostajnego w pojedynczym przemieszczeniu procesu (w dynamice stochastycznej) przez jednostajnie przyspieszone przemieszczenie (czyli zamiast wyrażenia $v_0 v^j \Delta t$ wzięcie $a_0 a^j (\Delta t)^2 / 2$).
- (iii) Dla obu procesów występuje faza LD, przy czym dla procesu CTWW zajmuje ona obszar 1/4 diagramu fazowego, podczas gdy dla procesu CTWF jest to obszar 3/4 diagramu.

Warto zdać sobie sprawę, że technicznie rzecz biorąc, granice istnienia faz różnych od fazy LD, są zdefiniowane po prostu warunkami określającymi zbieżność (nieskończonych) szeregów definiujących momenty typu (C.1) oraz (C.3). Odpowiednie obliczenia dotyczące tego aspektu przedstawiłem w dodatku C. Zauważmy również, że analiza diagramów fazowych (czyli de facto momentów) rzędów wyższych niż czwarty ($m > 4$) została wstępnie przeprowadzona w mojej pracy [13], a także naszkicowana w dodatku C. Jednak w niniejszym rozdziale skupiłem się przede wszystkim na diagramach typu dyfuzyjnego ($m = 2, 4$). Analiza wyższych momentów procesu pokazuje znaczącą różnicę pomiędzy procesami spacerów i przelotów. Spacery, poprzez uwzględnianie dodatkowego (w stosunku do przelotów) sprzężenia czasoprzestrzennego, są procesem znacznie bardziej złożonym.

Proces przelotów posiada kurtozę albo znikającą, albo nieskończoną. Ponadto, drugi moment tego procesu jest albo liniową funkcją czasu, albo jest rozbieżny. Rozróżnione zostały tutaj trzy fazy: 1) dyfuzji Lévy'ego (LD),

2) dyfuzji półregularnej (SRD2) z nieskończoną kurtozą oraz 3) brownowskiej i niegaussowskiej dyfuzji regularnej (RD). Te dwie ostatnie fazy należą do kategorii oznaczonej w tabeli 3.1 jako B-nG.

Natomiast w przypadku drugiego momentu dla spacerów: 1) drugi moment może rosnać liniowo w czasie, 2) może występować superdyfuzja, aż do dyfuzji balistycznej lub 3) daje się zaobserwować dyfuzję Lévy’ego. Fazy, o których mowa w pkt. 1), należą do kategorii B-nG (patrz tabela 3.1), natomiast wspomniane w pkt. 2) do kategorii nB-nG. Ponadto dla procesu spacerów zachodzą bardziej złożone zachowania dla czwartego momentu. Występuje tutaj: 1) faza bez nadmiarowej kurtozy (RD), trzykrotnie obszerniejsza niż dla procesu przelotów, 2) faza (ED1) z czwartym momentem rosnącym szybciej niż kwadratowo w czasie, z wykładnikiem $2 < \eta_2 \leq 4$ oraz 3) faza (ED2) z nieskończoną nadmiarową kurtozą. Przejście pomiędzy fazami o skończonej (SRD1 i ED1) oraz nieskończonej (SRD2 i ED2) nadmiarowej kurtozie rozdziela na dwie części granica faz w postaci niebieskiej linii prostej zadanej równaniami: $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4\alpha}$ oraz $\eta_2 = 4$.

Powyższe wyniki pokazują obiecujące możliwości modelowania różnych rodzajów dyfuzji, a w tym zwłaszcza dyfuzji anomalnej, za pomocą procesu Weierstrassa – procesu, który za pomocą jednej formuły i zmiennych wartości parametrów sterujących jest w stanie opisać prawie wszystkie rodzaje dyfuzji ujęte w tabeli 3.1. W tym w szczególności także dyfuzję typu nB-G, czyli fraktalnego (ułamkowego) ruchu Browna (ang. *fractional Brownian motion*, fBm) zdefiniowanego przez Kołmogorowa w kontekście badań nad turbulencją, a następnie wprowadzonego do szeroko rozumianych finansów przez Mandelbrota oraz Van Ness. Jak widać, błędzenie Weierstrassa w istotny sposób rozszerza fBm.

Rozdział 4

Modele błędzenia losowego w czasie ciągłym w modelowaniu finansowych szeregów czasowych

W niniejszym rozdziale przedstawię przykłady zastosowań procesów błędzenia losowego w czasie ciągłym (CTRW) w modelowaniu danych finansowych. Na przykładzie modelu z jednokrokową pamięcią pomiędzy sąsiednimi zmianami, zaproponowanego w [14], pokażę rolę czasów wyczekiwania w autokorelacji prędkości procesu. Następnie, poprzez symulacje wykonane w oparciu o dane empiryczne wykażę, że niezbędne i kluczowe jest uwzględnienie zależności między okresami międzytransakcyjnymi. Wyniki te przedstawiłem w pracy [15]. Są one podstawową motywacją do stworzonego w rozdziale 5 modelu CTRW ze skorelowanymi czasami wyczekiwania.

Na początku XXI wieku zaczęto stosować modele błędzenia losowego w czasie ciągłym do opisu dynamiki cen walorów finansowych. Metodologia ta przyjęła się i rozwinęła. Obecnie istnieje kilka prac przeglądowych opisujących zastosowania CTRW w modelowaniu danych finansowych [8], [79], [86], [104], [105]. Pierwsze prace skupiały się na zmianach ceny, konkretnie na dużych skokach [75]. Zaproponowany model wykazywał dyfuzję anomalną dla krótkich czasów. Kolejne publikacje skupiały się nad rozszerzeniem metod analizy danych. Zauważono, że opis jedynie zachowania się wariancji procesu jest niewystarczający. W danych empirycznych obserwowano pamięci dalekozasięgowe, nieliniowe korelacje (między innymi autokorelację modułów zmian), rozkłady gruboogonowe czy multifraktalność. Okazało się, że również czasy międzytransakcyjne posiadają podobne, nietrywialne charakterystyki [106], co można zauważyć pracując na niezagregowanych danych tickowych, bądź transakcyjnych.

Jeśli przyjmiemy definicję ceny jako cenę ostatniej transakcji, od razu widać podobieństwo wykresów przebiegu ceny oraz trajektorii CTRW odpowiednio z rysunków 2.3 oraz 3.1. W kontekście rozdziału 3.5 porównującego spacery z przelotami, oznacza to, że słusznym podejściem będzie zastosowanie formalizmu przelotów. Zatem, żeby opisać cenę za pomocą błędzenia losowego w czasie ciągłym, uznajemy, że wartość procesu odpowiada cenie (a dokładnie zlogarytmowanej cenie) instrumentu finansowego.

Wydarzeniami zmieniającymi natychmiastowo cenę waloru, a przez to też wartość procesu, są transakcje. Okresy pomiędzy transakcjami to czasy wyczekiwania, kiedy wartość procesu jest stała.

Wiadomym jest, że empiryczny rozkład logarytmicznych zmian $h(\Delta x)$ jest niegaussowski, jednak w większości prac przyjmuje się istnienie dwóch pierwszych momentów tego rozkładu. Z jednej strony zgadza się to dobrze z danymi empirycznymi (opisane jest to szerzej w akapicie dotyczącym rys. 2.5), a z drugiej strony skończone wartości $\langle \Delta x \rangle$ i $\langle \Delta x^2 \rangle$ pozwalają na analizę wariancji i autokorelacji zmian procesu. Podobnie dobrze zbadane są odstępstwa empirycznego rozkładu czasów międzytransakcyjnych $\psi(\Delta t)$ od rozkładu wykładniczego. Jednym z proponowanych rozkładów jest rozkład wykładniczy Weibulla (patrz wzór 2.2), którego dopasowania przedstawione są na rys. 2.7 i 2.8. W dalszej części pracy pozostawię dowolną postać rozkładu $\psi(\Delta t)$, jednak założę istnienie wszystkich jego momentów $\langle \Delta t^n \rangle$.

4.1 Pamięci krótkozasięgowe w finansowych modelach CTRW

Jednym z pierwszych i istotniejszych modeli CTRW uwzględniających jednokrokową pamięć pomiędzy sąsiednimi zmianami ceny jest model zaproponowany przez Montero i Masolivera [87], [107]. Skupiono się w nim na zależności między kolejnymi przyrostami ceny, zakładając, że czasy wyczekiwania są niezależne. Same zmiany ceny były zamodelowane w bardzo prosty sposób, jako dwustanowy rozkład skoków (w górę i dół) lub trzystanowy, gdzie z pewnym prawdopodobieństwem wartość procesu nie ulegała zmianie. Odpowiada to sytuacji, gdzie cena zmienia się o najmniejszą możliwą wartość, czyli pojedynczy tick, co jest bardzo częstą sytuacją w danych empirycznych. W dalszej części pracy autorzy postulują ogólny wzór na jednokrokową pamięć, będący konkretną postacią wzoru (3.4):

$$\begin{aligned} p(\Delta x_n, \Delta t_n | \Delta x_{n-1}, \Delta t_{n-1}; \Delta x_{n-2}, \Delta t_{n-2}; \dots; \Delta x_1, \Delta t_1) &= h(\Delta x_n | \Delta x_{n-1}) \psi(\Delta t_n), \\ h(\Delta x_n | \Delta x_{n-1}) &= h(\Delta x_n) [1 + \epsilon \operatorname{sgn}(\Delta x_n) \operatorname{sgn}(\Delta x_{n-1})], \end{aligned} \quad (4.1)$$

gdzie $-1 \leq \epsilon \leq 1$ jest parametrem opisującym siłę tej zależności, a $\operatorname{sgn}(\cdot)$ to funkcja signum. Dla ujemnego ϵ w modelu występuje ujemne sprzężenie zwrotne.

Celem tak zdefiniowanego procesu było opisanie zjawiska bid-ask bounce przedstawionego w rozdziale 2.3.3, w tym krokowej autokorelacji z rys. 2.12. Model ten następnie został rozszerzony przez Gubca i Kutnera do dowolnych symetrycznych rozkładów skoków oraz pamięci jedno-, dwu- oraz wielo-krokowej pomiędzy kolejnymi skokami [30], [31]. Dzięki temu skutecznie udało się zamodelować i wyjaśnić autokorelację prędkości obserwowaną w danych empirycznych. Jednak próby wytłumaczenia

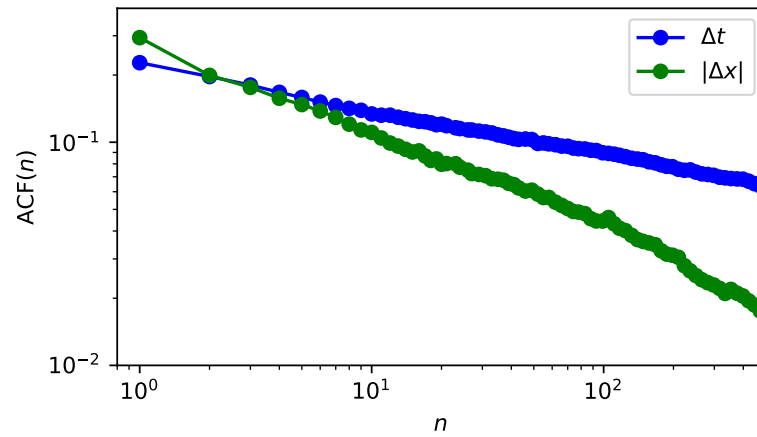
autokorelacji modułów zmian przy użyciu krótkozasięgowych zależności pomiędzy skokami okazały się kompletnie nieskuteczne. W pracy [14] wyprowadziłem między innymi analityczny wzór na postać funkcji autokorelacji dla dwueksponencjalnego rozkładu czasów wyczekiwania. Rozkład ten ma postać $\psi(\Delta t) = \frac{w}{\tau_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) + \frac{1-w}{\tau_2} \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)$, gdzie w, τ_1, τ_2 to parametry. Otrzymana funkcja autokorelacji to:

$$\begin{aligned}
 ACF_{|\Delta x|}(t) &= \delta(t) + A_0 \exp(-v_0 t) + A_1 \exp(-v_1 t) + A_2 \exp(-v_2 t), \\
 w_i &= \tau_i^{-1}, \\
 v &= w w_1 + (1-w) w_2, \\
 v_0 &= w w_2 + (1-w) w_1, \\
 v_i &= \frac{1}{2} \left[w_1 + w_2 - \epsilon v - (-1)^i \sqrt{(w_1 + w_2 - \epsilon v)^2 - 4 w_1 w_2 (1 - \epsilon)} \right], \\
 A_0 &= 2 \frac{M}{v_0} w (1-w) (w_1 - w_2)^2, \\
 A_i &= (-1)^i \frac{2\epsilon (1-M)}{v_1 - v_2} [w_1 w_2 - v v_i], \\
 i &\in \{1, 2\}.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Szczególnie ważna jest różnica w sposobie zaniku tych pamięci - empiryczna autokorelacja zanika w sposób potęgowy, natomiast teoretyczna eksponencjalnie. Praca ta dostarczyła kilku niezwykle istotnych odpowiedzi. Po pierwsze, autokorelacja zmian zależy również od rozkładu czasów wyczekiwania. W szczególności autokorelacja zmian może być niezerowa dla zmian o niezerowej średniej, nawet przy braku jakichkolwiek zależności pomiędzy skokami. Dzieje się tak, kiedy rozkład czasów wyczekiwania nie jest wykładniczy. Jest to też klarowna przesłanka za tym, że również zależności pomiędzy czasami wyczekiwania mogą być istotnym elementem w modelowaniu czasowej autokorelacji modułów zmian. Drugim istotnym wynikiem jest rys. 4.1. Pokazuje on, że początkowo wartość krokowej autokorelacji szeregu modułów zmian jest większa niż analogiczna wartość dla szeregu czasów wyczekiwania $ACF_{|\Delta x|}(n=1) > ACF_{\Delta t}(n=1)$. Pomimo to, dla dużych przesunięć ($n > 10$) ta relacja odwraca się i to korelacje pomiędzy czasami wyczekiwania są silniejsze. **Powyższe dwa punkty są przesłanką, aby zbadać istotność roli czasów międzytransakcyjnych i zależności w ich szeregu w zjawisku klastrowania zmienności.**

4.2 Pamięci dalekozasięgowe w finansowych modelach CTRW

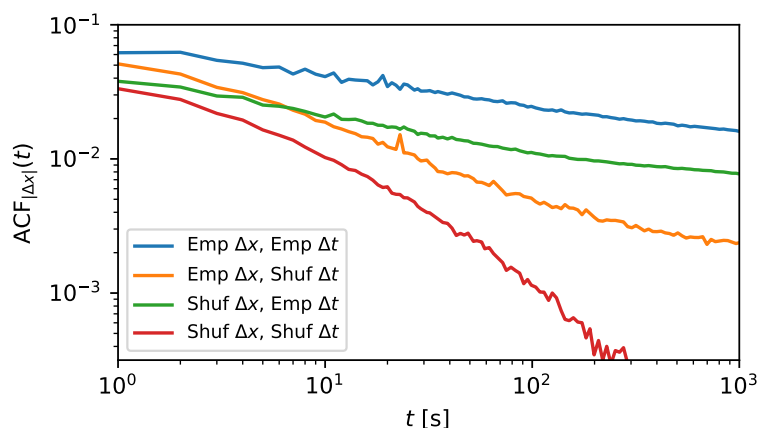
Skutecznym sposobem zobrazowania zjawiska klastrowania zmienności jest wyznaczenie autokorelacji modułów zmian ceny, co przedstawiłem w



Rysunek 4.1: Porównanie empirycznych autokorelacji krokowych szeregu okresów międzytransakcyjnych (niebieski) i modułów logarytmicznych zmian ceny (zielony). Wykresy przedstawione są w skali logarytmicznej, obie autokorelacje zanikają potęgowo. Pomimo, że dla pierwszego punktu ($n = 1$) autokorelacja modułów skoków przyjmuje większą wartość, to potem zanika szybciej i dla dużych przesunięć to pamięci pomiędzy okresami międzytransakcyjnymi są istotniejsze. Jest to przesłanka do uwzględnienia w modelu pamięci silniejszej w długim terminie, czyli pamięci w szeregu czasów wyczekiwania.

rozdziale 2.3.3. Kluczowe pytanie dotyczy tego, która zależność jest ważniejsza w zrozumieniu tego efektu: zależność pomiędzy kolejnymi skokami czy pomiędzy czasami wyczekiwania? W celu uzyskania odpowiedzi na to pytanie przeprowadziłem symulacje w oparciu o dane empiryczne. Wyniki tej symulacji przedstawione są na rys. 4.2 oraz w publikacji [15]. Czasowa korelacja modułów zmian narysowana jest niebieską linią. Zanika w sposób potęgowy z małym wykładnikiem. Z poprzednich prac wiemy, że wpływ na nią mogą mieć rozkład czasów międzytransakcyjnych, korelacje pomiędzy tymi czasami, korelacje pomiędzy modułami zmian oraz między czasami a zmianami. Aby sprawdzić sam wpływ rozkładu czasów, muszę usunąć zależności w procesie. Mogę to zrobić poprzez wyznaczenie z danych empirycznych szeregu czasów wyczekiwania $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots$ oraz szeregu skoków $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$, a następnie całkowicie losowemu przemieszaniu elementów w każdym z szeregów. Wtedy każdy szereg nie będzie posiadał autokorelacji. Z takich przemieszanych szeregów Δt_n i Δx_n buduję ponownie proces cen i liczę czasową autokorelację modułów zmian. Jest ona przedstawiona na wykresie jako czerwona linia. Jest dodatnia, ale szybko zanika i staje się nieistotna. Podobną procedurę mieszania mogę wykonać tylko na jednym szeregu, przykładowo na szeregu okresów międzytransakcyjnych. Wtedy wszystkie zmiany zostają niezmienione, a więc w szczególności korelacje pomiędzy nimi zostają takie same jak w szeregu empirycznym. Wynik tej symulacji przedstawiony jest jako linia pomarańczowa. O ile dla krótkich

czasów amplituda wyników jest zbliżona do danych empirycznych, a sam zanik autokorelacji jest potęgowy, to autokorelacja zanika szybciej niż dla danych empirycznych. Pokazuje to, że nawet perfekcyjne zamodelowanie zależności jedynie w szeregu zmian, nie może tłumaczyć w pełni zjawiska klastrowania zmienności. W ostatniej symulacji sprawdzam wpływ jedynie pamięci pomiędzy czasami wyczekiwania, czyli z przemieszczanym szeregiem skoków. Wynikiem jest zielona linia praktycznie równoległa do linii empirycznej. Pokazuje to, że **uwzględnienie jedynie pamięci pomiędzy okresami międzytransakcyjnymi jest kluczowe w poprawnym zamodelowaniu wykładnika potęgowo zanikającej czasowej autokorelacji modułów zmian**. Poprzez usunięcie wszelkich zależności pomiędzy skokami (czyli też korelacji pomiędzy modułami zmian) oczywiście otrzymamy autokorelację o mniejszej amplitudzie. Jednak w zrozumieniu efektu klastrowania zmienności kluczowe jest zrozumienie przyczyny powolnego zaniku autokorelacji. Powyższa symulacja jest główną motywacją empiryczną tej części niniejszej rozprawy doktorskiej, która dotyczy modeli błędzenia losowego w czasie ciągłym.



Rysunek 4.2: Wykres znormalizowanej autokorelacji czasowej modułów zmian dla czterech szeregów czasowych: dane empiryczne (niebieski), empiryczne zmiany cen oraz przemieszczone czasy międzytransakcyjne (pomarańczowy), przemieszczone zmiany cen oraz empiryczne czasy międzytransakcyjne (zielony), niezależnie przemieszczone zmiany cen oraz czasy międzytransakcyjne (czerwony). Rozważenie jedynie empirycznych zależności w szeregu okresów międzyzdarzeniowych odwzorowuje wykładnik zaniku empirycznej autokorelacji.

Literatura dotycząca modeli z długozasięgową pamięcią pomiędzy czasami wyczekiwania nie jest zaledo rozbudowana i posiada braki, również w części bezpośredniego zastosowania do modelowania danych empirycznych. Jednak wyniki powyższej analizy wprost sugerują, że zbadanie tych zależności może być kluczowe w zrozumieniu przyczyn

występowania klastrowania zmienności. Popularne podejście uwzględnienia jedynie zależności pomiędzy skokami nie jest i nigdy nie będzie wystarczające w tym przypadku. Dlatego jednym z najistotniejszych elementów mojej rozprawy doktorskiej jest autorski model CTRW przedstawiony w następnym rozdziale, uwzględniający dalekozasięgowe zależności pomiędzy czasami wyczekiwania, który ma na celu między innymi odwzorowanie potęgowego wykładnika zaniku autokorelacji modułów zmian w finansowych szeregach czasowych.

Rozdział 5

Model błędzenia losowego w czasie ciągłym z pamięcią w szeregu czasów wyczekiwania

Wnioski z analiz zaprezentowanych we wcześniejszych rozdziałach wskazują na to, że odpowiednim modelem do zbadania efektów klastrowania aktywności i zmienności na rynkach finansowych, będzie model błędzenia losowego w czasie ciągłym, uwzględniający zależności pomiędzy okresami międzytransakcyjnymi w formalizmie przelotów. W niniejszej części rozprawy wprowadzę oraz rozwiążę **kluczowy autorski model CTRW z pamięcią w szeregu czasów wyczekiwania**, opublikowany w [15]. Zaproponowana metoda jest ogólna i pozwala na rozważenie różnych pamięci, jednak skupię się na rozwiązaniu modelu z dalekozasięgowymi (zanikającymi potęgowo) zależnościami. Przeanalizuję charakterystykę modelu poprzez jego pierwsze dwa momenty, wariancję oraz autokorelację zmian, a w szczególności ich zachowanie w granicy długich czasów. Otrzymane wyniki (wykładniki przy potęgowym zaniku krokowej autokorelacji czasów oraz czasowej autokorelacji zmian i modułów zmian) porównam z danymi empirycznymi.

5.1 Proces czasów

Zgodnie z definicją, do skonstruowania trajektorii CTRW potrzebne są szeregi wartości zmian procesu oraz czasów pomiędzy zmianami. Najpierw rozważę oddzielnie szereg czasów wyczekiwania $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n, \dots$, jako że model skupiać się będzie na występujących w nim zależnościach. Podstawową własnością, którą musi spełniać ten szereg, jest **możliwość uwzględniania zależności pomiędzy kolejnymi czasami wyczekiwania**, a w szczególności **pozytywnej krokowej autokorelacji** tych czasów, czyli korelacji pomiędzy np. dwoma kolejnymi czasami wyczekiwania. Zaproponowany proces powinien być również **rozwiązywalny analitycznie**, przynajmniej w granicy długich czasów. Po pierwsze pozwoli to na znacznie głębsze zbadanie jego właściwości, zachowania jego charakterystyk oraz ogólnego zrozumienia zachodzących w nim zjawisk, a po drugie **wyróżni ten model względem obecnie istniejących modeli**. Wykorzystana w pracy inspiracja do stworzenia takiego szeregu zaskakująco prosto wynika wprost

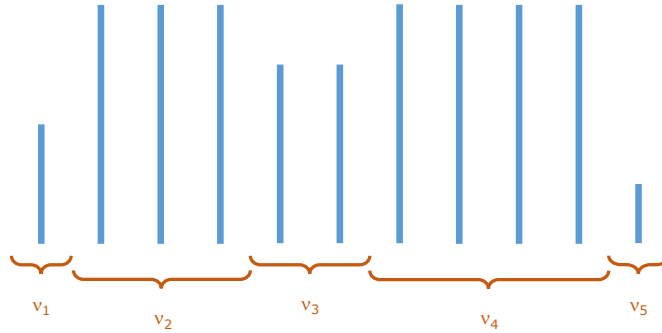
z własności procesów błędzenia losowego w czasie ciągłym, co zostało dokładnie opisane poniżej.

Proponowane rozwiązanie omówionego problemu stanowi szereg z powtarzającymi się wartościami czasów wyczekiwania $\Delta t^1, \Delta t^2, \dots, \Delta t^n, \dots$ (oznaczonymi indeksami górnymi), gdzie każda z tych wartości powtórzona jest odpowiednio $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu^n, \dots$ razy. Każda z wartości Δt^n jest niezależna od poprzedniej i wszystkie pochodzą z tego samego rozkładu $\psi(\Delta t^n)$. Przykładowo (co jest też zobrazowane na rys. 5.1), jeśli pierwsza wartość okresów Δt^1 jest powtórzona raz ($\nu_1 = 1$), druga wartość Δt^2 trzy razy ($\nu_2 = 3$), a trzecia wartość Δt^3 dwa razy ($\nu_3 = 2$), da nam to wypadkowo następujący szereg czasów wyczekiwania we właściwym procesie:

$$\Delta t_1 = \Delta t^1, \Delta t_2 = \Delta t_3 = \Delta t_4 = \Delta t^2, \Delta t_5 = \Delta t_6 = \Delta t^3, \dots \quad (5.1)$$

O procesie czasów można myśleć jako o dyskretnym procesie wygenerowanym przez równomierne próbkowanie wartości z trajektorii błędzenia losowego w czasie ciągłym. W kanonicznym CTRW wartość procesu jest reprezentowana jako zmienna przestrzenna, natomiast czas jest ciągły. Aby dostosować taki proces do roli podrzędnego procesu czasów wyczekiwania, należy przyjąć, że wartość procesu Δt_n reprezentuje czas wyczekiwania, natomiast podrzędny czas n jest dyskretny. W kanonicznym przypadku wartość procesu błędzenia losowego jest stała przez cały czas wyczekiwania. Oznacza to, że w dyskretnym przypadku analogiem kanonicznego czasu wyczekiwania jest liczba powtórzeń ν_n tej samej wartości procesu Δt^n . Dodatkowo, przy zmianie wartości w dostosowanym procesie, nowa wartość Δt^n jest niezależna od poprzedniej Δt^{n-1} . Przykładowa trajektoria tak dostosowanego CTRW jako podrzędnego procesu czasów wyczekiwania jest przedstawiona na rys. 5.1.

Do zbudowania właściwego procesu CTRW potrzebujemy, aby wartości procesu czasów wyczekiwania Δt^n w dyskretnym podrzędnym czasie n , pochodziły z rozkładu $\psi(\Delta t^n)$ ($\Delta t^n > 0$) ze skończoną średnią $\langle \Delta t \rangle$. Rozkład wartości procesu czasów, a przez to też w szczególności jego średnia, jest taki sam jak rozkład czasów wyczekiwania właściwego procesu $\psi(\cdot)$, który może być dowolnym rozkładem czasów ze skończoną średnią. Następnie każdy czas wyczekiwania Δt^n jest powtórzony ν_n razy. Te liczby powtórzeń, osobno losowane dla każdego z czasów wyczekiwania, pochodzą z rozkładu $\omega(\nu_n)$ oraz są niezależne od siebie. Rozkład $\omega(\nu_n)$ wynika wprost z zadanych własności procesu czasów, ale w ogólności może to być dowolny rozkład. To pokazuje **wszechstronność zaproponowanej metody**, gdyż w zależności od użytego rozkładu $\omega(\nu_n)$ w modelu możemy uzyskać **brak pamięci** (przykładowo dla $\omega(\nu_n)$ równej delcie Kroneckera dla wartości 1), pamięć **krótkozasięgową** (przykładowo gdy $\omega(\nu_n)$ jest rozkładem geometrycznym) bądź **dalekozasięgową** w szeregu czasów wyczekiwania.



Rysunek 5.1: Przykładowa trajektoria procesu czasów wyczekiwania, którego wartości odpowiadają czasom wyczekiwania Δt_n użytym do skonstruowania właściwego procesu CTRW. Wartości podrzędnego procesu to $\Delta t^1, \Delta t^2, \dots, \Delta t^n, \dots$, gdzie każda wartość jest powtórzona odpowiednio $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$ razy. Liczba powtórzeń v_n pochodzi z rozkładu liczby powtórzeń $\omega(v_n)$. W powyższym przykładzie daje nam to $v_1 = 1, v_2 = 3, v_3 = 2, \dots$ oraz $\Delta t_1 = \Delta t^1, \Delta t_2 = \Delta t_3 = \Delta t_4 = \Delta t^2, \Delta t_5 = \Delta t_6 = \Delta t^3, \dots$

5.1.1 Pamięć dalekozasięgowa

Aby odtworzyć potęgową krokową autokorelację czasów wyczekiwania, będę rozpatrywać gruboogonową postać rozkładu liczby powtórzeń. Użyję jednego z najprostszych dyskretnych rozkładów potęgowych, mianowicie rozkładu zeta z parametrem ρ :

$$\omega_\rho(v) = v^{-\rho} / \zeta(\rho); \quad \zeta(\rho) = \sum_{i=1}^{\infty} i^{-\rho}, \quad \rho > 1, \quad (5.2)$$

gdzie $\zeta(\rho)$ to funkcja zeta Riemanna. Wartość oczekiwana takiego rozkładu jest równa $\langle v \rangle = \frac{\zeta(\rho-1)}{\zeta(\rho)}$ dla $\rho > 2$, natomiast wariancja jest ograniczona dla $\rho > 3$. Ponieważ skupię się jedynie na rozkładach ze skończonym pierwszym momentem $\langle v \rangle$, to w dalszym ciągu rozważać będę jedynie przypadki $\rho > 2$. Dystrybucja rozkładu wyrażona jest wzorem $\frac{H_{v,\rho}}{\zeta(\rho)}$, gdzie $H_{v,\rho} = \sum_{i=1}^v i^{-\rho}$ jest uogólnioną liczbą harmoniczną. Dodatkowo wprowadzę prawdopodobieństwo przetrwania:

$$\Omega(v) = \sum_{i=v}^{\infty} \omega(i), \quad (5.3)$$

które w przypadku rozkładu zeta przyjmuje wartość $\Omega(v) = 1 - \frac{H_{v-1,\rho}}{\zeta(\rho)}$.

Propagator procesu czasów wyczekiwania $\mathcal{P}(\Delta t; n | \Delta t_0; 0)$, zdefiniowany wcześniej przez równanie (3.8), jest warunkowym prawdopodobieństwem tego, że czas wyczekiwania, który na początku (dla $n = 0$) miał wartość Δt_0 ,

jest równy Δt po n krokach. Możemy go zapisać jako:

$$\mathcal{P}(\Delta t; n | \Delta t_0; 0) = \delta(\Delta t - \Delta t_0) \Omega^{\text{first}}(n) + [1 - \Omega^{\text{first}}(n)] \psi(\Delta t), \quad (5.4)$$

gdzie $\Omega^{\text{first}}(n)$ stanowi prawdopodobieństwo przetrwania otrzymane z $\omega^{\text{first}}(n)$, będącego zestacjonaryzowanym rozkładem liczby powtórzeń pierwszego czasu wyczekiwania:

$$\begin{aligned} \omega^{\text{first}}(n) &= \frac{\sum_{n'=1} \omega(n+n')}{\sum_{n''=0} \sum_{n'=1} \omega(n''+n')} = \frac{\sum_{n'=1} \omega(n+n')}{\sum_{n=1} n\omega(n)} = \frac{\sum_{n'=n+1} \omega(n')}{\langle \omega \rangle}, \\ \Omega^{\text{first}}(n) &= \frac{\sum_{i=n} \sum_{n'=i+1} \omega(n')}{\langle \omega \rangle} = \frac{\sum_{i=1} i\omega(i+n)}{\langle \omega \rangle} \\ &= \frac{\langle \omega \rangle - n\Omega(n+1) - \sum_{i=1}^n i\omega(i)}{\langle \omega \rangle}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Pierwszy człon prawej strony wzoru (5.4) dotyczy sytuacji, w której nie zachodzi zmiana wartości procesu (z wartości Δt_0) w przeciągu n skoków. W przeciwnym wypadku, który występuje z prawdopodobieństwem $1 - \Omega^{\text{first}}(n)$, wartość procesu się zmieni. Będzie ona pochodziła z rozkładu $\psi(\Delta t)$ oraz będzie całkowicie niezależna od poprzedniej wartości.

W szczególnym przypadku, kiedy $\omega(n)$ jest w postaci rozkładu zeta, otrzymamy:

$$\Omega^{\text{first}}(n) = 1 - \frac{n}{\langle \omega \rangle} + \frac{nH_{n,\rho}}{\zeta(\rho-1)} - \frac{H_{n,\rho-1}}{\zeta(\rho-1)}, \quad (5.6)$$

co po wstawieniu do wzoru (5.4) pozwoli nam na otrzymanie wprost propagatora procesu czasów.

5.1.2 Krokowa autokorelacja czasów wyczekiwania

Krokowa autokowariancja czasów wyczekiwania Δt_n , zgodnie z definicją z akapitu pod wzorem (2.3), zadana jest jako:

$$\text{COV}_{\Delta t}(n) = \langle \Delta t_i \Delta t_{i+n} \rangle - \langle \Delta t_i \rangle \langle \Delta t_{i+n} \rangle = \langle \Delta t_i \Delta t_{i+n} \rangle - \langle \Delta t \rangle^2, \quad (5.7)$$

gdzie symbol $\langle \cdot \rangle$ oznacza uśrednianie. Dla spełnionego założenia z ostatniego akapitu ze wstępu rozdziału 4 o istnieniu wszystkich momentów rozkładu $\psi(\Delta t)$, autokorelacja krokowa będzie zawsze skończona. Łatwo można zauważyć, że czas wyczekiwania Δt_{i+n} będzie równy wcześniejszemu Δt_i z prawdopodobieństwem $p = \Omega^{\text{first}}(n)$, gdyż będą pochodzić z tej samej serii powtórzonych czasów. Natomiast z prawdopodobieństwem przeciwnym $1 - p$ czas wyczekiwania Δt_i będzie pochodził z innej serii powtórzeń i będzie całkowicie niezależny. Te obserwacje pozwalają zapisać równanie:

$$\text{COV}_{\Delta t}(n) = p \langle \Delta t^2 \rangle + (1 - p) \langle \Delta t \rangle^2 - \langle \Delta t \rangle^2 = \sigma_{\Delta t}^2 p = \sigma_{\Delta t}^2 \Omega^{\text{first}}(n). \quad (5.8)$$

Szczególnie istotna będzie postać asymptotyczna tej autokorelacji dla $n \gg 1$. Używając przybliżenia (Twierdzenie 12.21 z [108]):

$$\zeta(\rho) - H_{n,\rho} \approx \frac{n^{1-\rho}}{\rho - 1}, \quad (5.9)$$

możemy otrzymać znormalizowaną funkcję krokowej autokorelacji czasów wyczekiwania:

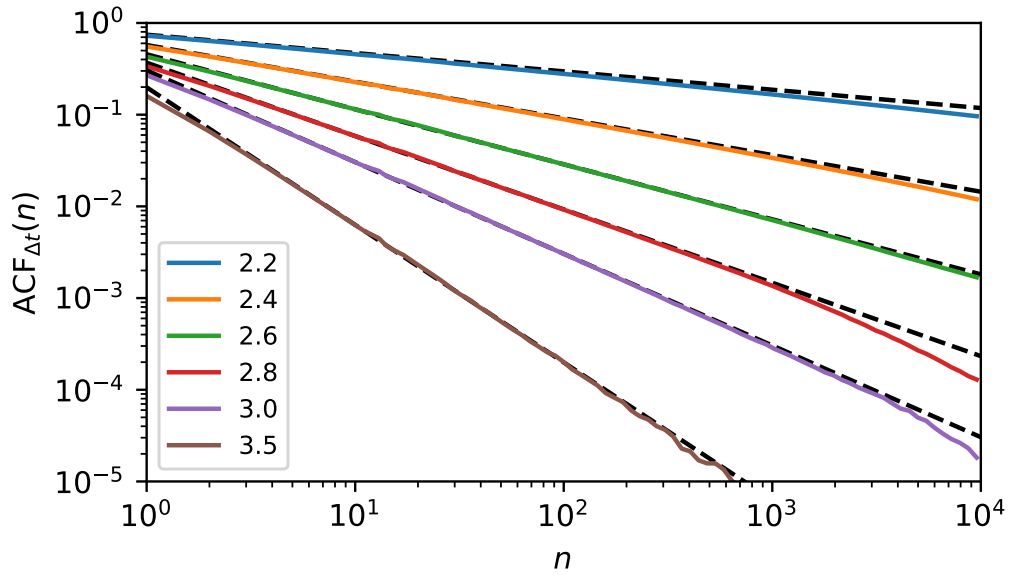
$$\text{ACF}_{\Delta t}(n) = \frac{\text{COV}_{\Delta t}(n)}{\text{COV}_{\Delta t}(0)} \approx \frac{n^{-(\rho-2)}}{\zeta(\rho-1)(\rho-2)(\rho-1)}. \quad (5.10)$$

Krokowa autokorelacja czasów wyczekiwania zanika potęgowo z wykładnikiem $\rho - 2$. Potęgowy zanik odpowiada dokładnie pamięciom obserwowanym w danych empirycznych (przedstawionym między innymi na rys. 2.10), dzięki czemu model spełnia postawione wobec niego wymagania. W tym miejscu należy przypomnieć, że rozważam jedynie przypadki, dla których $\rho > 2$, co jest warunkiem istnienia skończonej średniej liczby powtórzeń. Mimo to łatwo zauważyć, że **w przedstawionym modelu można uzyskać dowolny wykładnik potęgowego zaniku autokorelacji krokowej czasów wyczekiwania**. Dzięki tej własności zaproponowane podejście jest uniwersalne i może znaleźć zastosowanie przy modelowaniu szerokiego spektrum danych empirycznych.

5.1.3 Krokowa autokorelacja czasów pomiędzy zdarzeniami ekstremalnymi

W kontekście danych empirycznych, szczególnie często analizie poddawane są czasy pomiędzy wydarzeniami ekstremalnymi, takimi jak np. odpowiednio duże spadki ceny rozważanego instrumentu finansowego [109], [110]. W przypadku procesu CTRW możemy je zdefiniować jako zdarzenia, które występują średnio co $\langle N \rangle$ wydarzeń w szeregu zmian procesu Δx_i . Pracując na danych historycznych, jest to równoważne z definicją zdarzenia ekstremalnego jako kwantylowi zmian rzędu $\frac{1}{\langle N \rangle}$. Również w tym przypadku możemy wyprowadzić wzór na autokorelację krokową szeregu czasów między zdarzeniami ekstremalnymi.

Czasy pomiędzy zdarzeniami ekstremalnymi będę oznaczał jako ΔT_i . Każdy taki czas będzie się składał z odpowiednio K_i zwykłych czasów wyczekiwania $\Delta T_i = \sum_{l=1}^{K_i} \Delta t_l$. Przyjmując, że elementy szeregu zmian Δx_i są niezależne i losowane z tego samego rozkładu (szczegółowy opis tego założenia znajduje się w kolejnym podrozdziale 5.2), to z powyższej definicji zdarzenia ekstremalnego wynika, że wielkości K_i będą pochodziły z ujemnego rozkładu dwumianowego $\text{NB}(k; 1)$ (nazywanego też rozkładem Pascala). W ogólności ten rozkład zadany jest dla k prób dających n



Rysunek 5.2: Wykresy krokowej autokorelacji czasów wyczekiwania dla zaproponowanej metody generowania szeregu czasów wyczekiwania. Kolorowe linie ciągłe odpowiadają wynikom symulacji komputerowych dla różnych parametrów ρ . Przerywane czarne linie to odpowiadające im przybliżenia zadane wzorem (5.10). Widać, że nawet już po kilku krokach podane przybliżenie jest praktycznie równe wynikom symulacyjnym.

sukcesów z prawdopodobieństwem sukcesu zadany jako $\frac{1}{\langle N \rangle}$:

$$Pr(K = k) = \text{NB}(k, n) = \binom{k-1}{n-1} \left(\frac{1}{\langle N \rangle} \right)^n \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{k-n}, \quad k \geq n \geq 1. \quad (5.11)$$

Ponieważ każdy czas ΔT_i zadany jest jako suma podstawowych czasów wyczekiwania, to autokowariancja tych czasów będzie zadana jako odpowiednia suma autokowariancji podstawowych czasów wyczekiwania. **Dokładne obliczenia, w których wyznaczam kolejne wartości autokowariancji czasów pomiędzy zdarzeniami ekstremalnymi znajdują się w dodatku D.**

Rozpatrując przypadek $n = 0$, czyli wariancję szeregu czasów pomiędzy ekstremalnymi zdarzeniami, dla ustalonego $K = K_1$ mogę zapisać:

$$\text{COV}_{\Delta T}(0) \Big|_{K=K_1} = \sum_{i=1}^{K_1} \sum_{j=1}^{K_1} \text{COV}_{\Delta t}(|i-j|), \quad (5.12)$$

gdzie $\text{COV}_{\Delta t}(\cdot)$ jest autokowariancją czasów wyczekiwania, zdefiniowaną wzorem (5.7). Następnie, uwzględniając losowość K pochodzącego z rozkładu ujemnego dwumianowego binarnego, otrzymam:

$$\text{COV}_{\Delta T}(0) = \langle N \rangle \sum_{j=0}^{\infty} \text{COV}_{\Delta t}(j) \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle}\right)^j. \quad (5.13)$$

W podobny sposób mogę zapisać wzór analogiczny do (5.12) dla autokowariancji sąsiednich czasów pomiędzy wydarzeniami ekstremalnymi (sytuacji odpowiadającej $n = 1$) dla ustalonych wartości K_1 oraz K_2 :

$$\text{COV}_{\Delta T}(1) \Big|_{K_1, K_2} = \sum_{i=1}^{K_1} \sum_{j=1}^{K_2} \text{COV}_{\Delta t}(j + i - 1). \quad (5.14)$$

Wtedy generalizacja uwzględniająca losowość wartości K_1 oraz K_2 wygląda następująco:

$$\text{COV}_{\Delta T}(1) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle}\right)^{j-1} j \text{COV}_{\Delta t}(j). \quad (5.15)$$

W ogólnym przypadku, dla $n \geq 2$, pomiędzy czasami ΔT_i oraz ΔT_{i+n} będzie występowało $n - 1$ czasów pomiędzy zdarzeniami ekstremalnymi. Oznacza to, że wzór na autokowariancję należy zmodyfikować do postaci:

$$\text{COV}_{\Delta T}(n) \Big|_{K_1, K_2, W_{n-1}} = \sum_{i=1}^{K_1} \sum_{j=1}^{K_2} \text{COV}_{\Delta t}(j + i - 1 + W_{n-1}), \quad n \geq 2, \quad (5.16)$$

gdzie W_{n-1} pochodzi z rozkładu $\text{NB}(k, n - 1)$ i oznacza liczbę podstawowych czasów wyczekiwania Δt_i pomiędzy rozważanymi czasami ΔT_i oraz ΔT_{i+n} . Zatem ogólny wzór będzie wyglądał następująco:

$$\text{COV}_{\Delta T}(n) = \left(\frac{1}{\langle N \rangle}\right)^{n-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle}\right)^j \text{COV}_{\Delta t}(j + n) \binom{j + n}{n}. \quad (5.17)$$

Na podstawie wyników ze wzorów (5.13) i (5.15), powyższy wzór (5.17) jest poprawny również dla $n = 1$ oraz $n = 0$.

Kolejnym krokiem będzie policzenie Z transformaty, zdefiniowanej poniżej:

$$\begin{aligned}
 \widehat{\text{COV}}_{\Delta T}(z) &= \mathcal{Z} \{ \text{COV}_{\Delta T}(n) \} := \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \text{COV}_{\Delta T}(n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} z^{-n} \left(\frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle} \right)^j \text{COV}_{\Delta t}(j+n) \binom{j+n}{n} \\
 &= \langle N \rangle \widehat{\text{COV}}_{\Delta t} \left(\frac{1}{\frac{\langle N \rangle - 1}{\langle N \rangle} + \frac{1/\langle N \rangle}{z}} \right).
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

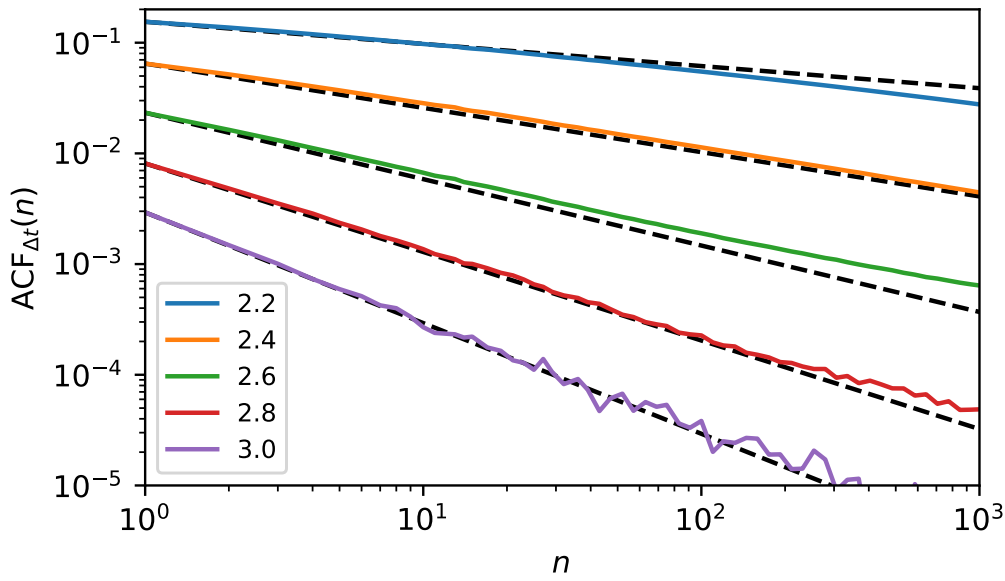
Dzięki tej operacji otrzymamy autokowariancję czasów pomiędzy ekstremalnymi zmianami, daną wprost jako autokowariancję czasów wyczekiwania w domenie po Z transformacji. Teraz mogę wstawić konkretną postać autokowariancji $\text{COV}_{\Delta t}(n)$ z równania (5.8):

$$\begin{aligned}
 \text{COV}_{\Delta t}(n) &= \frac{1}{\zeta(\rho-1)} [\zeta(\rho-1) - H_{n,\rho-1} - n[\zeta(\rho) - H_{n,\rho}]] \\
 &\approx \frac{n^{-(\rho-2)}}{\zeta(\rho-1)(\rho-2)(\rho-1)}, \\
 \mathcal{Z} \{ \zeta(\rho-1) \} &= \frac{z}{z-1} \zeta(\rho-1), \\
 \mathcal{Z} \{ H_{n,\rho-1} \} &= \frac{z}{z-1} Li_{\rho-1,z^{-1}}, \\
 \mathcal{Z} \{ n\zeta(\rho) \} &= \frac{z}{(z-1)^2} \zeta(\rho), \\
 \mathcal{Z} \{ nH_{n,\rho} \} &= \frac{z}{(z-1)^2} Li_{\rho,z^{-1}} + \frac{z}{z-1} Li_{\rho-1,z^{-1}},
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

co po połączeniu daje:

$$\widehat{\text{COV}}_{\Delta T}(z) = \frac{1}{\zeta(\rho-1)} \frac{z}{(z-1)^2} [(z-1)\zeta(\rho-1) - \zeta(\rho) + Li_{\rho,z^{-1}}], \tag{5.20}$$

gdzie $Li_{\rho,z^{-1}} = \sum_{j=1}^{\infty} z^{-j} j^{-\rho}$ jest funkcją specjalną nazywaną polilogarytmem. Podstawiając do powyższego wzoru $z = \exp(s)$ można wykazać, że najważniejszym potęgowym wyrazem jest człon z $s^{\rho-3}$, który po powrocie do przestrzeni kroków n odpowiada potęgowemu zanikowi $\text{COV}_{\Delta T}(n) \sim n^{-(\rho-2)}$, analogicznemu jak we wzorze (5.10). Zatem w zaproponowanym modelu autokorelacja krokowa czasów pomiędzy zdarzeniami ekstremalnymi zanika z tym samym wykładnikiem, co autokorelacja czasów wyczekiwania.



Rysunek 5.3: Wykresy krokowej autokorelacji czasów pomiędzy wydarzeniami ekstremalnymi dla zaproponowanej metody generowania szeregu czasów wyczekiwania. Kolorowe linie ciągłe odpowiadają wynikom symulacji komputerowych dla różnych parametrów ρ . Przerywane czarne linie to odpowiadające im funkcje potęgowe o wykładniku równym $-(\rho - 2)$. Widać, że nawet już po kilku krokach podane przybliżenie jest praktycznie równe wynikom symulacyjnym.

5.2 Właściwy proces

Zaproponowana metodologia tworzenia szeregu czasów spełniła oczekiwania i w szczególności generuje potęgowo zanikającą krokową autokorelację czasów wyczekiwania. Teraz mogę wprowadzić właściwy proces błędzenia losowego w czasie ciągłym wykorzystujący czasy wyczekiwania z zaproponowanego szeregu. **Autorski model CTRW z powtarzającymi się czasami wyczekiwania jest w pełni zdefiniowany przez podanie dwóch składników:**

- **zmian wartości procesu** Δx_n , które definiuję jako **niezależne** zmienne losowe pochodzące z tego samego **rozkładu** $h(\Delta x_n)$. Dodatkowo zakładam, że rozkład ten posiada skończoną wariancję $\sigma_{\Delta x}^2$ i w związku z tym skończony pierwszy $\langle \Delta x \rangle$ i drugi moment $\langle \Delta x^2 \rangle$;
- **czasów wyczekiwania** Δt_n , które pochodzą z **procesu czasów opisanego w poprzedniej sekcji**. W szczególności ich rozkład posiada skończone wszystkie momenty.

Warto tutaj podkreślić, że nie rozważamy żadnych pamięci w szeregu zmian procesu. Co więcej, ich rozkład może być dowolny, o ile posiada skończoną wariancję. Zostawiam też dowolność rozkładu czasów wyczekiwania,

z jednym zastrzeżeniem dotyczącym istnienia jego momentów. **Dzięki takiemu zdefiniowaniu modelu możliwe będzie dokładne zbadanie konsekwencji występowania dalekozasięgowych zależności pomiędzy czasami wyczekiwania.** Prezentowane w dalszej części pracy różnice pomiędzy własnościami analizowanego procesu a kanonicznymi własnościami CTRW, będą skutkiem wyłącznie wprowadzenia do modelu pamięci do szeregu czasów międzyzdarzeniowych. Podstawową wielkością opisującą proces stochastyczny jest propagator $P(x, t)$, zdefiniowany przez równanie (3.9). Znając propagator procesu, możemy łatwo wyznaczyć wartości jego momentów, a na ich podstawie autokorelację prędkości procesu, czyli autokorelację przyrostów. Zatem pierwszym krokiem do poznania właściwości modelu CTRW z powtarzającymi się czasami wyczekiwania jest wyznaczenie jego propagatora.

5.2.1 Propagator procesu

Poniższa analiza ma na celu wyznaczenie propagatora omawianego procesu. **Jest ona pierwszym z dwóch kluczowych elementów analitycznych części mojej rozprawy doktorskiej dotyczącej autorskiego modelu CTRW z pamięcią w szeregu czasów wyczekiwania.** Do wyznaczenia propagatora procesu $P(x, t)$ wykorzystam formalizm przelotów, gdzie w chwili t istotna jest liczba skoków n do tej chwili oraz wartość procesu po ostatnim skoku, opisana wzorem (3.9). Standardowo propagatora poszukuje się w przestrzeni Fouriera-Laplace'a (patrz wzór (3.11)), także docelowo będę szukał wartości:

$$\begin{aligned}\tilde{P}(k, s) &= \mathcal{F}\{\mathcal{L}\{P(x, t)\}\} = \mathcal{F}\left\{\mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, t)\right\}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}\{\mathcal{L}\{P_n(x, t)\}\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n(k, s).\end{aligned}\tag{5.21}$$

Na początku rozważę przypadek $n = 0$. Do dalszych obliczeń przyda się prawdopodobieństwo przetrwania $\Psi(\cdot)$ rozkładu czasów wyczekiwania $\psi(\cdot)$ zdefiniowane jako:

$$\Psi(t) = \int_t^{\infty} \psi(\tau) d\tau,\tag{5.22}$$

czyli prawdopodobieństwo, że wylosowany czas wyczekiwania będzie większy niż t . Jest ono równoważne z prawdopodobieństwem przetrwania w stanie po ostatnim skoku przez okres co najmniej t . Prawdopodobieństwo $\tilde{P}_0(k, s)$ może być wyznaczone jako transformata Fouriera-Laplace'a $P_0(x, t)$, natomiast samo $P_0(x, t)$ obliczę wprost z definicji jako iloczyn prawdopodobieństw tego, że nie został wykonany jeszcze żaden skok oraz początkowego punktowego rozkładu położenia, czyli:

$$\begin{aligned}P_0(x, t) &= P_0(t)\delta(x) = \Psi(t)\delta(x), \\ \tilde{P}_0(k, s) &= \tilde{P}_0(s)\mathcal{F}\{\delta(x)\} = \tilde{\Psi}(s) \cdot 1 = \tilde{\Psi}(s) = \frac{1 - \tilde{\psi}(s)}{s}.\end{aligned}\tag{5.23}$$

Następnie przechodząc do $n \geq 1$ należy pamiętać, że zgodnie z definicją procesu przyrosty są całkowicie niezależne. Oznacza to, że rozważane n -krokowe prawdopodobieństwo $P_n(x, t)$ może rozłożyć jako iloczyn dwóch niezależnych prawdopodobieństw: prawdopodobieństwa wykonania n skoków do czasu t oraz rozkładu prawdopodobieństwa położenia x po n skokach. W przestrzeni Fouriera-Laplace'a mogą zapisać to jako:

$$\tilde{P}_n(k, s) = \tilde{P}_n(s) \tilde{h}(k)^n, \quad n \geq 1. \quad (5.24)$$

Zatem do poznania propagatora zaproponowanego procesu niezbędne będzie jeszcze wyznaczenie $\tilde{P}_n(s)$. Dla przypadku, kiedy wystąpi co najmniej jedno wydarzenie ($n \geq 1$), liczba wydarzeń w procesie może być dokładnie opisana poprzez:

- dotychczasową liczbę serii powtórzeń k ,
- szereg czasów wyczekiwania w każdej serii powtórzeń $\Delta t^1, \dots, \Delta t^k$,
- liczbę powtórzeń $\nu_1, \dots, \nu_k$ w każdej z serii.

Dokładniejszy opis tych wielkości znajduje się w rozdziale dotyczącym procesu czasów, w szczególności powyższe elementy opisane są na rys. 5.1. Zdefiniowanie procesu przez podanie takich liczb narzuca kilka ograniczeń.

1. Każda liczba powtórzeń ν_i musi wynosić co najmniej 1, skąd wynika, że całkowita liczba serii k nie może być większa niż liczba wszystkich wydarzeń n : $0 < k \leq n$.
2. Suma wszystkich wydarzeń we wszystkich seriach musi być równa całkowitej liczbie wszystkich skoków n : $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k = n$.
3. Wszystkie rozważane skoki muszą wystąpić przed momentem t , zatem całkowity czas potrzebny do zrealizowania wszystkich skoków musi być mniejszy niż t : $\nu_1 \Delta t^1 + \nu_2 \Delta t^2 + \dots + \nu_k \Delta t^k \leq t$. Różnicę czasu pomiędzy ostatnim skokiem, a chwilą t oznaczmy jako:

$$\delta t = t - \sum_{i=1}^k \nu_i \Delta t^i \geq 0. \quad (5.25)$$

Wzór na $P_n(t)$ może być wyznaczony wprost z definicji procesu. W chwili t proces jest podczas k -tej serii powtórzeń, gdzie wystąpiło ν_k powtórzeń czasu wyczekiwania Δt^k . W ogólności proces może być w jednej z dwóch sytuacji. Albo właśnie rozpoczęła się kolejna $k + 1$ -sza seria albo proces może być dalej w trakcie k -tej serii powtórzeń. Oznacza to, że prawdopodobieństwo $P_n(t)$ możemy zapisać jako sumę dwóch czynników.

1. Właśnie zakończyła się k -ta seria powtórzeń z czasami wyczekiwania równymi Δt^k . Następny czas wyczekiwania będzie już pochodził z kolejnej, $k + 1$ -szej serii. Prawdopodobieństwo pojedynczego zdarzenia w tym przypadku jest zadane jako iloczyn:

- (a) prawdopodobieństw $\psi(\Delta t^i)$, że w i -tej serii czas wyczekiwania wynosił Δt^i , dla każdej z serii $1, \dots, k$;
- (b) prawdopodobieństw $\omega(v_i)$, że w i -tej serii liczba powtórzeń wynosiła v_i , dla każdej z serii $1, \dots, k$;
- (c) prawdopodobieństwa $\Psi(\delta t)$, że kolejny czas wyczekiwania Δt^{k+1} jest większy niż obecny czas oczekiwania na wydarzenie δt ;
- (d) prawdopodobieństwa $\Omega(0) = 1$, że liczba powtórzeń v_{k+1} w kolejnej serii wynosi co najmniej 1. Z definicji podanej wzorem (5.3), to prawdopodobieństwo jest równe 1.

Aby wyznaczyć całosciowe prawdopodobieństwo tego przypadku, należy rozważyć zagregowane prawdopodobieństwo wszystkich możliwych zdarzeń pojedynczych. Oznacza to, rozpatrzenie wszystkich dopuszczalnych zestawów $k, v_i, \Delta t^i$. Aby tego dokonać, należy zsumować prawdopodobieństwa pojedynczych zdarzeń po k i v_i oraz scałkować po Δt^i dla wszystkich dopuszczalnych wartości, czyli takich spełniających ograniczenia podane na początku rozdziału.

2. Proces jest dalej w trakcie k -tej serii powtórzeń, czyli kolejny czas wyczekiwania będzie kolejnym - $v_k + 1$ -szym powtórzeniem czasu wyczekiwania równego Δt^k . Prawdopodobieństwo pojedynczego zdarzenia w tym przypadku może być zapisane jako iloczyn:

- (a) prawdopodobieństw $\psi(\Delta t^i)$, że w i -tej serii czas wyczekiwania wynosił Δt^i , dla każdej z serii $1, \dots, k$;
- (b) prawdopodobieństw $\omega(v_i)$, że w i -tej serii liczba powtórzeń wynosiła v_i , dla każdej z serii $1, \dots, k - 1$;
- (c) prawdopodobieństwa $\Omega(v_k)$, że wystąpi jeszcze co najmniej jedno powtórzenie w obecnej k -tej serii. Oznacza to, że liczba powtórzeń w tej serii jest większa niż zaobserwowane dotychczas v_k .

W tym przypadku, analogicznie jak w poprzednim, należy zsumować i scałkować wszystkie pojedyncze prawdopodobieństwa, aby otrzymać prawdopodobieństwo całosciowe tego przypadku. Jednak tutaj dochodzi jeszcze jedno ograniczenie. Czas oczekiwania na kolejne zdarzenie δt , musi być mniejszy niż czas wyczekiwania Δt^k aktualnej k -tej serii. W przeciwnym przypadku skok powinien się już wydarzyć przed rozważanym czasem t .

Łącząc w całość wzory wynikające w powyższych rozważaniach, dla $n \geq 1$ moge zapisać ogólny wzór na prawdopodobieństwo liczby zdarzeń w rozważanym modelu jako sumę dwóch składowych $A_n(t)$ oraz $B_n(t)$:

$$\begin{aligned}
 P_n(t) &= \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{v_1, \dots, v_k \\ v_1 + \dots + v_k = n}} \int_{\substack{\Delta t^1, \dots, \Delta t^k \\ 0 < \delta t}} \psi(\Delta t^1) \dots \psi(\Delta t^k) \Psi(\delta t) \omega(v_1) \dots \omega(v_k) d\Delta t^1 \dots d\Delta t^k \\
 &+ \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{v_1, \dots, v_k \\ v_1 + \dots + v_k = n}} \int_{\substack{\Delta t^1, \dots, \Delta t^k \\ 0 < \delta t < \Delta t^k}} \psi(\Delta t^1) \dots \psi(\Delta t^k) \omega(v_1) \dots \omega(v_{k-1}) \Omega(v_k) d\Delta t^1 \dots d\Delta t^k \\
 &= A_n(t) + B_n(t).
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Powyższe równanie zadające prawdopodobieństwo $P_n(t)$ jest kluczowym równaniem tego rozdziału. Rozwiązanie go przy zastosowaniu wzorów (5.24) oraz (5.21) pozwoli na otrzymanie propagatora procesu. Analityczna postać propagatora (dająca możliwość dalszej matematycznej analizy właściwości procesu) jest niezwykle ważnym naukowym wkładem w zrozumienie istotności oraz roli skorelowanych czasów międzyzdarzeniowych w kształtowaniu charakterystyk procesów, takich jak między innymi średnia, wariancja czy autokorelacja zmian. W równaniu skrótowe oznaczenie $\int_{\substack{\Delta t^1, \dots, \Delta t^k \\ 0 < \delta t}}$ oznacza całkowanie po takich wartościach Δt^i , których δt zadana

wzorem (5.25) jest dodatnia, czyli suma $\sum_{i=1}^k v_i \Delta t^i$ jest mniejsza niż t . Jest to całkowanie po wnętrzu k -wymiarowego sympleksu posiadającego wierzchołki w punktach $(0, 0, 0, \dots, 0, 0)$, $(t/v_1, 0, 0, \dots, 0, 0)$, $(0, t/v_2, 0, \dots, 0, 0)$, $(0, 0, t/v_3, \dots, 0, 0)$, $\dots$, $(0, 0, 0, \dots, t/v_{k-1}, 0)$ i $(0, 0, 0, \dots, 0, t/v_k)$. Zapisując to wprost:

$$\begin{aligned}
 &\int_{\substack{\Delta t^1, \dots, \Delta t^k \\ 0 < \delta t}} d\Delta t^1 \dots d\Delta t^k \\
 &\equiv \int_0^{\frac{t-v_1\Delta t^1-\dots-v_{k-1}\Delta t^{k-1}}{v_k}} \dots \int_0^{\frac{t-v_1\Delta t^1-v_2\Delta t^2}{v_3}} \int_0^{\frac{t-v_1\Delta t^1}{v_2}} \int_0^{\frac{t}{v_1}} d\Delta t^1 d\Delta t^2 d\Delta t^3 \dots d\Delta t^k \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+^{k+1}} \delta(\delta t - [t - v_1\Delta t^1 - v_2\Delta t^2 - \dots - v_k\Delta t^k]) d\Delta t^1 d\Delta t^2 d\Delta t^3 \dots d\Delta t^k d\delta t,
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

gdzie $\delta(x)$ to delta Diraca. Podobne oznaczenie $\int_{\substack{\Delta t^1, \dots, \Delta t^k \\ 0 < \delta t < \Delta t_k}}$ dokłada dodatkowy

warunek, aby obecny czas oczekiwania na kolejne wydarzenie δt był mniejszy niż poprzedni czas wyczekiwania Δt_k . Możemy to zapisać używając

funkcji skokowej Heaviside'a $\Theta(\Delta t^k - \delta t)$:

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{\Delta t^1, \dots, \Delta t^k \\ 0 < \delta t < \Delta t^k}} d\Delta t^1 \dots d\Delta t^k \\ & \equiv \int_{\mathbb{R}_+^{k+1}} \delta(\delta t - [t - v_1 \Delta t^1 - \dots - v_k \Delta t^k]) \Theta(\Delta t^k - \delta t) d\Delta t^1 \dots d\Delta t^k d\delta t. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Natomiast oznaczenie sumowania po liczbach powtórzeń v_i można rozpisać wprost jako:

$$\sum_{\substack{v_1, \dots, v_k \\ v_1 + \dots + v_k = n}} 1 = \underbrace{\sum_{v_k=1}^{\infty} \sum_{v_{k-1}=1}^{\infty} \dots \sum_{v_2=1}^{\infty} \sum_{v_1=1}^{\infty}}_k \delta_{v_1 + \dots + v_k, n}, \quad (5.29)$$

gdzie $\delta_{a,b}$ to delta Kroneckera.

Następne rozważane przeze mnie przekształcenia są operacjami linio-
wymi, dlatego wykonywać je będę osobno na każdej z części propagatora
 $A_n(t)$ oraz $B_n(t)$. Operacje wykonywane na obydwu członach oraz ich
kolejność są takie same, dlatego bardziej złożone obliczenia dotyczące
drugiej części przenieśliśmy do dodatku E, aby zwiększyć czytelność tekstu.
W pierwszym kroku policzę transformatę Laplace'a ($t \rightarrow s$), dla której
zachodzi $\tilde{P}_n(s) = \tilde{A}_n(s) + \tilde{B}_n(s)$.

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n(s) &= \mathcal{L}\{A_n(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} A_n(t) dt \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{v_1, \dots, v_k \\ v_1 + \dots + v_k = n}} \int_{\Delta t^1, \dots, \Delta t^k, \delta t} e^{-s\Delta t^1 v_1} \psi(\Delta t^1) \omega(v_1) d\Delta t^1 \dots e^{-s\Delta t^k v_k} \psi(\Delta t^k) \omega(v_k) dt_k e^{-s\delta t} \Psi(\delta t) d\delta t \\ &= \tilde{\Psi}(s) \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{v_1, \dots, v_k \\ v_1 + \dots + v_k = n}} \tilde{\psi}(sv_1) \dots \tilde{\psi}(sv_k) \omega(v_1) \dots \omega(v_k). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Przy przejściu z pierwszej do drugiej linii równości wykorzystałem fakt, że:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_{\mathbb{R}_+^{k+1}} \delta(\delta t - [t - v_1 \Delta t^1 - \dots - v_k \Delta t^k]) d\Delta t^1 \dots d\Delta t^k d\delta t \right) dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+^{k+2}} e^{-st} \delta(\delta t - [t - v_1 \Delta t^1 - \dots - v_k \Delta t^k]) d\Delta t^1 \dots d\Delta t^k d\delta t dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+^{k+1}} e^{-s(v_1 \Delta t^1 + \dots + v_k \Delta t^k + \delta t)} d\Delta t^1 \dots d\Delta t^k d\delta t \\
 &= \int_{\Delta t^1, \dots, \Delta t^k, \delta t} e^{-s(v_1 \Delta t^1 + \dots + v_k \Delta t^k + \delta t)} d\Delta t^1 \dots d\Delta t^k d\delta t
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

oraz zamieniłem kolejność całkowania i sumowania.

Kolejnym krokiem będzie przejście z otrzymanej postaci $\tilde{P}_n(s)$ do pełnej postaci propagatora $\tilde{P}_n(k; s)$, uwzględniającej wymiar przestrzenny. Łącząc równania (5.21), (5.24) oraz (5.26) otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}(k; s) &= \sum_{n=0}^\infty \tilde{P}_n(k; s) = \tilde{P}_0(k; s) + \sum_{n=1}^\infty \tilde{P}_n(s) \tilde{h}(k)^n \\
 &= \tilde{\Psi}(s) + \sum_{n=1}^\infty \tilde{A}_n(s) \tilde{h}(k)^n + \sum_{n=1}^\infty \tilde{B}_n(s) \tilde{h}(k)^n.
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Dwie sumy w powyższym równaniu przypominają jednostronną transformatę Z ($n \rightarrow z$), dlatego w kolejnych obliczeniach używać będę podstawienia $z = \tilde{h}(k)^{-1}$. W obydwu składnikach $\tilde{A}_n(s)$ oraz $\tilde{B}_n(s)$ występują te same sumy. Zobaczmy jak zadziała na nie sumowanie po n :

$$\sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{v_1, \dots, v_k \\ v_1 + \dots + v_k = n}} = \sum_{k=1}^\infty \sum_{v_1, \dots, v_k} \left|_{n=v_1 + \dots + v_k} \right. = \sum_{k=1}^\infty \underbrace{\sum_{v_k=1}^\infty \sum_{v_{k-1}=1}^\infty \dots \sum_{v_2=1}^\infty \sum_{v_1=1}^\infty}_k \left|_{n=v_1 + \dots + v_k} \right. . \tag{5.33}$$

Teraz mogę wyznaczyć pozostałe składniki transformaty Z:

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_z(s) &= \sum_{n=1}^\infty z^{-n} \tilde{A}_n(s) \\
 &= \tilde{\Psi}(s) \sum_{k=1}^\infty \sum_{v_1, \dots, v_k} \tilde{\psi}(sv_1) \omega(v_1) \dots \tilde{\psi}(sv_k) \omega(v_k) z^{-(v_1 + \dots + v_k)} \\
 &= \tilde{\Psi}(s) \sum_{k=1}^\infty \sum_{v_1, \dots, v_k} z^{-v_1} \tilde{\psi}(sv_1) \omega(v_1) \dots z^{-v_k} \tilde{\psi}(sv_k) \omega(v_k) \\
 &= \tilde{\Psi}(s) \sum_{k=1}^\infty \left[\sum_{v=1}^\infty z^{-v} \tilde{\psi}(sv) \omega(v) \right]^k .
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Przed dalszymi obliczeniami, w ramach uproszczenia zapisu wprowadzę oznaczenia:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z; s) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{-\nu} \tilde{\psi}(s\nu) \omega(\nu), \\ \tilde{F}(z; s) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{-\nu} \tilde{\psi}(s\nu) \Omega(\nu).\end{aligned}\tag{5.35}$$

Ponieważ $|\tilde{f}(z; s)| < 1$, mogę zapisać:

$$\tilde{A}_z(s) = \tilde{\Psi}(s) \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}(z; s)^k = \tilde{\Psi}(s) \frac{\tilde{f}(z; s)}{1 - \tilde{f}(z; s)}.\tag{5.36}$$

Łącząc powyższy wynik z wartością wyznaczoną dla członu $\tilde{B}_z(s)$ (patrz dodatek E) i ponownie podstawiając $z = \tilde{h}(k)^{-1}$, otrzymuję:

$$\tilde{P}(k, s) = \frac{1}{s} \frac{1 + \tilde{F}(\tilde{h}(k)^{-1}; s) - z\tilde{F}(\tilde{h}(k)^{-1}; s) - z\tilde{f}(\tilde{h}(k)^{-1}; s)}{1 - \tilde{f}(\tilde{h}(k)^{-1}; s)}\tag{5.37}$$

Powyższy wzór na propagator rozważanego błędzenia losowego w czasie ciągłym z powtarzającymi się czasami wyczekiwania jest kluczowym elementem dalszej analizy, gdyż na jego podstawie wyznaczę zachowanie momentów procesu oraz autokorelacji zmian.

5.2.2 Momenty procesu

Znając propagator procesu w przestrzeni Fouriera-Laplace'a, mogę wyznaczyć jego charakterystykę, a w szczególności jego dwa pierwsze momenty, jako odpowiednie pochodne:

$$\begin{aligned}\tilde{m}_1(s) &= -i \frac{\partial \tilde{P}(k; s)}{\partial k} \Big|_{k=0'}, \\ \tilde{m}_2(s) &= -\frac{\partial^2 \tilde{P}(k; s)}{\partial k^2} \Big|_{k=0'}\end{aligned}\tag{5.38}$$

które pochodzą z ogólnego wzoru (3.20). Po zastosowaniu ich do propagatora zadanego wzorem (5.37) otrzymam:

$$\begin{aligned}
 \tilde{m}_1(s) &= \frac{1}{s} \frac{\langle \Delta x \rangle (\tilde{F}(1;s) + \tilde{f}(1;s))}{1 - \tilde{f}(1;s)}, \\
 \tilde{m}_2(s) &= -\frac{1}{s} \frac{1}{(1 - \tilde{f}(1;s))^2} \\
 &\quad \times \left[2i \langle \Delta x \rangle (\tilde{F}(1;s)\tilde{f}'(1;s) - \tilde{f}(1;s)\tilde{F}'(1;s) + \tilde{F}'(1;s) + \tilde{f}'(1;s)) \right. \\
 &\quad \left. + (2 \langle \Delta x \rangle^2 - \langle \Delta x^2 \rangle)(1 - \tilde{f}(1;s))(\tilde{F}(1;s) + \tilde{f}(1;s)) \right] \\
 &= -\frac{2i \langle \Delta x \rangle \tilde{f}'(1;s)(\tilde{F}(1;s) + \tilde{f}(1;s))}{s (1 - \tilde{f}(1;s))^2} \\
 &\quad - \frac{1}{s} \frac{2i \langle \Delta x \rangle (\tilde{F}'(1;s) + \tilde{f}'(1;s)) + (2 \langle \Delta x \rangle^2 - \langle \Delta x^2 \rangle)(\tilde{F}(1;s) + \tilde{f}(1;s))}{1 - \tilde{f}(1;s)},
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

gdzie oznaczenie ' jest skrótowym oznaczeniem pochodnej po k w punkcie $k = 0$, czyli przykładowo $\tilde{f}'(1;s) = \left. \frac{\partial}{\partial k} \tilde{f}(\tilde{h}(k)^{-1}; s) \right|_{k=0}$. Do wyznaczenia powyższego wzoru wykorzystałem pochodne rozkładu skoków $\tilde{h}(k)$ w punkcie $k = 0$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}(0) &= 1, \\
 \left. \frac{\partial}{\partial k} \tilde{h}(k) \right|_{k=0} &= \tilde{h}'(0) = i \langle \Delta x \rangle, \\
 \left. \frac{\partial^2}{\partial k^2} \tilde{h}(k) \right|_{k=0} &= \tilde{h}''(0) = -\langle \Delta x^2 \rangle, \\
 \left. \frac{\partial}{\partial k} \tilde{h}^{-1}(k) \right|_{k=0} &= -i \langle \Delta x \rangle, \\
 \left. \frac{\partial^2}{\partial k^2} \tilde{h}^{-1}(k) \right|_{k=0} &= \langle \Delta x^2 \rangle - 2 \langle \Delta x \rangle^2.
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Następnie przyjrę się wartościom $\tilde{f}(1;s)$, $\tilde{f}'(1;s)$, $\tilde{f}''(1;s)$, $\tilde{F}(1;s)$ oraz $\tilde{F}''(1;s)$ wykorzystując oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 j_n(s) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^n \tilde{\psi}(s\nu) \omega(\nu), \\
 J_n(s) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^n \tilde{\psi}(s\nu) \Omega(\nu).
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Wszystkie wielkości wyznaczone są w punkcie $k = 0$:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\tilde{h}(k)^{-1}; s) \Big|_{k=0} &= \tilde{f}(1; s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} 1^{-\nu} \tilde{\psi}(s\nu) \omega(\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^0 \tilde{\psi}(s\nu) \omega(\nu) = j_0(s), \\
\frac{\partial}{\partial k} \tilde{f}(\tilde{h}(k)^{-1}; s) \Big|_{k=0} &= \frac{\partial}{\partial k} \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{h}(k)^{\nu} \tilde{\psi}(s\nu) \omega(\nu) \Big|_{k=0} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \tilde{h}'(0) \tilde{h}(0)^{\nu-1} \tilde{\psi}(s\nu) \omega(\nu) \\
&= i \langle \Delta x \rangle \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \tilde{\psi}(s\nu) \omega(\nu) = i \langle \Delta x \rangle j_1(s), \\
\frac{\partial^2}{\partial k^2} \tilde{f}(\tilde{h}(k)^{-1}; s) \Big|_{k=0} &= (\langle \Delta x \rangle^2 - \langle \Delta x^2 \rangle) j_1(s) - \langle \Delta x \rangle^2 j_2(s), \\
\tilde{F}(\tilde{h}(k)^{-1}; s) \Big|_{k=0} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{\psi}(s\nu) \Omega(\nu) = J_0(s), \\
\frac{\partial}{\partial k} \tilde{F}(\tilde{h}(k)^{-1}; s) \Big|_{k=0} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} i \langle \Delta x \rangle \nu \tilde{\psi}(s\nu) \Omega(\nu) = i \langle \Delta x \rangle J_1(s).
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Dzięki temu momenty procesu możemy zapisać jako:

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_1(s) &= \frac{\langle \Delta x \rangle}{s} \frac{J_0 + j_0}{1 - j_0}, \\
\tilde{m}_2(s) &= \frac{2 \langle \Delta x \rangle^2}{s} \frac{j_1(J_0 + j_0) + (1 - j_0)(J_1 + j_1 - J_0 - j_0)}{(1 - j_0)^2} + \frac{\langle \Delta x^2 \rangle}{s} \frac{J_0 + j_0}{1 - j_0} = \\
&= \frac{2 \langle \Delta x \rangle^2}{s} \frac{j_1}{1 - j_0} \frac{J_0 + j_0}{1 - j_0} + \frac{2 \langle \Delta x \rangle^2}{s} \frac{J_1 + j_1}{1 - j_0} + \frac{-2 \langle \Delta x \rangle^2}{s} \frac{J_0 + j_0}{1 - j_0} \\
&\quad + \frac{\langle \Delta x^2 \rangle}{s} \frac{J_0 + j_0}{1 - j_0},
\end{aligned} \tag{5.43}$$

gdzie dla krótszego zapisu ominałem argument s funkcji $j_n(s) \equiv j_n$ oraz $J_n(s) \equiv J_n$. Jest to ogólny wzór na zachowanie się momentów zadanego procesu w przestrzeni Laplace'a.

5.2.3 Przybliżenie dla małych s

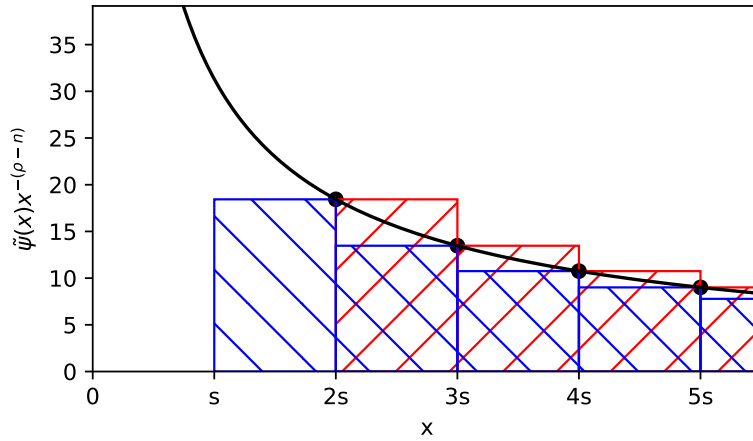
Zbadam zachowanie momentów procesu w granicy długich czasów ($t \rightarrow \infty$). W szczególności główny nacisk kładę na funkcyjne zachowanie się momentów w zależności od czasu t , sama wartość amplitudy nie jest tutaj kluczowa. Aby poznać asymptotyczne zachowanie momentów procesu w takim przypadku, należy ich transformatę Laplace'a rozwinać w szereg potęgowy dla $s \rightarrow 0$. Wykorzystam w tym celu równanie (5.43), które jest podane dla dowolnego rozkładu powtórzeń czasów wyczekiwania $\omega(\nu)$. **Dopiero teraz rozważę konkretną postać pamięci w szeregu czasów wyczekiwania**, wprowadzoną w rozdziale 5.1.1. Użyję najprostszego dystrybucyjnego rozkładu potęgowego, czyli **rozkładu zeta** (Zipfa) z parametrem ρ :

$\omega(v) = \frac{v^{-\rho}}{\zeta(\rho)}$, $\rho > 2$, jako że na podstawie wniosków z analizy danych empirycznych postanowiłem skupić się na modelowaniu dalekozasięgowych zależności.

Najpierw rozpatrzę $j_n(s)$ dla $n = \{0, 1\} < (\rho - 1)$:

$$\begin{aligned} j_n(s) &= \sum_{v=1}^{\infty} v^n \tilde{\psi}(sv) \omega(v) = \frac{1}{\zeta(\rho)} \sum_{v=1}^{\infty} \tilde{\psi}(sv) v^{-(\rho-n)} \\ &= \frac{s^{\rho-n-1}}{\zeta(\rho)} \underbrace{\sum_{v=1}^{\infty} \tilde{\psi}(sv) (sv)^{-(\rho-n)} s}_{I(s) - \tilde{\psi}(s)s^{-(\rho-n-1)}} \end{aligned} \quad (5.44)$$

gdzie $I(s)$ jest powyższą sumą bez pierwszego wyrazu.



Rysunek 5.4: Oszacowanie wartości $I(s)$ opisane wzorami (5.45) i (5.46). Kształt funkcji wynika z następujących faktów: $\tilde{\psi}(0) = 1$; z definicji $\tilde{\psi}(x)$ jest malejące; $\rho > n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-(\rho-n)} = +\infty$; $x^{-(\rho-n)}$ jest malejące dla $x > 0$.

Wartość szukanej sumy $I(s)$ jest równa polom zakreślonych prostokątów z rys. 5.4 (niebieskich oraz czerwonych). Te pola można oszacować całkami. Zauważmy że pole prostokątów zakreślonych na niebiesko jest mniejsze niż całka od s funkcji przedstawionej czarną linią na rys. 5.4, natomiast pole prostokątów zakreślonych na czerwono jest większe niż analogiczna całka z dolną granicą równą $2s$. Oznacza to:

$$I_1(s) < I(s) < I_2(s), \quad I_1(s) = \int_{2s}^{\infty} \tilde{\psi}(x) x^{-(\rho-n)} dx, \quad I_2(s) = \int_s^{\infty} \tilde{\psi}(x) x^{-(\rho-n)} dx. \quad (5.45)$$

Przyjrzyjmy się zachowaniu $I_2(s)$ dla małych s . Możemy podzielić całkę na dwie części:

$$I_2 = \underbrace{\int_s^a \tilde{\psi}(x) x^{-(\rho-n)} dx}_{I_2^*} + \underbrace{\int_a^\infty \tilde{\psi}(x) x^{-(\rho-n)} dx}_{const}, \quad s < a \ll 1. \quad (5.46)$$

Zgodnie z założeniami przedstawionymi we wstępie rozdziału 4, rozważamy jedynie rozkłady czasów posiadające wszystkie momenty, to znaczy takie, dla których możemy zapisać:

$$\tilde{\psi}(x) = 1 - \langle \Delta t \rangle x + \frac{1}{2} \langle \Delta t^2 \rangle x^2 - \frac{1}{6} \langle \Delta t^3 \rangle x^3 + \dots \quad (5.47)$$

Stąd wiemy, że I_2^* będzie postaci:

$$I_2^* = const - \frac{s^{-\rho+n+1}}{-\rho+n+1} + \langle \Delta t \rangle \frac{s^{-\rho+n+2}}{-\rho+n+2} - \frac{\langle \Delta t^2 \rangle}{2} \frac{s^{-\rho+n+3}}{-\rho+n+3} + \dots - \frac{(-1)^k \langle \Delta t^k \rangle}{k!} \frac{s^{-\rho+n+k}}{-\rho+n+k} + \dots \quad (5.48)$$

Rozpatrując I_1 dostaniemy rozwinięcie z takimi samymi potęgami i zależnościami od momentów rozkładu ψ jak w przypadku I_2 ; to samo dotyczy pierwszego wyrazu nieuwzględnionego w sumie. Jednak znaki dla obu przypadków nie są konsystentne, co ostatecznie daje nam zachowanie I dla małych s postaci:

$$I = const_0 + const_1 \cdot s^{-\rho+n+1} + const_2 \cdot s^{-\rho+n+2} + const_3 \cdot s^{-\rho+n+3} + \dots \quad (5.49)$$

Wstawiając powyższy wynik do $j_n(s)$ otrzymamy jego rozwinięcie dla małych s :

$$j_n(s) = C_n s^{\rho-n-1} + C_n^0 + C_n^1 s + C_n^2 s^2 + C_n^3 s^3 + \dots \quad (5.50)$$

Znane są też zależności powyższych współczynników względem rozkładu czasów. Współczynnik C_n jest dodatni i zależy od całego rozkładu czasów: $0 < C_n \sim \psi(\cdot)$. Natomiast współczynniki C_n^k nie zależą od całego rozkładu czasów, a jedynie od jego konkretnych momentów: $C_n^k \sim \langle \Delta t^k \rangle$. W szczególności oznacza to, że zerowy wyraz C_n^0 nie zależy od rozkładu czasów: $C_n^0 \propto \psi(\cdot)$. Samo rozwinięcie $j_n(s)$ – oprócz standardowego analitycznego rozwinięcia z całkowitymi dodatnimi potęgami – posiada również jeden wyraz potęgowy. W przypadkach, gdy s występuje jedynie w dodatnich potęgach ($\rho \geq n+1$), możemy łatwo z definicji wyznaczyć wyraz stały:

$$C_n^0 = j_n(0) = \frac{1}{\zeta(\rho)} \sum_{v=1}^{\infty} v^{-(\rho-n)} = \frac{\zeta(\rho-n)}{\zeta(\rho)} \geq 1. \quad (5.51)$$

W pozostałych przypadkach $j_n(0) = \infty$, przez co nie możemy wyznaczyć C_n^0 w taki sposób. Zauważmy za to, że ze sposobu rozwinięcia I_2 wynika

zależność:

$$C_n^k \sim - \left(\int (-1)^k \frac{\langle \Delta t^k \rangle}{k!} x^{-\rho+n+k} dx \right) (s). \quad (5.52)$$

Daje nam to możliwość wyznaczania wartości ilorazów postaci $C_{n_1}^{k_1}/C_{n_2}^{k_2}$, dla $n_1 + k_1 = n_2 + k_2$. W szczególności:

$$\frac{C_1^0}{C_0^1} = \frac{-1}{\langle \Delta t \rangle}, \quad (5.53)$$

W podobny sposób możemy podejść do rozwinięcia $J_n(s)$:

$$J_n(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^n \tilde{\psi}(s\nu) \underbrace{\Omega(\nu)}_{\sum_{k=\nu+1}^{\infty} \omega(k)} = \frac{s^{\rho-n-2}}{\zeta(\rho)} \sum_{\nu=1}^{\infty} (s\nu)^n \tilde{\psi}(s\nu) s \sum_{k=\nu+1}^{\infty} (sk)^{-\rho} s. \quad (5.54)$$

Podobnie jak poprzednio, możemy tę wielkość oszacować całkami:

$$\begin{aligned} J_n(s) &= \frac{s^{\rho-n-2}}{\zeta(\rho)} \int_s^{\infty} x^n \tilde{\psi}(x) dx \int_x^{\infty} y^{-\rho} dy = \frac{s^{\rho-n-2}}{\zeta(\rho)} \int_s^{\infty} x^{-(\rho-n-1)} \tilde{\psi}(x) dx = \\ &= D_n s^{\rho-n-2} + D_n^0 + D_n^1 s + D_n^2 s^2 + D_n^3 s^3 + \dots \end{aligned} \quad (5.55)$$

Wyraz stały możemy przy odpowiednich warunkach ($\rho > n + 2$) wyznaczyć w podobny sposób jak wcześniej:

$$D_0^0 = \frac{\zeta(\rho-1)}{\zeta(\rho)} - 1 = C_1^0 - C_0^0, \quad D_1^0 = \frac{\zeta(\rho-2) - \zeta(\rho-1)}{2\zeta(\rho)} = \frac{C_2^0 - C_1^0}{2}. \quad (5.56)$$

W szczególności analogicznie zachodzi: $0 < D_n \sim \psi(\cdot)$, $D_n^0 \approx \psi(\cdot)$, $D_n^k \sim \langle \Delta t^k \rangle$.

5.2.4 Momenty procesu w granicy długich czasów

Aby analitycznie zbadać zachowanie dwóch pierwszych momentów procesu w granicy długich czasów, należy do wzorów (5.43) wstawić uzyskane przybliżenia z poprzedniego podrozdziału. Na podstawie przybliżeń ze wzoru (F.1) umieszczonego w dodatku F, możemy poznać analityczne zachowanie pierwszego momentu:

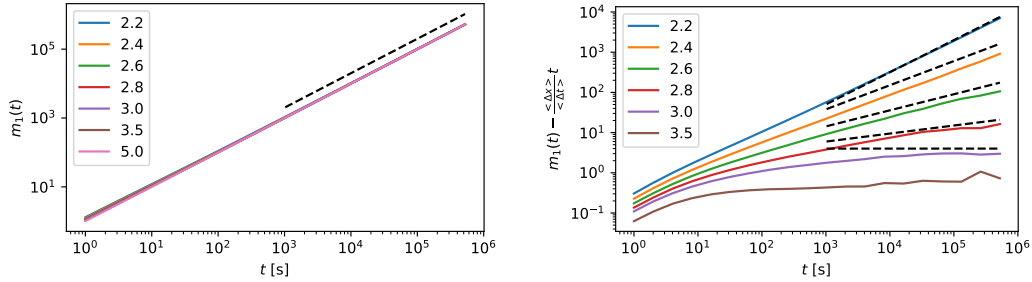
$$\tilde{m}_1(s) \approx \frac{\langle \Delta x \rangle}{s} \left(C_1^0 + D_0 s^{\rho-2} \right) \frac{-1 + \frac{C_0}{C_1^0} s^{\rho-2}}{s C_0^1} = \frac{\langle \Delta x \rangle - C_1^0}{s^2} \frac{D_0 - \frac{C_0 C_1^0}{C_0^1}}{C_0^1}, \quad (5.57)$$

uwzględniając wyrazy rosnące w czasie (s^α , $\alpha > 1$): analityczne i wiodący potęgowy. Przechodząc do przestrzeni czasu oraz korzystając ze wzoru

(5.53), otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 m_1(t) &= \mathcal{L}^{-1} \{ \tilde{m}_1(s) \} \\
 &\approx \frac{\langle \Delta x \rangle}{\langle \Delta t \rangle} t - \langle \Delta x \rangle \frac{D_0 + \frac{C_0}{\langle \Delta t \rangle}}{C_0^1 \Gamma(4 - \rho)} t^{3-\rho} = \frac{\langle \Delta x \rangle}{\langle \Delta t \rangle} t - \langle \Delta x \rangle \frac{\alpha\{\psi\}}{\Gamma(4 - \rho)} t^{3-\rho},
 \end{aligned}
 \tag{5.58}$$

dla $\rho \in (2;5)$, gdzie $\alpha\{\psi\}$ jest funkcjonalem rozkładu czasów wyczekiwania, co oznacza, że zależy od rozkładu ψ , jednak w szczególności nie zależy od czasu t . W rozwinięciu pierwszego momentu, oprócz najważniejszego standardowego liniowego wyrazu, widzimy także subliniowy człon dla $\rho \in (2;3)$, przedstawiony przerywanymi liniami przy wynikach odpowiadających symulacji na prawym wykresie rys. 5.5. Powyższa aproksymacja pierwszego momentu procesu porównana jest z momentami wyznaczonymi poprzez symulacje komputerowe (opis w rozdziale 5.3) na lewym wykresie rys. 5.5. **Rozwinięcie (5.58) jest elementem kluczowych wyników analitycznych dotyczących zaproponowanego modelu.** W podobny sposób przeanalizowany będzie drugi moment, wariancja oraz autokorelacja procesu.



Rysunek 5.5: Wykresy estymat charakterystyk procesu z symulacji komputerowych dla różnych wartości parametru ρ w skali logarytmicznej. Po lewej stronie przedstawiony jest pierwszy moment procesu. Dla wszystkich wartości parametru ρ rośnie on liniowo w czasie. Po prawej stronie przedstawiony jest pierwszy moment z odjętym kanonicznym członem $\frac{\langle \Delta x \rangle}{\langle \Delta t \rangle} t$. Zgodnie ze wzorem (5.58), widzimy rosnące potęgowe człony dla parametru $\rho < 3$. Przerywane linie obrazują funkcje potęgowe o wykładniku $3 - \rho$.

Obliczenia dla drugiego momentu również umieszczone są w dodatku F. Bazując na równaniu F.6 i przechodząc do przestrzeni t w granicy dużych

czasów, drugi moment możemy przybliżyć jako:

$$\begin{aligned}
 m_2(t) &\approx \\
 &\approx \frac{\langle \Delta x^2 \rangle}{\langle \Delta t \rangle} t - \langle \Delta x \rangle^2 \frac{1}{C_0^1 \langle \Delta t \rangle^2} \left[4C_0^2 + 3C_0^1 \langle \Delta t \rangle + 2C_1^1 \langle \Delta t \rangle + 2D_0^1 \langle \Delta t \rangle + C_2^0 \langle \Delta t \rangle^2 \right] t \\
 &+ \frac{\langle \Delta x \rangle^2}{\langle \Delta t \rangle^2} t^2 - \langle \Delta x \rangle^2 \frac{2}{\Gamma(5-\rho) C_0^1 \langle \Delta t \rangle} \left(D_0 + C_1 - D_1 + 2 \frac{C_0}{\langle \Delta t \rangle} \right) t^{4-\rho}, \quad \rho \in (2;5).
 \end{aligned} \tag{5.59}$$

Można to zapisać łatwiej używając funkcjonałów rozkładu czasów wyczekiwania $\beta\{\psi\}$ oraz $\gamma\{\psi\}$:

$$\begin{aligned}
 m_2(t) &\approx \langle \Delta x \rangle^2 \left(\frac{t}{\langle \Delta t \rangle} \right)^2 + \sigma_{\Delta x}^2 \frac{t}{\langle \Delta t \rangle} + \langle \Delta x \rangle^2 \beta\{\psi\} \frac{t}{\langle \Delta t \rangle} + \langle \Delta x \rangle^2 \frac{\gamma\{\psi\}}{\Gamma(5-\rho)} t^{4-\rho} \\
 &\text{dla } \rho \in (2;5). \tag{5.60}
 \end{aligned}$$

Drugi moment procesu (analityczne przybliżenie oraz symulacje komputerowe) przedstawiony jest na lewym wykresie rys. 5.6. We wzorze (5.60) ponownie pojawia się standardowa część drugiego momentu $\langle \Delta x \rangle^2 \left(\frac{t}{\langle \Delta t \rangle} \right)^2 + \sigma_{\Delta x}^2 \frac{t}{\langle \Delta t \rangle}$. Dokładne jego zachowanie najlepiej będzie zbadać przechodząc do wariancji procesu.

5.2.5 Wariancja

Wariancja procesu w dziedzinie czasu zadana jest jako:

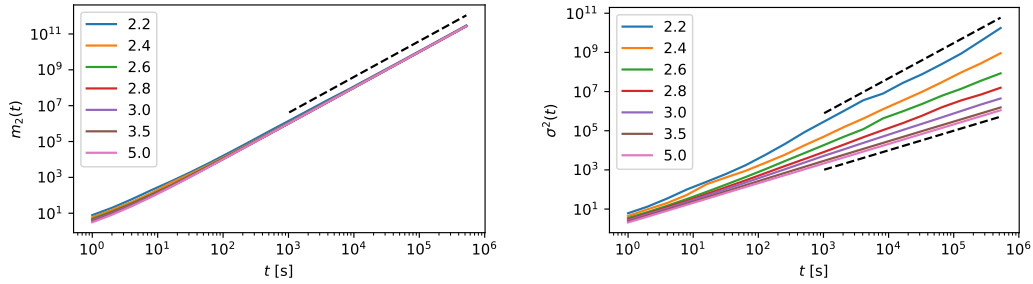
$$\sigma^2(t) = m_2(t) - m_1^2(t). \tag{5.61}$$

Na podstawie wniosków z poprzednich podrozdziałów mogę zapisać przybliżenie zawierające wyrazy analityczne oraz wiodący wyraz potęgowy:

$$\sigma^2(t) \approx \left(\sigma_{\Delta x}^2 + \langle \Delta x \rangle^2 \beta\{\psi\} \right) \frac{t}{\langle \Delta t \rangle} + \langle \Delta x \rangle^2 \frac{\gamma\{\psi\}}{\Gamma(5-\rho)} t^{4-\rho}, \quad \rho \in (2;5). \tag{5.62}$$

Dla $\rho \in (2;3)$ najważniejszy człon wyrażenia (5.62) to drugi człon potęgowy. W procesie obserwujemy wtedy superdyfuzję, w granicznym przypadku dochodzącą do dyfuzji balistycznej. Dla $\rho > 3$ występuje dyfuzja normalna. Jest to niezwykle ciekawy wynik, pokazujący, jak znacząco mogą zmieniać się podstawowe własności procesu (takie jak rodzaj dyfuzji), jedynie w efekcie uwzględnienia odpowiednio silnych zależności pomiędzy czasami międzyzdarzeniowymi. **Ten wynik, pokazujący możliwości opisu dwóch światów przez autorski model, zarówno dyfuzji normalnej, jak i superdyfuzji, jest kolejnym istotnym wynikiem analitycznym mojej rozprawy doktorskiej.** Wariancja procesu wyznaczona z symulacji komputerowych wraz z granicznymi przypadkami (dyfuzja normalna i balistyczna) przedstawiona jest na

prawym wykresie rys. 5.6.



Rysunek 5.6: Wykresy estymat charakterystyk procesu z symulacji komputerowych dla różnych wartości parametru ρ w skali logarytmicznej. Po lewej stronie przedstawiony jest drugi moment procesu. Dla wszystkich wartości parametru ρ rośnie on kwadratowo w czasie. Po prawej stronie przedstawiona jest wariancja procesu. Zgodnie ze wzorem (5.62) dla parametru $\rho < 3$ najważniejszym członem jest wyraz potęgowy $t^{4-\rho}$, a funkcja rośnie szybciej niż liniowo. Natomiast dla $\rho > 3$ dominującym członem wariancji jest człon liniowy. Przerywane linie obrazują funkcje potęgowe o skrajnych wykładnikach 1 i 2.

5.2.6 Autokorelacja prędkości procesu

Znając dwa pierwsze momenty stacjonarnego procesu, mogą wyznaczyć jego autokorelację prędkości, czyli autokorelację zmian procesu $\text{COV}_{\Delta x}(t)$. Korzystając ze wzoru (3.21) i wstawiając wartości z równań (5.58) i (5.60), mogą otrzymać przybliżenie autokorelacji zmian dla rozważanego modelu CTRW:

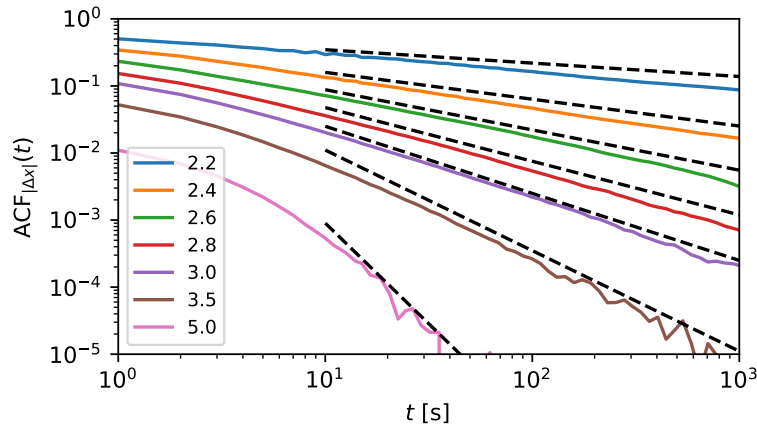
$$\text{COV}_{\Delta x}(t) = \frac{1}{2} \frac{d^2 m_2(t)}{dt^2} - \left(\frac{dm_1(t)}{dt} \right)^2 \Rightarrow \text{COV}_{\Delta x}(t) \approx \langle \Delta x \rangle^2 \frac{\kappa\{\psi\}}{\Gamma(3-\rho)} t^{2-\rho}$$

dla $\rho \in (2; 4)$, (5.63)

gdzie $\kappa\{\psi\} = \left(\frac{\gamma\{\psi\}}{2} - \frac{2\alpha\{\psi\}}{\langle \psi \rangle} \right)$. Powyższe przybliżenie uwzględnia najważniejszy niezerujący się człon ze wzorów na pierwszy i drugi moment procesu. W tym miejscu warto też dodać, że w powyższych wzorach (5.58), (5.60), (5.62), (5.63) wyraz potęgowy istnieje również w przypadku, kiedy ρ wykracza poza przyjęty zakres i cechuje się on taką samą zależnością od $\langle \Delta x \rangle$ oraz tym samym wykładnikiem czasowym. Jednak zależność amplitudy od rozkładu czasów wyczekiwania ψ oraz parametru ρ przyjmuje bardziej złożoną postać.

Zobaczmy niezwykle ciekawe własności powyższego wzoru. W przypadku rozkładu skoków o zerowej średniej $\langle \Delta x \rangle = 0$ ten wzór się zeruje, co jest spójne z wynikiem dla kanonicznego CTRW. Natomiast dla niezerowego

pierwszego momentu zmian $\langle \Delta x \rangle \neq 0$ w granicy $t \rightarrow \infty$, czasowa autokorelacja zmian zanika potęgowo z wykładnikiem $\rho - 2$. Zobrazowane to zostało na rys. 5.7, gdzie ponownie porównuję przybliżony wzór analityczny z symulacjami komputerowymi. Oznacza to, że powtarzające się czasy wyczekiwania wywierają najsilniejszy wpływ na błędzenia losowe z dryfem. Powyższy wynik obserwować możemy dla nieliniowych autokorelacji zmian w procesie z zerowym dryfem. Przykładowo dla takiego procesu możemy rozważyć autokorelację modułów zmian. Wtedy faktycznie liczymy autokorelację zmian procesu zbudowanego na podstawie bazowego procesu bez dryfu, jednak z bezwzględnymi wartościami zmian w miejsce zmian procesu bazowego. Oczywiście powstały proces modułów zmian jest procesem niemającym, którego rozkład zmian jest nieujemny i posiada dodatni pierwszy moment. Oznacza to, że dla procesu z powtarzającymi się czasami wyczekiwania o zerowym dryfie nie obserwujemy autokorelacji zmian, jednak autokorelacja modułów zmian będzie zanikać potęgowo. Jest to kolejny kluczowy analityczny wynik mojej rozprawy doktorskiej. Dodatkowo wykładnik potęgowego zaniku czasowej autokorelacji zmian $\rho - 2$ jest taki sam, jak wykładnik potęgowego zaniku krokowej autokorelacji czasów wyczekiwania.



Rysunek 5.7: Wykresy estymat autokorelacji prędkości procesu z niezerowym dryfem z symulacji komputerowych dla różnych wartości parametru ρ w skali logarytmicznej. Przerywane linie obrazują funkcje potęgowe o odpowiadających wykładnikach $-(\rho - 2)$.

5.3 Symulacje komputerowe

Część z analitycznych wyników wyprowadzonych w poprzednim rozdziale 5.2 jest asymptotycznymi przybliżeniami w granicy dużych czasów ($t \rightarrow \infty$). Przeprowadziłem symulacje komputerowe procesów, aby na ich podstawie otrzymać estymacje badanych statystyk. Dzięki temu, mogłem

porównać jak szybko przybliżenia analityczne stają się zbieżne z wynikami symulacyjnymi, co przedstawiłem na rysunkach 5.2, 5.3, 5.5, 5.6, 5.7.

Pierwszym krokiem do przeprowadzenia symulacji omawianego procesu było wygenerowanie dwóch szeregów: czasów wyczekiwania oraz zmian wartości procesu. Tworząc szereg okresów międzyzdarzeniowych, najpierw losowałem wartość Δt^i z rozkładu wykładniczego o średniej 1 s, a następnie powtarzałem ją v_i razy, gdzie v_i pochodziło z rozkładu zeta o zadanym parametrze ρ . Natomiast szereg zmian wartości w większości przypadków powstawał w oparciu o losowanie z rozkładu normalnego o jednostkowej średniej i wariancji. Zgodnie z definicją procesu, szereg ten był niezależny od szeregu czasów wyczekiwania. W symulacjach czasowej autokorelacji modułów zmian, w celu ułatwienia obliczeń numerycznych, użyłem szeregu jedynek jako szeregu modułów zmian. Następnie z tak wyznaczonych szeregów tworzona była właściwa trajektoria procesu CTRW.

Korelacje krokowe byłyby estymowane na podstawie symulacji szeregów o długości $2^{28} = 268435456$. Natomiast w przypadku tworzenia trajektorii procesu, rozważałem procesy o długości $2^{20} \text{ s} = 1048576 \text{ s}$. Przy wyznaczeniu każdej wielkości, symulacje były wielokrotnie powtarzane (co najmniej 100 razy), a wynik prezentowany na wykresach jest ich uśrednieniem.

5.4 Porównanie z danymi empirycznymi

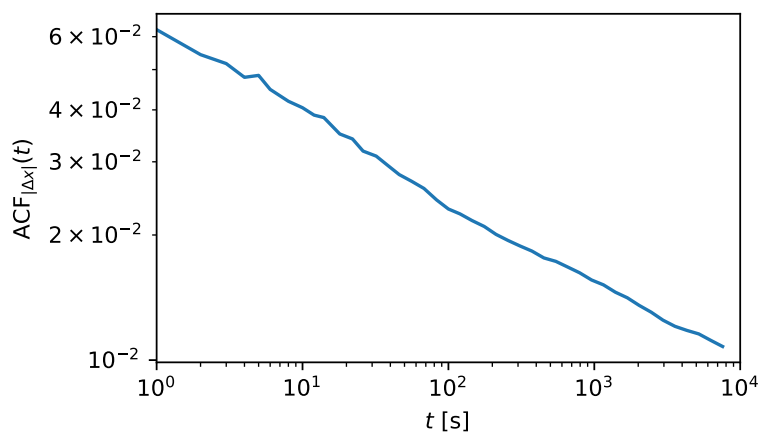
Motywacja do stworzenia modelu ze skorelowanymi czasami wyczekiwania w dużym stopniu pochodziła wprost z analizy danych empirycznych, a konkretniej danych z rynków finansowych. W zaproponowanym modelu – zgodnie z definicją z rozdziału 5.2 oraz własnościami danych przedstawionymi w rozdziale 2.3 – powinny zachodzić następujące prawidłowości:

- Wartość procesu odzwierciedla logarytm ceny instrumentu finansowego. Zatem zmiany wartości procesu Δx to logarytmiczne zmiany cen, a czasy wyczekiwania Δt to czasy między transakcjami.
- Rozkład logarytmicznych zmian $h(\Delta x)$ posiada zerową średnią $\langle \Delta x \rangle = 0$.
- Rozkład czasów wyczekiwania $\psi(\Delta t)$ posiada wszystkie momenty.
- Rozkład liczby powtórzeń to rozkład zeta z parametrem $\rho > 2$.

W efekcie tak zdefiniowany model posiada następujące własności porównane z danymi empirycznymi:

- czasowa autokorelacja zmian jest zerowa $\text{COV}_{\Delta x}(t) = 0$.
- obydwie czasowa autokorelacja modułów zmian $\text{COV}_{|\Delta x|}(t)$ oraz krokowa autokorelacja czasów wyczekiwania $\text{COV}_{\Delta t}(n)$ zanikają potęgowo z tym samym wykładnikiem $\rho - 2$.

Dla czasów większych niż kilka średnich czasów międzytransakcyjnych pierwsza własność jest faktem stylizowanym na rynkach finansowych. Natomiast porównanie wykładników autokorelacji z drugiej własności przedstawione jest w poniższej tabeli 5.1. Uwzględnia ona 5 najbardziej płynnych spółek z rozważanego przedziału czasowego. Ponadto przykładowa czasowa autokorelacja modułów zmian dla spółki PKNORLEN zobrażowana jest na rys. 5.8. Widzimy, że (z dokładnością do kilkunastu procent) uzyskane wykładniki są zgodne z danymi empirycznymi. Pokazuje to, że korelacje pomiędzy czasami międzytransakcyjnymi są kluczowe w modelowaniu i zrozumieniu zarówno zjawiska klastrowania aktywności, jak i zmienności.



Rysunek 5.8: Wykres empirycznej czasowej autokorelacji modułów logarytmicznych zmian ceny dla PKNORLEN dla danych z czasami międzytransakcyjnymi zestacjonaryzowanymi ze względu na wewnątrzdziennej niestacjonarność. Autokorelacja ta jest dodatnia i zanika w sposób potęgowy z małym wykładnikiem, bliskim 0.2.

5.5 Podsumowanie

W powyższym rozdziale rozpatrzyłem autorski model błędzenia losowego w czasie ciągłym z powtarzającymi się czasami wyczekiwania. Stanowi on ogólny model CTRW umożliwiający uwzględnienie skorelowanych czasów międzyzdarzeniowych. Zaproponowana metodologia jest ogólna i poprzez odpowiednie dobranie rozkładu liczby powtórzeń wartości czasów wyczekiwania może modelować różne (krótko- i dalekozasięgowe) zależności pomiędzy okresami międzyzdarzeniowymi; w moich rozważaniach skupiłem się na pamięciach dalekozasięgowych. Dzięki prostocie modelu udało się go rozwiązać i analitycznie zbadać jego właściwości statystyczne w granicy długich czasów. Dodatkowo jego parametry (między innymi rozkład zmian $h(\Delta x)$, czasów wyczekiwania $\psi(\Delta t)$ czy wykładnika potęgowej autokorelacji czasów wyczekiwania $2 - \rho$) są łatwo interpretowalne

Spółka	Krokowa ACF Δt	Czasowa ACF $ \Delta x $
PKNORLEN	-0.175 ± 0.005	-0.203 ± 0.010
KGHM	-0.207 ± 0.010	-0.237 ± 0.006
PKOBP	-0.263 ± 0.011	-0.225 ± 0.006
PZU	-0.265 ± 0.017	-0.238 ± 0.005
PGE	-0.268 ± 0.014	-0.253 ± 0.007

Tabela 5.1: Tabela z dopasowanymi wykładnikami empirycznych autokorelacji zestacjonaryzowanych danych: krokowej czasów wyczekiwania $ACF_{\Delta t}(n)$ oraz czasowej modułów logarytmicznych zmian $ACF_{|\Delta x|}(t)$ dla 5 najpłynniejszych spółek z GPW w rozważanym okresie. Użyte przedziały do estymacji to $10^{0.5} \leq n \leq 10^{2.5}$ dla $ACF_{\Delta t}(n)$ oraz $10^1 \leq t \leq 10^{3.5}$ dla $ACF_{|\Delta x|}(t)$. Obydwa wykładniki dla poszczególnych spółek są sobie bliskie. Przykładowe wykresy samych autokorelacji wraz z dopasowanymi wykładnikami znajdują się w dodatkach (rysunki B.8 oraz B.10).

i można je ustawiać niezależnie. Umożliwia to ich łatwą estymację na podstawie danych empirycznych. Dzięki temu potencjalny zakres użyteczności przedstawionego modelu jest znacznie szerszy niż przykładowa aplikacja zaprezentowana w niniejszej rozprawie.

Ponieważ własności statystyczne modelu były inspirowane między innymi danymi rynkowymi, można go używać jako prostego modelu dynamiki ceny. Oczywiście jest to model, który w założeniu skupia się głównie na jednym efekcie – zjawisku klastrowania aktywności, przejawiającym się silnie skorelowanymi czasami międzytransakcyjnymi. Celem tego modelu nie jest uwzględnienie wszystkich znanych faktów stylizowanych obserwowanych w danych transakcyjnych, takich jak gruboogonowe rozkłady zwrotów logarytmicznych [7], multifraktalność [111], [112] czy ogólne prawa skalowania czasów pomiędzy ekstremalnie dużymi skokami [109], [110]. Głównym zamierzeniem było stworzenie prostego, rozwiązywalnego modelu, dzięki któremu będzie można lepiej poznać podstawy oraz współzależności efektów klastrowania aktywności i zmienności. Wyniki modelu pokazały, że faktycznie rola czasów międzytransakcyjnych może być kluczowa w zrozumieniu powstawania efektu klastrowania zmienności. Model tłumaczy wykładniki zaniku zarówno autokorelacji czasów wyczekiwania, jak i modułów zmian, uwzględniając jedynie zależności pomiędzy czasami międzytransakcyjnymi, nie modelując w ogóle zależności pomiędzy zmianami ceny czy modułami zmian ceny. Pokazuje to, że na podstawowym poziomie pojedynczych transakcji, to zależności pomiędzy okresami między transakcjami są istotniejsze niż zależności pomiędzy samymi wartościami zmian ceny czy ich modułami. Co więcej, aby zweryfikować uniwersalność wyciągniętych wniosków, symulacyjnie sprawdziłem inne metody generowania skorelowanych szeregów czasów wyczekiwania, w tym metodę filtrowania w przestrzeni Fouriera (przykładowo zastosowaną w [113]). Okazało się, że nie miało to wpływu na główne

wnioski z analizy: wykładniki autokorelacji krokowej szeregu czasów wyczekiwania i autokorelacji czasowej modułów zmian również były takie same. Ta weryfikacja pokazuje, że wnioski wyciągane z modelu są ogólne, niezależne od szczególnego źródła wprowadzania zależności w szeregu czasów wyczekiwania.

Obecnie najbardziej popularnym modelem dotyczącym klastrowania zmienności jest model GARCH (ang. *Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity*), który operuje na szeregu czasowym i skupia się na uwzględnieniu zależności pomiędzy wariancją kolejnych skoków. Jednak niezwykle ciekawy wynik otrzymany dla modelu rozważanego w tej rozprawie pokazuje, że istnieje potrzeba rozwijania alternatywnych metodologii do standardowych podejść. Rzutowanie procesu istniejącego w czasie ciągłym na szereg czasowy może być nieodpowiednią metodą, gdyż to właśnie zależności w przestrzeni czasów mogą pozwolić na prawdziwe zrozumienie zjawiska, a przez to umożliwić w przyszłości powstanie dokładniejszych i bardziej precyzyjnych modeli klastrowania zarówno aktywności, jak i zmienności.

Rozdział 6

Multifraktalna analiza aktywności

Istota procesów opisujących aktywności układów złożonych jest przedmiotem intensywnych badań. Przykładami rozważanych układów mogą być wieloatomowe układy fizyczne, złożone układy biologiczne (w tym *homo sapiens*), czy też te nadzwyczaj istotne dla społeczności ludzkich (takie jak rynki finansowe czy sieci infrastrukturalne). Nieliniowe oddziaływania pomiędzy elementami tworzącymi układ (np. typu sprzężeń zwrotnych), obecność w układzie długookresowej pamięci oraz niestacjonarności, są źródłem złożonej struktury aktywności układów. W niniejszej rozprawie skupiłem się na mechanizmach mogących stanowić klucz do głębszego zrozumienia zasad funkcjonowania wielu układów złożonych. Prominentnym przykładem może być, opisana w rozdziale 5.5, zasadnicza rola zależności pomiędzy czasami międzytransakcyjnymi w powstawaniu zjawiska klastrowania zmienności na giełdzie.

Skomplikowana aktywność układu może przejawiać się w wielu charakterystykach układu, takich jak niewykładniczy rozkład czasów międzytransakcyjnych, potęgowe korelacje w wielu skalach czasowych (czyli niezmienniczość ze względu na skalowanie) oraz korelacje wyższych rzędów a w tym korelacje nieliniowe. Analiza aktywności układu musi być w stanie uwzględnić powyższe konsekwencje. Nowoczesną, zaawansowaną metodą spełniającą ten warunek jest analiza multifraktalna, zwana też wielofraktalną. W niniejszym rozdziale omawiam autorską metodę analizy multifraktalnej [16]. Metoda ta polega na zdefiniowaniu, w różnych skalach czasowych, **lokalnych** średnich czasów międzytransakcyjnych (co stanowi analogię do podejścia typu *coarse graining*). Oznacza to zasadniczą różnicę w stosunku do standardowego podejścia. W wyniku przeprowadzenia procedury skalowania podstawowych charakterystyk czasów międzytransakcyjnych, otrzymałem niemonotoniczne zachowanie uogólnionego wykładnika Hursta $h(q)$ oraz Höldera $\alpha(q)$ w funkcji rzędu fluktuacji q . Dzięki zastosowaniu transformaty Legendre-Fenchela (subtelniejszej od powszechnie używanej w tym kontekście transformaty Legendre'a), otrzymałem wielogałęziowe widmo (spektrum) $f(\alpha)$ stanowiące zasadniczą charakterystykę multifraktalności.

6.1 Analiza multifraktalna

Analiza multifraktalna jest metodą analizy układów złożonych i nieliniowych systemów dynamicznych [111], [114], [115], która w ostatniej dekadzie wyraźnie zyskała na popularności. Multifraktale to obiekty, które skalują się analogicznie do fraktali, jednak skalowanie ich charakterystyk może być różne dla różnych części multifraktali. W tym sensie analiza multifraktalna stanowi rozszerzenie kanonicznej analizy fraktalnej. Obecnie udokumentowane są dwa źródła pochodzenia multifraktalności: gruboogonowe rozkłady i/lub dalekozasięgowe zależności [111], które prowadzą do hierarchicznej organizacji w wielu skalach. Dużym wyzwaniem jest zidentyfikowanie prawdziwej multifraktalności. Szumy, niektóre korelacje krótkookresowe, a także zbyt mała długość szeregu mogą prowadzić do multifraktalności pozornej [116], [117].

Jednak pomimo trudności technicznych, analiza multifraktalna znajduje coraz szersze zastosowania. Na przykład, w medycynie [118] a zwłaszcza w neuronauce [119] i elektrografii [120]–[122]. Używana jest do opisu aktywności sejsmicznej (zwłaszcza w wulkanologii) [123], [124], zjawiskach turbulencji w atmosferze [125], a nawet rozrostu miast w urbanistyce [126]. Powszechnie stosowana jest w analizie rynków finansowych [112], [127]–[130], przede wszystkim w analizie procesu ceny, a nie samej aktywności. Prace rozważające multifraktalność aktywności, koncentrowały się bezpośrednio na szeregach czasów międzytransakcyjnych [106], [131], [132]. Rozwinięta przez mnie metoda opiera się na innej, niż dotychczas stosowana, mierze aktywności, a mianowicie na **lokalnych średnich czasach międzytransakcyjnych**, przy czym aktywność jest do nich odwrotnie proporcjonalna.

Dotychczasowe metody analizy multifraktalnej można podzielić na dwie główne kategorie: a) opierające się na analizie odchyłeń od trendu (podejście fluktuacyjne) oraz b) transformacji falkowej maksimów modułów (ang. *wavelet transform modulus maxima*) (podejście transformacyjne). Jednak pokazano, że metoda (b) jest często mniej stabilna, dlatego nie jest preferowana do analizy danych których cechy multifraktalne nie są wcześniej znane [114]. Przy stosowaniu metody wymienionej w punkcie (a), można uzyskać wykorzystywany w tej metodzie trend przez dopasowanie krzywej wielomianowej do danych w oparciu o technikę DFA (ang. *detrended fluctuations analysis*) bądź posłużyć się średnią kroczącą (ang. *detrended moving average*). Jednak w przypadku danych posiadających niestacjonarności, w tym wewnątrzdziennych niestacjonarności, które występują w przypadku używanych przeze mnie danych (zobacz rys. 2.9), znacznie lepiej jest posłużyć się techniką DFA.

6.2 Analiza multifraktalna średnich czasów międzyzdarzeniowych

W tym rozdziale przedstawiam wyniki autorskiej analizy multifraktalnej średnich czasów międzytransakcyjnych. Metoda oparta jest na kanonicznej analizie multifraktalnej zdetrandowanych fluktuacji (ang. *multifractal detrended fluctuations analysis*, MFDFA), jednak posiada dwie istotne modyfikacje. Po pierwsze w niestandardowy sposób definiuję wielkość, na której wprost przeprowadzona jest analiza multifraktalna. Zamiast używać szeregu czasów międzytransakcyjnych, wyznaczam lokalne średnie czasy międzytransakcyjne, co definiuję poniżej w paragrafie 6.2.1. Po drugie, otrzymawszy niemonotoniczny wykładnik Höldera, używam transformacji Legendre-Fenchela, zamiast zwykłej transformaty Legendre'a, co pozwala na uzyskanie wielogłęziowego spektrum (widma) singularności (osobliwości). Opisałem to w paragrafie 6.2.4.

6.2.1 Wewnątrzdzienne fluktuacje średnich czasów międzytransakcyjnych

Dane są w naturalny sposób podzielone na N_d dni handlowych, każdy o długości T , tutaj jest to $N_d = 1741$ oraz $T = 7 \text{ h } 50 \text{ min} = 28\,200 \text{ s}$. Ponieważ systematyczna składowa aktywności jest powiązana przede wszystkim z wewnątrzdziennej niestacjonarnością (przedstawioną w postaci wyrazistego "uśmiechu" zmienności na rys. 2.9), dlatego nie łączę dni w jeden długi szereg czasowy. Dodatkowo, ogólna liczba transakcji zmienia się znacząco w zależności od dnia (patrz rys. 2.11). Zamiast tego, każdy dzień traktuję osobno, dzięki czemu otrzymuję zespół statystyczny złożony z N_d dni (replik statystycznych) umożliwiający uśrednianie po tym zespole. Połączenie takiego podejścia z elementami metody MFDFA, pozwolą pozbyć się niestacjonarności zarówno wewnątrzdziennej, jak i tych w dłuższym okresie.

Następnie każdy dzień handlowy dzielę na s rozłącznych okienek czasu o jednakowej długości Δ , przy czym zachodzi $T = s\Delta$. Zatem w przedstawionym podejściu s definiuje skalę. Dla każdego takiego okienka, $i' = 1, \dots, s$, definiuję lokalny średni czas międzytransakcyjny, $\Delta t_{i'}^v$, jako iloraz długości okienka Δ przez liczbę $n_{i'}$ transakcji zaobserwowanych w okienku (plus 1, co pozwala uniknąć dzielenia przez 0 w przypadku, gdy $n = 0$):

$$\overline{\Delta t_{i'}^v} = \frac{\Delta}{n_{i'} + 1} \quad (6.1)$$

(takie podejście jest uzasadnione wtedy, gdy $n \gg 1$, co najczęściej ma miejsce dla spółek o dużej płynności). Zatem, dla każdego dnia $v = 1, \dots, N_d$, otrzymuję szereg o długości s , składający się z lokalnych średnich czasów międzytransakcyjnych $\Delta t_{i'}^v$. Przykładowy pojedynczy szereg przedstawiony jest na wykresie (a) rys. 6.1. **Odwrótności tak zdefiniowanych średnich**

czasów przyjmuję jako miarę aktywności na giełdzie. Czasy te są punktem wejścia analizy multifraktalnej przedstawionej w niniejszej rozprawie.

W kolejnym kroku, dla każdego dnia ν oraz zadanej skali s definiuję profil U_ν jako sumę krocząca lokalnych średnich czasów międzytransakcyjnych:

$$U_\nu(i) = \sum_{i'=1}^i \overline{\Delta t_{i'}^\nu}, \quad 1 \leq i \leq s. \quad (6.2)$$

Zatem profil ma kształt dodatniej monotonicznie rosnącej krzywej, zdefiniowanej dla skali s . Aby usunąć główną niestacjonarność, czyli zdetrendować profil (i móc dalej analizować jedynie odchylenia od trendu), należy użyć wielomianu co najmniej trzeciego stopnia. Wynika to z konieczności odtworzenia punktu przegięcia empirycznej niestacjonarności przedstawionej na wykresie (b) na rys. 6.1 oraz omówionej wcześniej w paragrafie 2.3.2 (tzw. 'efektu lunchu'), jak również ze skumulowanego charakteru tej wielkości. Dzięki temu usuwam z danych niestacjonarność wewnątrzdzienne. Ponadto, ponieważ dla każdego dnia dobieram wielomian niezależnie, to detrendowanie ma tutaj charakter indywidualny. Stąd, usuwane są także inne niestacjonarności, nawet długoterminowe (wielodniowe), gdyż w takiej procedurze używam zindywidualizowanego, najlepszego dla każdego dnia dopasowania.

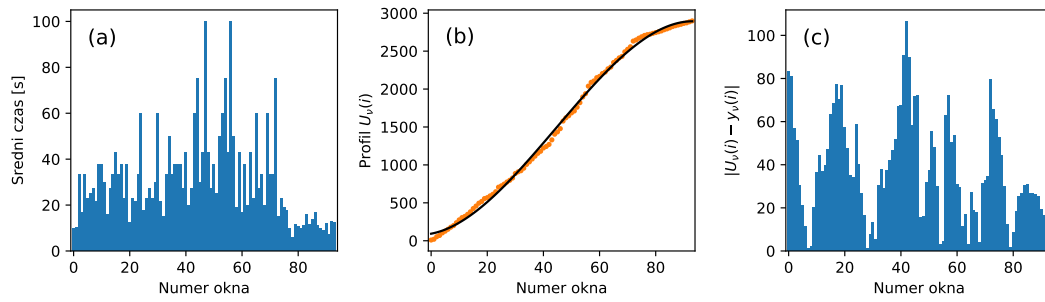
Dla każdego dnia definiuję wielomian detrendujący stopnia M :

$$y_\nu(i) = \sum_{m=0}^M A_\nu^m i^{M-m}, \quad M \geq 0, \quad 1 \leq i \leq s, \quad 1 \leq \nu \leq N_d. \quad (6.3)$$

W poniższych rozważaniach wystarczy dobrać stopień wielomianu $M = 3$ (jednakowy dla każdego dnia). Przykładowy profil dla pojedynczego dnia oraz dopasowany wielomian detrendujący pokazałem na wykresie (b) rys. 6.1. Natomiast wartości bezwzględne odchylen profilu empirycznego od tego wielomianu pokazałem na wykresie (c). Widać na nim, że poprawnie usuwamy wewnątrzdzienne strukturę aktywności, zostawiając dobrze widoczne grupy dużych odchylen. Dzięki temu wybrana procedura pozwala na analizę klastrowania się fluktuacji (w tym przypadku odpowiadających zmienności aktywności).

Zdetrendowaną funkcję fluktuacyjną drugiego stopnia definiuję dla każdego dnia ν i zadanej skali s , jako średnie odchylenie kwadratowe profilu od dopasowanego wielomianu:

$$F^2(\nu, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s [U_\nu(i) - y_\nu(i)]^2. \quad (6.4)$$



Rysunek 6.1: Wykresy wewnątrzdziennych charakterystyk szeregów czasowych dla przykładowo wybranego dnia 6-go maja 2019 r ($\nu = 1505$) dla ustalonej wielkości okna czasowego $\Delta = 5$ min, odpowiadającego skali $s = 96$, prezentujące efekt klastrowania aktywności. (a) Wykres podstawowej wielkości wyznaczonej z empirycznych danych transakcyjnych, czyli średnie czasy międzytransakcyjne $\bar{\Delta t}_i^V$, $i = 1, \dots, s$. Widać na nim efekt klastrowania aktywności – zarówno długie średnie czasy międzytransakcyjne odpowiadające spokojnym okresom (o niskiej aktywności), jak i krótkie odpowiadające okresom o dużej aktywności skupiające się w gronach. Ponadto, widać wewnątrzdzienną niestacjonarność – okresy najmniej aktywne obserwuje się w środku dnia, a okna z największą liczbą transakcji występują na początku i końcu sesji. (b) Empiryczny, monotonicznie rosnący wykres (dodatniego) profilu $U_v(i)$ (pomarańczowe kropki) posiadający punkt przegięcia wraz z dopasowanym trendem $y_v(i)$, czyli wielomianem trzeciego stopnia (czarna ciągła linia). (c) Wykres bezwzględnych odchyleń od trendu $|U_v(i) - y_v(i)|$, których uśredniony kwadrat definiuje zdetrendowaną funkcję fluktuacyjną drugiego stopnia. Dobrze widoczny jest efekt klastrowania fluktuacji.

Tego rodzaju dwuczynnikowa funkcja (określona indywidualnie dla każdego dnia) ilustruje rozmiary fluktuacji średnich czasów międzytransakcyjnych w stosunku do znormalizowanego trendu. Warto zaznaczyć, że niniejsza analiza różni się od standardowych wariantów metody MFDFA używanych dotychczas [112], rozpatrujących wielodniowy szereg danych jako jeden szereg. W moim podejściu nie zajmuję się bezpośrednio samymi czasami międzytransakcyjnymi, ale ich lokalnymi średnimi. Ponadto, szeregi danych reprezentujących pojedyncze dni handlowe były rozpatrywane osobno (ponieważ łączenie danych nie jest procedurą określoną precyzyjnie). Zatem dla ustalonego ν , funkcja $F^2(\nu, s)$ jest funkcją od skali s . Kolejne charakterystyki danych będą definiowane za pomocą zbioru zdetrendowanych funkcji fluktuacyjnych w liczbie N_d . Należy podkreślić, że w takim przypadku skalowanie nie wykracza poza pojedynczy dzień handlowy, czyli badane są zależności wewnątrzdziennie. Mimo tego, że operuję krótszymi szeregami, możliwe jest zaobserwowanie prawa skalowania funkcji fluktuacyjnej dowolnego rzędu q (gdyż wprowadzam dodatkowe średniowanie po zespole statystycznym dni handlowych), które szerzej omawiam poniżej.

6.2.2 Uogólniona suma statystyczna

Uogólniona suma statystyczna definiowana jest następująco:

$$Z_q(s) = \sum_{\nu=1}^{N_d} [p(\nu, s)]^q, \quad (6.5)$$

gdzie dla zadanej skali s funkcja $p(\nu, s)$ jest prawdopodobieństwem wystąpienia konkretnej wielkości fluktuacji (a dokładnie pierwiastka średniego kwadratowego odchylenia od trendu) dla rozważanego dnia ν . Przy zastosowaniu funkcji fluktuacyjnej drugiego stopnia można zdefiniować tę wielkość w postaci:

$$p(\nu, s) = \frac{[F^2(\nu, s)]^{\frac{1}{2}}}{\text{Norm}(s)}, \quad \text{Norm}(s) = \sum_{\nu=1}^{N_d} [F^2(\nu, s)]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.6)$$

Na podstawie warunku normalizacji otrzymujemy średnią wartość tego prawdopodobieństwa:

$$\langle p(s) \rangle = \frac{1}{N_d} \sum_{\nu=1}^{N_d} p(\nu, s) = \frac{1}{N_d}, \quad (6.7)$$

a także sumę statystyczną dla $q = 0$:

$$Z_{q=0}(s) = N_d. \quad (6.8)$$

Jest to konsekwencja stworzenia zespołu statystycznego z szeregów czasowych podzielonych na dni handlowe.

Następnie mogę sformułować kluczową hipotezę skalowania fluktuacji:

$$\sum_{\nu=1}^{N_d} [F^2(\nu, s)]^{\frac{q}{2}} \approx N_d A_q s^{qh(q)}. \quad (6.9)$$

Podobnie jak w kanonicznym podejściu, zakładam (weryfikowaną poniżej) potęgową zależność od skali s lewej strony wyrażenia (6.9), z wykładnikiem równym $qh(q)$, gdzie $h(q)$ to uogólniony wykładnik Hursta. Podstawa potęgi to jedyne miejsce zależne od skali s , tzn. współczynnik A_q oraz uogólniony wykładnik Hursta $h(q)$ nie zależą od s . Co więcej, podstawiając $q = 0$ otrzymuję, że $A_{q=0} \approx 1$.

Kluczowym elementem analizy multifraktalnej jest sformułowanie hipotezy skalowania. Wyznaczanie kolejnych wielkości ma miejsce na jej bazie. W związku z tym, ważne jest zweryfikowanie tego twierdzenia w oparciu o dane empiryczne. Szczegółowy opis tego procesu zawarty jest w rozdziale 6.2.3. Trzeba jednak zaznaczyć, że hipoteza skalowania użyta w niniejszej rozprawie różni się od jej standardowej formy opartej na pełnej uogólnionej sumie statystycznej. Zaproponowane przeze mnie podejście

opiera się na wykorzystaniu parcjalnej (częściowej) sumy statystycznej pozwalające ominąć trudności, jakie generuje użycie pełnej uogólnionej sumy statystycznej. Szczegóły tego podejścia są wyjaśnione w dodatku G.

6.2.3 Hipoteza skalowania

W tym podrozdziale przeprowadzam analizę multifraktalną na konkretnym przykładzie danych empirycznych. Wydarzeniami są pojedyncze transakcje na spółce PKNORLEN z okresu 15-04-2013 do 15-04-2020, tworzące zespół $N_d = 1741$ dni handlowych. (Dokładniejszy opis używanych danych empirycznych zamieściłem w dodatku A.) W tym celu wprowadzam (ogólną) funkcję fluktuacyjną:

$$\mathcal{F}_q(s) = \left\{ N_d^{-1} \sum_{\nu=1}^{N_d} [F^2(\nu, s)]^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad q \neq 0, \quad (6.10)$$

pozwalającą wyrazić hipotezę skalowania (6.9) w postaci:

$$\mathcal{F}_q(s) \approx \left[A_q s^{qh(q)} \right]^{\frac{1}{q}}. \quad (6.11)$$

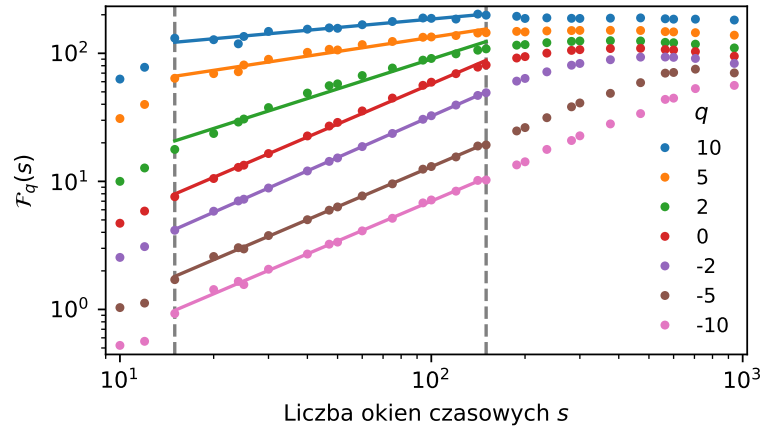
Definicję (6.10) należy uzupełnić o przypadek $q = 0$, dla którego funkcję fluktuacyjną można wyznaczyć wprost przechodząc w (6.10) z $q \rightarrow 0$:

$$\mathcal{F}_0(s) = \exp \left[\frac{1}{2N_d} \sum_{\nu=1}^{N_d} \log \left(F^2(\nu, s) \right) \right]. \quad (6.12)$$

W dalszym ciągu warto zlogarytmować stronami równanie (6.10) ze względu na jego potęgowy charakter:

$$\log \mathcal{F}_q(s) \approx h(q) \log s + B(q), \quad B(q) = q^{-1} \log A_q. \quad (6.13)$$

W następnym kroku mogę przystąpić do bezpośredniej weryfikacji hipotezy skalowania. W rzeczywistości może ona być spełniona tylko w ograniczonym przedziale skal. Kluczowym krokiem jest poprawne określenie tego przedziału. Na podstawie konkretnej realizacji $\mathcal{F}_q(s)$, przedstawionej na rysunku 6.2 dla kilku reprezentatywnych wartości q , wyznaczam przedział skal, w którym zaobserwowano zgodność z hipotezą skalowania. Dla małych skal, np. $s = 10$, co odpowiada oknu o długości $\Delta = 2820$ sek = 47 min, mam do czynienia ze zbyt małą liczbą okienek. Procedura detrendowania oznacza dopasowanie wielomianu trzeciego stopnia do małej liczby punktów – w tym wypadku 10 – co powodować może zbyt dokładne dopasowanie i eliminację zdetrendowanych fluktuacji. Przeciwny przypadek to zbyt duża skala, kiedy to okienka są zbyt krótkie, co powoduje powstanie niereprezentatywnego szeregu lokalnych średnich czasów międzytransakcyjnych $\overline{\Delta t_i^V}$. Przykładowo, dla skali $s = 940$ długość okienka wynosi



Rysunek 6.2: Wykres empirycznej funkcji $\mathcal{F}_q(s)$ (kolorowe punkty) w skali log-log dla wybranych reprezentatywnych wartości q z przedziału $[-10; 10]$. Przedział ten jest na tyle szeroki, że pozwala na wyodrębnienie obu asymptot (dla ujemnych i dodatnich wartości q) wykładnika Rényi'ego $\tau(q)$ zdefiniowanego równaniem 6.14, którego przebieg przedstawiłem na rys. 6.6 poniżej. Ciągłe linie na niniejszym wykresie to proste dopasowane regresją liniową oddzielnie dla każdego q do punktów empirycznych w zadanym zakresie skal. Pionowe przerywane linie zaznaczają wybrany zakres skali $s \in [15; 150]$ odpowiadający zakresowi okien czasowych $\Delta \in [188 \text{ sek}; 1880 \text{ sek}]$. Jest to odpowiednio szeroki przedział z najmniejszymi błędami względnymi i bezwzględnymi dopasowań. Widać, co jest nadzwyczaj ważne, że nachylenia prostych zależą w sposób niemonotoniczny od q . Wspomniane błędy dopasowań są tutaj na tyle małe, że pozwalają na analizę tej subtelnej, ale wyraźnej niemonotoniczności.

$\Delta = 30$ sek. Jest ona porównywalna ze średnim czasem międzytransakcyjnym dla tej spółki (wynoszącym około 20 sek). Oznacza to, że zdecydowana większość okienek nie będzie zawierała żadnej transakcji albo jedną lub co najwyżej dwie (wyższa liczba transakcji jest mało prawdopodobna). W konsekwencji, otrzymany szereg lokalnych średnich czasów międzytransakcyjnych będzie się składał przede wszystkim z niemal takich samych wartości, uniemożliwiając analizę zdetrendowanych fluktuacji.

Na rysunku 6.2 widać, że dla dużych wartości s i q nie występuje skalowanie, jednak w przedziale środkowym (pomiędzy pionowymi przerywanymi liniami prostymi) wartości funkcji fluktuacyjnej rosną liniowo (w skali log-log) wraz ze wzrostem s dla wszystkich wartości q . Dla ujemnych wartości q przedział skalowania jest dłuższy, jednak mój cel to zlokalizowanie uniwersalnego (wspólnego dla wszystkich wartości q) zakresu s , dla którego ma miejsce skalowanie. Zakres s powinien obejmować przynajmniej jeden rząd wielkości danych empirycznych o wystarczająco małym rozproszeniu statystycznym. Innymi słowy, wyznaczony uogólniony wykładnik Hursta $h(q)$,

czyli w tym przypadku współczynnik przy wyrazie liniowym (otrzymany z regresji liniowej opartej na wzorze (6.13)), powinien mieć małą wartość względnych błędów dopasowania. Tym poszukiwanym przedziałem jest $[15, 150]$, odpowiadający zakresom okien czasowych $\Delta \in [188 \text{ sek}, 1880 \text{ sek}]$. Istotnym jest też tutaj wybranie odpowiedniego zakresu q – w tym przypadku jest on szerszy niż zwykle używany i wynosi $-10 \leq q \leq 10$, co pozwala na wyodrębnienie asymptot ukośnych wykładnika Rényi'ego $\tau(q)$ (danego wzorem (6.14) poniżej, którego zależność od q przedstawiłem na rysunku 6.6).

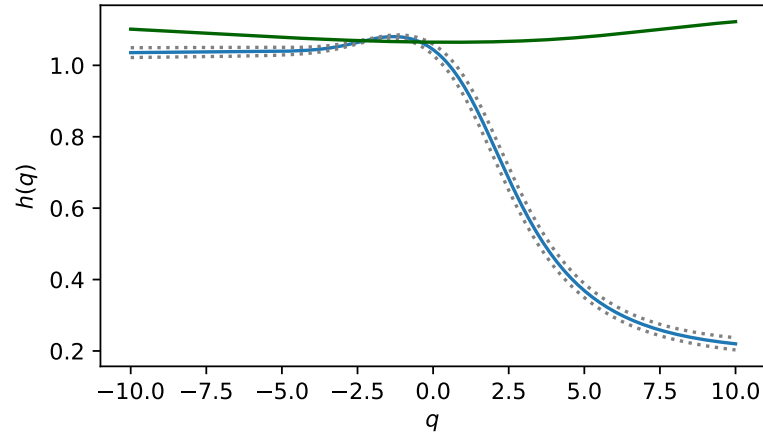
W rozważanym przedziale skali wyznaczyłem uogólniony wykładnik Hursta $h(q)$. Jego interesujący przebieg przedstawiłem na rysunku 6.3. Po pierwsze warto zauważyć dużą rozpiętość wartości wykładnika Hursta, który dla $-10 \leq q \leq 10$ przyjmuje wartości od 0.22 do 1.08. Dobrze widać też niemonotoniczność $h(q)$ – osiąga on maksymalną wartość dla $q = -1.31$. Zieloną linią przedstawiłem wynik dla symulowanego procesu Poissona o długości szeregu i średnim czasie międzytransakcyjnym odpowiadającym danym empirycznym. Jego wariancja (nieprzekraczająca grubości krzywej w kolorze zielonym) oraz zmienność (nieprzekraczająca 0.07) są niewielkie, co pokazuje, że wpływ skończonego rozmiaru empirycznego szeregu czasowego jest do zaniedbania. Rzuca się w oczy drastyczna różnica pomiędzy przebiegami $h(q)$ dla obu procesów zarówno co do jego rozpiętości, jak i kształtu. Wygodną miarą tego jest różnica $\Delta h(q) = h(-q) - h(q)$ – jej zależność od q dla obu procesów przedstawiłem na rysunku 6.4. Ważnym aspektem tego porównania jest fakt, że proces Poissona nie jest samoskorelowany. Zagadnienia związane z autokorelacjami omawiam w dodatku H.

Z regresji liniowej, na podstawie której wyznaczany jest wykładnik Hursta, otrzymuje się też niezależny od skali s składnik $B(q)$ (patrz wzór (6.13)). Jego zachowanie, zaprezentowane na rysunku 6.5, jest bardziej złożone niż w przypadku procesu Poissona, co jest kolejnym sygnałem wskazującym na złożoność struktury aktywności w analizowanych danych empirycznych.

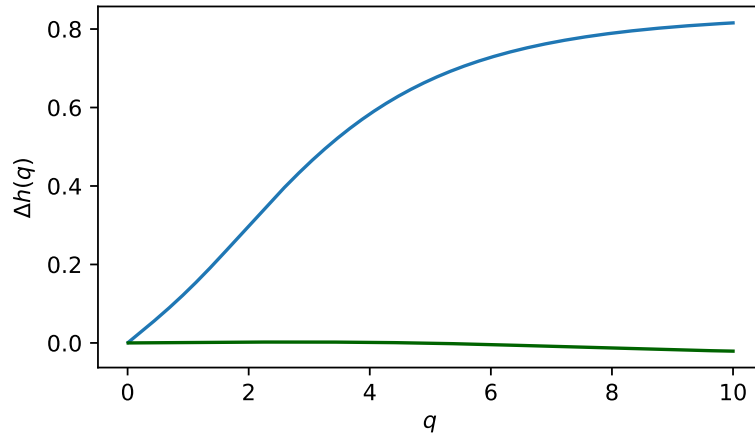
Następną, omawianą w rozprawie wielkością jest wykładnik skalowania Rényi'ego $\tau(q)$ zdefiniowany jako:

$$\tau(q) = qh(q) - h(q = 1). \quad (6.14)$$

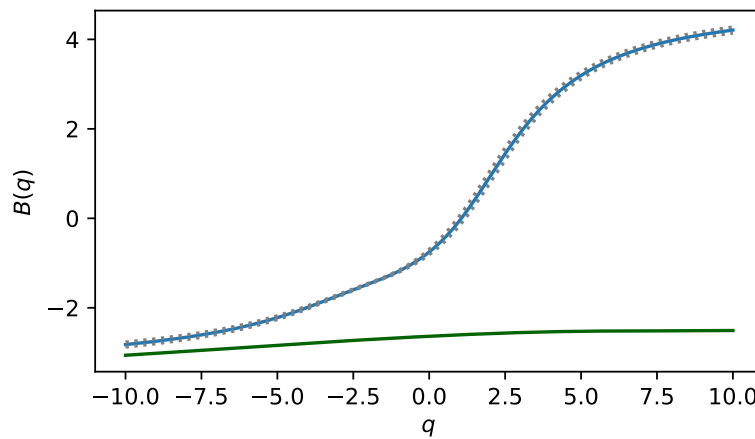
Dokładne wyprowadzenie, a w szczególności wyjaśnienie obecności wyrazu stałego $h(q = 1)$, zamieściłem w dodatku G. W przypadku monofraktali, dla których wykładnik Hursta nie zależy od q , $\tau(q)$ jest po prostu funkcją liniową. Widać to dobrze dla nieskorelowanego procesu Poissona. W przypadku danych empirycznych, widzimy zmianę asymptotycznego nachylenia dla ujemnych i dodatnich q . Dodatkowo w otoczeniu $q = 0$ występuje niewielkie, ale wyraźne falowanie. To jest właśnie (mówiąc ogólnie) sygnaturą niemonotonicznej multifraktalności. Aby zbadać dokładniej tę subtelność, należy wziąć pod uwagę pochodną $\frac{d\tau(q)}{dq}$, czyli wykładnik Höldera.



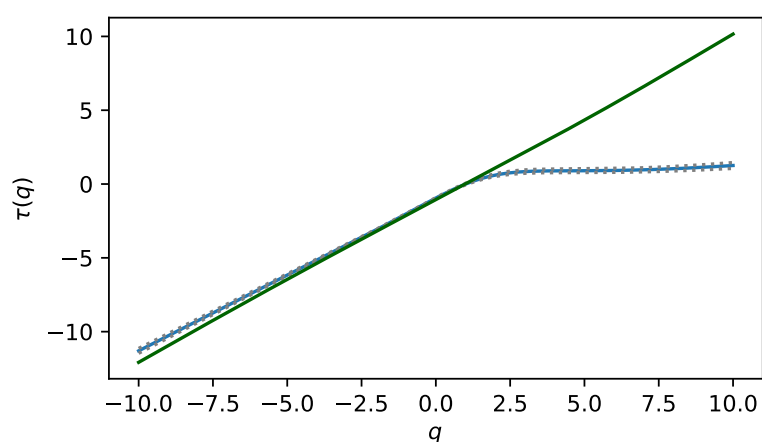
Rysunek 6.3: Wykres empirycznego uogólnionego wykładnika Hursta $h(q)$ (niebieska krzywa) wraz z jego błędami dopasowań (punkty wokół tej krzywej; pochodzą one z błędów wcześniejszych dopasowań przedstawionych na rysunku 6.2). Na tym oraz kolejnych wykresach zielone krzywe są wynikiem symulowanego procesu Poissona – dla nieskończenie długich danych powinna być horyzontalna. W przypadku symulacji o długości równej długości danych empirycznych, jest ona tylko nieznacznie wygięta. Pozwala to twierdzić, że wpływ skończonego rozmiaru szeregu czasowego, w tym szeregu empirycznego, jest znikomy. Co ważniejsze, widoczna znaczna rozpiętość uogólnionego wykładnika Hursta oznacza, że analizowane dane empiryczne przejawiają silne własności multifraktalne. Niemonotoniczność uogólnionego wykładnika Hursta, która popchnęła mnie do dalszych badań, była już wcześniej opisywana w sposób inspirujący przez autorów prac [116], [133], [134]. Zauważyli oni, że udekorowanie autokorelacji długookresowych (np. korelacjami krótkookresowymi, addytywnym szumem, czy okresowym trendem) może prowadzić do niemonotoniczności $h(q)$. Jednakże ta obserwacja jest niepełna – np. wciąż nie jest znana odpowiedź na pytanie dotyczące roli długookresowych autokorelacji wyższych rzędów (wielopunktowych) w wywoływaniu tego typu niemonotoniczności, tzn. jakie ich klasy mogą do niej prowadzić. W niniejszej rozprawie skupiam się na badaniu konsekwencji występowania wspomnianej niemonotoniczności, nie odpowiadając na pytanie o jej źródła.



Rysunek 6.4: Wykres empirycznej funkcji nieparzystości wykładnika Hursta $\Delta h(q) = h(-q) - h(q)$ (linia niebieska) w porównaniu z analogiczną dla procesu Poissona (linia zielona).



Rysunek 6.5: Wykres empirycznej funkcji tła $B(q)$ (występującej w równaniu (6.13)) w porównaniu z analogiczną dla procesu Poissona.



Rysunek 6.6: Wykres wykładnika skalowania Rényi'ego $\tau(q)$ w zależności od q . W przypadku monofraktali (tak jak dla przykładowo wybranego symulowanego procesu Poissona oznaczonego zieloną linią) $\tau(q)$ jest funkcją liniową. W danych empirycznych (linia niebieska) oprócz zmiany nachylenia, w części środkowej występuje także niewielkie, ale wyraźne zafalowanie. Właśnie to subtelne zafalowanie jest zasadniczym przedmiotem analizy w niniejszym rozdziale.

6.2.4 Multifraktalność wielogałęziowa

Kluczowymi wielkościami multifraktalnymi są wykładnik Höldera $\alpha(q)$, który jest lokalnym wymiarem fraktalnym oraz jego rozkład $f(\alpha)$. W przypadku monofraktali wykładnik skalowania Rényi'ego jest linią prostą. Odstępstwa od tej liniowości wygodnie jest badać, biorąc pod uwagę jego pochodną po q , czyli wykładnik Höldera. Zmienność tej funkcji jest oznaką multifraktalności analizowanych danych. Wykładnik $\alpha(q)$ oraz jego rozkład $f(\alpha)$ otrzymać można poprzez transformację Legendre-Fenchela (L-F). Pomimo, że równania definiujące te wielkości są formalnie takie same jak dla transformacji Legendre'a, to podejście z użyciem transformacji L-F pozwala na uzyskanie rozwiązania wielogałęziowego. Dokładniej opisałem to w dodatku I.

Wykładnik Höldera definiowany jest jako pochodna wykładnika skalowania $\tau(q)$ po q :

$$\alpha(q) \equiv \frac{d\tau(q)}{dq}, \quad (6.15)$$

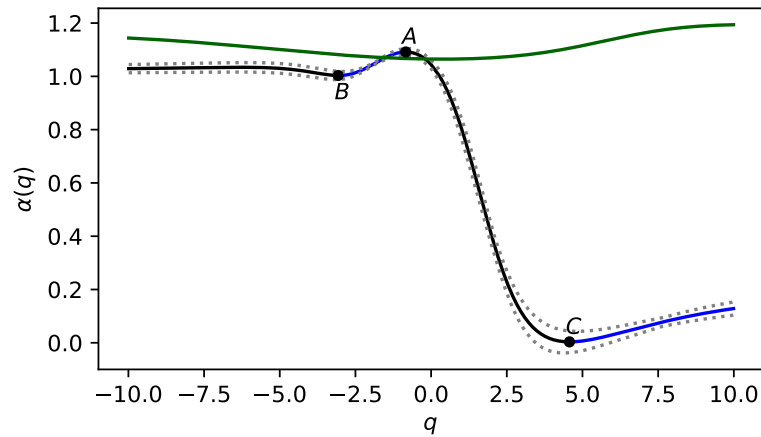
a jego rozkład $f(\alpha)$ definiuje za pomocą transformacji L-F:

$$f(q) \equiv q\alpha(q) - \tau(q). \quad (6.16)$$

Kluczowym wynikiem jest tutaj duża zmienność wykładnika $\alpha(q)$ oraz jego niemonotoniczne zachowanie. Funkcja ta najpierw jest stała, następnie maleje i dla $q = -3.06$ osiąga lokalne minimum. Następnie wzrasta i osiąga maksimum w punkcie $q = -0.83$. Kolejne lokalne minimum jest osiągane przez wykładnik $\alpha(q)$ w punkcie $q = 4.58$. W dalszych rozważaniach empirycznych skupiam się na przedziale $q \in [-5; 10]$, gdyż dla mniejszych wartości q wykładnik Höldera nie zmienia się istotnie zmniejszając jedynie czytelność wyników empirycznych.

Podejście kanoniczne stosujące transformację Legendre'a nie pozwala na otrzymanie spektrum $f(\alpha)$ w postaci wielogałęziowej. Jednakże, dzięki zastosowaniu transformacji L-F otwiera się możliwość zdefiniowania i otrzymania wielogałęziowego spektrum multifraktalnego.

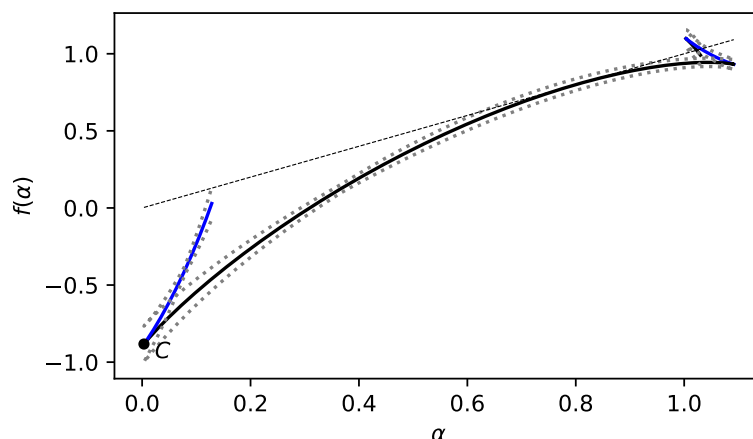
Każda z czterech monotonicznych części wykładnika Höldera odpowiada innej gałęzi na wykresie spektrum przedstawionym na rysunku 6.8. Główna gałąź spektrum multifraktalnego $f(\alpha)$ jest wypukła oraz styczna do przerywanej cienkiej linii o nachyleniu 1 (opisałem to dokładniej w dodatku I). Boczne gałęzie łączą się z nią w sposób gładki. Oznacza to, że pochodne obu gałęzi w miejscu styku są sobie równe. Zatem odwzorowanie α w $f(\alpha)$ jest wszędzie różniczkowalne. Formalnie, każda pojedyncza gałąź definiowana jest jako segment spektrum, dla którego druga pochodna $\frac{d^2 f(\alpha)}{d\alpha^2}$ jest ciągła. Punkty nieciągłości drugiej pochodnej definiują końce pojedynczych gałęzi, pozwalając otrzymać widmo wielogałęziowe (omawiam to dokładnie w podrozdziale 6.2.5. Na rysunku 6.9 przedstawiłem powiększenie fragmentu



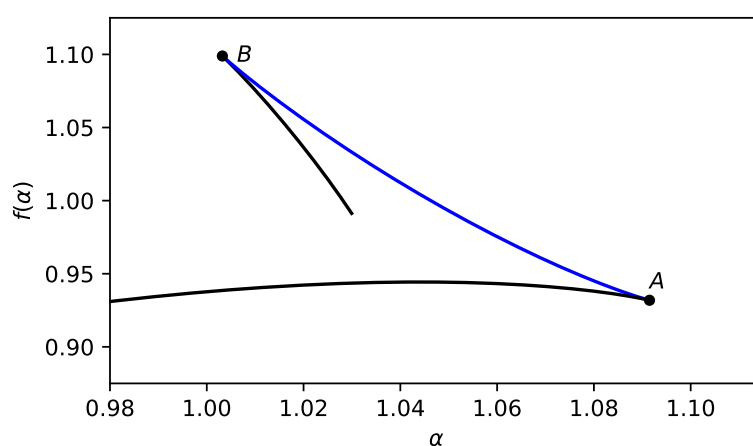
Rysunek 6.7: Wykres empirycznego wykładnika Höldera $\alpha(q)$ w zależności od q . Kolorem niebieskim oznaczyłem (monotonicznie rosnące) przedziały tego wykładnika. Kluczowym jest tutaj jego zmienność oraz niemonotoniczne zachowanie. Wynik dla (referencyjnego) symulowanego procesu Poissona przedstawiłem (jak zwykle) za pomocą zielonej krzywej. Punkty A, B i C, odpowiadające lokalnym ekstremom wykładnika, oznaczają miejsca przemian fazowych, które omówiłem w podrozdziale 6.2.5 poniżej. Jak widać, struktura wykładnika Höldera zawarta jest w przedziale nie większym niż (z dobrym przybliżeniem) $\alpha \in [-5.0, 5.0]$. Szerszy przedział q wziąłem pod uwagę dlatego, aby możliwie precyzyjnie wyznaczyć zakresy, w których $\tau(q)$ jest liniową funkcją q .

spektrum dla wykładników Höldera większych od 0.98.

Niestety z niespełnienia warunków styczności dla ($q = 1$) zadanych wzorami (I.2) dla bocznych gałęzi $f(\alpha)$ oraz niestandardowego przesunięcia niektórych wielkości multifraktalnych (przykładowo $\tau(q)$ – dokładny opis w dodatkach G i I) wynika brak jednoznacznego wyznaczenia położenia spektrum.



Rysunek 6.8: Wykres empirycznego wielogłęziowego spektrum $f(\alpha)$ w funkcji α . Główna gałąź przedstawiona jest za pomocą czarnej monotonicznie rosnącej krzywej ciągłej. Przerywana czarna, cienka linia prosta jest styczna w punkcie $(\alpha(q=1), f(\alpha(q=1)))$ do głównej gałęzi spektrum i jak powinna przechodzić przez punkt $(0, 0)$. Punkt C oznacza jedno z miejsc przemiany fazowej, opisanej w podrozdziale 6.2.5. Aby nie zaciemniać wykresu, pozostałe dwa punkty zwrotne A i B przedstawiłem na rysunku 6.9. Warto w tym miejscu podkreślić, że gdybyśmy f interpretowali jako rozkład wykładnika α , to ujemna wartość f wskazywałaby na to, że odpowiadający jej przedział α definiuje fizycznie niedostępny obszar przestrzeni fazowej układu.



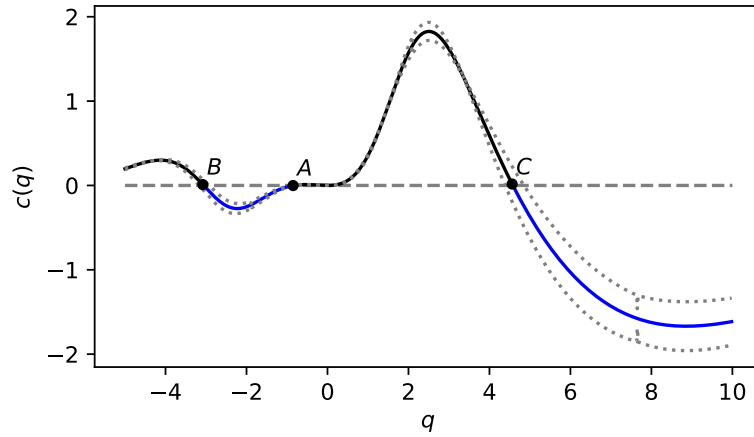
Rysunek 6.9: Powiększony wycinek wykresu pełnego widma $f(\alpha)$ przedstawionego powyżej na rysunku 6.8. Punkty zwrotne A i B lokalizują miejsca przemian fazowych opisane w podrozdziale 6.2.5.

6.2.5 Przemiany fazowe

Do pogłębionej analizy wyników uzyskanych na bazie danych empirycznych, można wykorzystać kanoniczne metody termodynamiczne. Jest to standardowe podejście do analizy własności multifraktalnych. Celem określenia analogonów faz termodynamicznych (w dalszym ciągu nazywane po prostu fazami) z jakimi ma się do czynienia w przypadku struktury multifraktalnej, można użyć analogonu ciepła właściwego [135]. Zatem, analogon ciepła właściwego układu (w dalszym ciągu nazywam go krótko ciepłem właściwym) mogę zdefiniować następująco:

$$c(q) = \frac{d\alpha(q)}{d(1/q)} = -q^2 \frac{d\alpha(q)}{dq}. \quad (6.17)$$

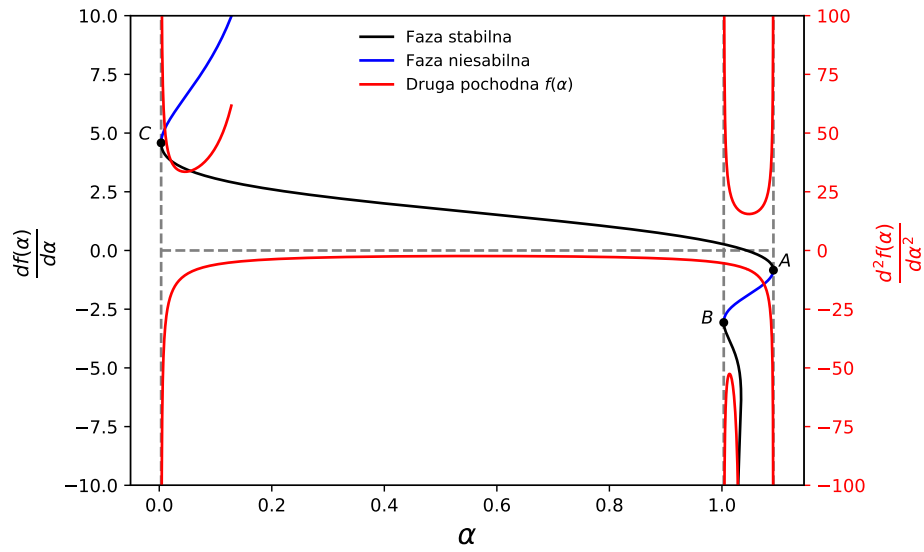
Jego wykres przedstawiłem na rys. 6.10.



Rysunek 6.10: Wykres empirycznego ciepła właściwego $c(q)$. Fazy niestabilne, dla których zachodzi $c(q) < 0$ oznaczone są kolorem niebieskim. Fazy stabilne ($c(q) \geq 0$), w tym główna gałąź spektrum, oznaczone są kolorem czarnym.

W układzie obserwuję istnienie dwóch obszarów stabilnych z nieujemnym ciepłem właściwym. Pierwszy dla $q \leq -3.08$. Drugi, tworzący główną gałąź spektrum $f(\alpha)$, dla $q \in [-0.85, 4.56]$. W dwóch pozostałych przedziałach q ciepło właściwe jest ujemne, co oznacza, że są to fazy niestabilne. Miejsca styku faz na rysunkach 6.7, 6.8, 6.9, 6.10 i 6.11 zaznaczone są jako punkty zwrotne A, B i C. W nich występują ciągłe przemiany fazowe (co jest spójne z zerową wartością ciepła właściwego w tych punktach, rys. 6.10). Dalszą analizę przemian fazowych kontynuuję z wykorzystaniem wykresu pierwszej i drugiej pochodnej spektrum f , przedstawionego na rysunku 6.11.

Prowadzona poniżej analiza przemian fazowych bazuje na klasyfikacji Mandelbrota/zmodyfikowanej Ehrenfesta [136], która tutaj jest oparta na spektrum wykładnika Höldera $f(\alpha)$. Jak to przedstawiam na rysunkach 6.8 i 6.11, zarówno f jak i jej pochodna $df/d\alpha$ są funkcjami ciągłymi. Dopiero druga



Rysunek 6.11: Wielogłęziowy wykres pierwszej (krzywa czarno-niebieska) oraz drugiej (krzywa czerwona) pochodnych widma (spektrum) wykładnika Höldera $f(\alpha)$. Pierwsza pochodna jest ciągła, w przeciwieństwie do drugiej. Punkty A, B i C lokalizują przemiany fazowe – ich położenia wyznaczają wartości α , w których występują osobliwości (singularności) drugiej pochodnej.

pochodna $d^2f/d\alpha^2$ jest nieciągła, złożona z czterech osobnych gałęzi. Punkty osobliwości drugiej pochodnej definiują granice gałęzi w tym wielogłęziowym spektrum. Główna gałąź pierwszej pochodnej (zaznaczona kolorem czarnym) rozciąga się pomiędzy punktami C i A. Odpowiadająca jej gałąź drugiej pochodnej przyjmuje wartości ujemne i na końcach (czyli w punktach C i A) jest rozbieżna do $-\infty$. Pozostałe trzy części drugiej pochodnej odpowiadają trzem bocznym gałęziom spektrum. Dwie (boczne) gałęzie o wartościach dodatnich odpowiadają fazom niestabilnym (dotyczą ich niebieskie części pierwszej pochodnej: rozciągająca się pomiędzy punktami A i B oraz ta zaczynająca się w punkcie C). Trzecia (boczna) gałąź drugiej pochodnej o ujemnych wartościach jest stabilna posiadając osobliwość w punkcie B. Aby dokładniej zbadać zachowanie pochodnej $f(\alpha)$ w punktach A, B i C, rozwiążam wykładnik Höldera używając dwóch pierwszych niezerowych wyrazów szeregu Taylora:

$$\alpha(q) \approx \alpha(q_{\text{extr}}) + \frac{1}{2}(q - q_{\text{extr}})^2 \frac{d^2\alpha(q)}{dq^2} \Big|_{q=q_{\text{extr}}}, \quad (6.18)$$

gdzie q_{extr} to wartości parametru q odpowiadające lokalnym ekstremom funkcji $\alpha(q)$ (równoważne punktom A, B i C). Przechodząc do pochodnych

f w tych punktach otrzymuję:

$$\begin{aligned}\frac{df}{d\alpha} &\approx \pm \sqrt{2 \left| \frac{\alpha - \alpha_s}{\ddot{\alpha}_s} \right|} + q_{\text{extr}}, \\ \frac{d^2f}{d\alpha^2} &\approx \pm \frac{1}{\sqrt{2|\ddot{\alpha}_s|}} \frac{1}{\sqrt{|\alpha - \alpha_s|}}, \\ \alpha_s &= \alpha(q_{\text{extr}}), \\ \ddot{\alpha}_s &= \left. \frac{d^2f}{d\alpha^2} \right|_{q=q_{\text{extr}}}.\end{aligned}\tag{6.19}$$

Wzory te uzyskuje się wykorzystując fakt, że $q = \frac{df[\alpha(q)]}{d\alpha}$, wynikający z równania (6.15). Powyższe równania potwierdzają na drodze analitycznej, że w rozpatrywanych punktach zachodzą przemiany fazowe drugiego rodzaju. Dalej korzystając z przybliżenia wykładnika Höldera (6.18), mogę zbadać zachowanie ciepła właściwego:

$$c(q) \approx -q^2(1 - q_{\text{extr}})\ddot{\alpha}_s,\tag{6.20}$$

które w otoczeniu punktów przemian fazowych zanika liniowo do zera (co jest oczekiwane).

6.3 Podsumowanie

W niniejszym rozdziale podjąłem tematykę analizy długookresowych zależności i długookresowych pamięci występujących w procesach opisujących aktywność układów złożonych. W szczególności formalizm analizy multifraktalnej dostosowałem do charakterystyki układów, w których można wyróżnić pojedyncze zdarzenia. Wtedy miarą aktywności mogą być odwrotności czasów pomiędzy zdarzeniami. Użyłem danych transakcyjnych jako reprezentatywnych danych empirycznych ze względu na ich dostępność w wystarczającej ilości. Aby upewnić się, że otrzymane wyniki multifraktalnych własności danych empirycznych nie są multifraktalnością pozorną (wynikającą np. ze skończonej długości szeregów czasowych), przeprowadziłem dodatkowo analizę dla symulowanego, referencyjnego procesu Poissona, który traktuję jako przykład procesu monofraktalnego.

Wyniki przedstawione w niniejszym rozdziale poszerzają tematykę analizy multifraktalnej. Pierwszym, autorskim elementem przedstawionej zmodyfikowanej multifraktalnej analizy zdetrendowanych fluktuacji, jest zastosowanie nowej miary aktywności w postaci lokalnych średnich czasów międzytransakcyjnych. Kolejnym autorskim, kluczowym elementem było wykorzystanie transformaty Legendre-Fenchela, co pozwoliło mi na otrzymanie i analizę wielogłęziowego spektrum multifraktalnego w zależności od (niemonotonicznego) wykładnika Höldera. Nowym wynikiem jest również zaobserwowanie tej własności w danych empirycznych – w szeregu

czasów międzytransakcyjnych. Wreszcie, poprzez analizę ciepła właściwego określiłem fazy stabilne i niestabilne układu oraz rodzaje przemian fazowych pomiędzy nimi.

Wyniki przedstawione w tym rozdziale oraz w dodatkach **G** – **J** mają na celu pokazanie, że omawiana w rozprawie, niemonotoniczna multifraktalność może być powszechną cechą spółek giełdowych z różnych sektorów rynku. Przypuszczam, że wspomniane niemonotoniczności nie pochodzą od niestacjonarności, wpływu dodatkowych szumów, autokorelacji krótkookresowych czy niekontrolowanych artefaktów, gdyż (aby zminimalizować te niekorzystne wpływy) dokonuję w moim podejściu sześciostopniowej filtracji wyników. Przez filtrację rozumiem tutaj procedurę eliminującą zanieczyszczenie szeregu czasowego.

- (i) Pierwszy etap filtrowania wynika z definicji zespołu statystycznego, składającego się z kolejnych dni roboczych. Rozpatrując osobno dane z różnych dni uwzględniam przede wszystkim zachowania wewnątrzdzienne. Mimo to, obserwuję własności multifraktalne. Sugeruje to, że autokorelacje wielodienne (leżące u podstaw zachowań multifraktalnych) mogą mieć swoje źródło w autokorelacjach wewnątrzdziennej.
- (ii) Drugi filtr tłumi dodatkowe szumy addytywne czasów międzytransakcyjnych, dzięki podejściu gruboziarnistemu, wykorzystującemu niezależnie średnie czasów międzytransakcyjnych w każdym pojedynczym oknie czasowym (czyli lokalne średnie).
- (iii) Trzeci filtr ma charakter standardowy – dokonuje po prostu detrendowania szeregów składających się ze wspomnianych powyżej lokalnych średnich czasów międzytransakcyjnych. Wykorzystuję w tym celu najniższy z możliwych stopień wielomianu detrendującego (w moim przypadku był to stopień trzeci).
- (iv) Czwarty filtr odcina niepotrzebne tło multiplikatywne oraz resztkowe multiplikatywne zanieczyszczenia wspomnianego powyżej szeregu czasowego za pomocą funkcji $B(q)$ występującej w równaniu (6.13).
- (v) Piąty filtr odcina niepotrzebny wpływ monofraktalny za pomocą funkcji $Z_q^{lin}(s)$ występującej w dodatku **G** w drugiej równości w (G.4).
- (vi) Szósty filtr w postaci (referencyjnego) procesu Poissona pokazuje istnienie długofalowych oscylacji w funkcji autokorelacji w dyskretnym czasie, niemal identycznych do tych obecnych w analogicznej funkcji autokorelacji dla danych empirycznych (rysunek 8 w publikacji [16]). Mogę przypuszczać, że ich wpływ na proces realny jest nieistotny, ponieważ oscylacje nie zmieniają własności multifraktalnego procesu Poissona (jest on nadal monofraktalny). Muszę zaznaczyć, że nie zbadałem źródła tych oscylacji (np. skończona długość szeregu czasowego), a jedynie fakt, że ich wpływ na proces jest do zaniechania. Zatem, np. detrendowanie wielomianami wyższych rzędów nie jest już tutaj konieczne.

Warto jeszcze dodać, że sformułowane przeze mnie (w dodatku I) i udowodnione twierdzenie o standaryzacji wskazuje na równoważność zestandaryzowanego i niezestandaryzowanego widma osobliwości. Wielogąłęziowość tego widma może wynikać z samej struktury funkcji τ , a nie ze wspomnianych powyżej przyczyn.

Obecnie, wciąż nie są w pełni rozpoznane wszystkie możliwe źródła multifraktalności. Przedstawiony w rozprawie rozbudowany proces filtracji danych określa podejście bardziej odporne na różnorakie zanieczyszczenia i artefakty danych niż kanoniczna metoda MFDFA. Jednak nie jest to uniwersalny proces filtracji, zagadnienie stworzenia kompletnej filtracji w analizie multifraktalnej wciąż pozostaje otwarte. Tym bardziej, ciężko jednoznacznie rozpoznać przyczynę niemonotonicznej multifraktalności zaobserwowanej w danych empirycznych, nawet pomimo wyeliminowania wspomnianych powyżej potencjalnych źródeł pozornej multifraktalności. Jednak na pierwszy plan potencjalnych źródeł niemonotonicznej multifraktalności wysuwają się autokorelacje wyższych rzędów (czyli wielopunktowe) oraz ich relacje z fluktuacjami wyższych rzędów, czyli odpowiedniki twierdzeń fluktuacyjno-dysypacyjnych wyższych rzędów. Innym kierunkiem przyszłych badań może być poszukiwanie fizycznych modeli przejawiających niemonotoniczną multifraktalność. Podsumowując, formalizm rozwinięty w niniejszym rozdziale pozwolił mi wydobyć i opisać niemonotoniczną multifraktalność, podkreślając potencjalną wagę jaką może ona odegrać w badaniach układów złożonych.

Rozdział 7

Zakończenie

W niniejszym rozdziale skupiam się na wynikach przedstawionych w mojej rozprawie doktorskiej. Najpierw podsumowuję uzyskane rezultaty, a następnie dokonuję ich oceny i prezentuję wynikające z nich wnioski.

7.1 Podsumowanie uzyskanych wyników

We wstępie do mojej rozprawy przedstawiłem wprowadzenie do tematu pracy, jej główne cele i tezy oraz jej układ. Metodologiczna istota rozprawy oparta jest na porównaniu przewidywań modeli teoretycznych zaproponowanych w rozprawie z danymi empirycznymi. Dlatego w rozdziale 2 omówiłem dane empiryczne, z których korzystałem, czyli dane transakcyjne pochodzące z polskiej Giełdy Papierów Wartościowych. Na ich przykładzie przedstawiłem fakty stylizowane, a zwłaszcza własności różnych funkcji autokorelacji. Mianowicie, w danych empirycznych obserwujemy:

- długookresową autokorelację czasów międzytransakcyjnych,
- długookresową autokorelację modułów logarytmicznych zmian,
- istotną dla kilku początkowych kroków czasowych autokorelację logarytmicznych zmian cen.

W kolejnym rozdziale 3 zdefiniowałem proces błądzenia losowego w czasie ciągłym (ang. skrót CTRW) oraz omówiłem metody jego analizy. W szczególności porównałem formalizmy przelotów i spacerów Weierstrassa, gdzie część ważnych wyników pochodzi z publikacji [13]. Dodatkowo przedstawiłem motywację teoretyczną dla zbudowania formalizmu CTRW uwzględniającego zależności pomiędzy czasami wyczekiwania. Obecne najpopularniejsze metody modelowania zależności pomiędzy czasami międzyzdarzeniowymi w szeregach czasowych to procesy ACD (ang. *Autoregressive Conditional Duration*) i Hawkesa. Jednak ich formalizmy nie są przystosowane do bezpośredniego uwzględnienia wartości procesu i jego właściwości takich jak wariancja procesu czy autokorelacja zmian procesu. Z tego punktu widzenia znacznie lepszym formalizmem jest błądzenie losowe w czasie ciągłym. Jednak w tym przypadku napotykamy trudność związaną z koniecznością uwzględnienia skorelowanych czasów wyczekiwania. Uwzględnienie tego typu czasów wyczekiwania w formalizmie CTRW było jednym ze zrealizowanych celów teoretycznych mojej rozprawy.

Dotychczasowe wysiłki innych autorów w tym kierunku znajdowały się dopiero na etapie początkowym [79].

W rozdziale 4 dokonałem wprowadzenia do tematu modelowania danych finansowych za pomocą błędzenia losowego w czasie ciągłym. Oprócz tego przedstawiłem kluczową motywację dla zbudowania modelu CTRW z silnie skorelowanymi czasami wyczekiwania, bazującą na danych empirycznych a pochodzącą z publikacji [14]. Jej podstawę stanowią wyniki symulacji, które wykazały, że uwzględnienie jedynie zależności pomiędzy czasami międzytransakcyjnymi, może być już wystarczające do odtworzenia wartości wykładnika potęgowego zaniku funkcji autokorelacji absolutnych zmian logarytmicznych cen.

Kolejny, 5 rozdział zawiera wyprowadzenie właściwego formalizmu CTRW ze skorelowanymi czasami wyczekiwania. Formalizm ten jest sformułowany ogólnie, bez wprowadzenia konkretnych postaci rozkładów przeskoków, czasów wyczekiwania, jak też pamięci tkwiącej w szeregu czasów międzyzdarzeniowych. Bazując na wynikach empirycznych z rozdziału 4, skupiłem się w obliczeniach na przypadku pamięci długookresowej.

Najpierw rozpatrywałem tylko (teoretyczny) proces czasów wyczekiwania, dla którego siłę korelacji opisuje parametr $\rho > 2$, gdzie autokorelacja krokowa szeregu czasów wyczekiwania zanika potęgowo z wykładnikiem $\rho - 2$. Taki wynik otrzymałem też rozpatrując jedynie czasy pomiędzy zdarzeniami ekstremalnymi (popularnie zwanymi "czarnymi łabędziami"). Wskazuje to na kluczową rolę czasów międzyzdarzeniowych w procesie.

Następnie przeszedłem do właściwego procesu błędzenia losowego, który zdefiniowałem poprzez wyprowadzenie wzoru na jego (pełny czasoprzestrzenny) propagator. Ponadto, w granicy długich czasów wyznaczyłem podstawowe statystyki procesu, a w szczególności:

- wariancję procesu, która oprócz składnika liniowego posiada także składnik potęgowy proporcjonalny do $\langle \Delta x \rangle^2 t^{4-\rho}$. Zatem, dla procesów z dryfem oraz silną pamięcią między czasami międzyzdarzeniowymi, czyli dla $\langle \Delta x \rangle \neq 0$ oraz $2 < \rho < 3$, w procesie występuje superdyfuzja, dochodząca do dyfuzji balistycznej (dla ρ bliskiego 2). W pozostałych przypadkach wiodącym wyrazem jest wyraz liniowy w t .
- autokorelację zmian procesu zanikającą jak $\langle \Delta x \rangle^2 t^{2-\rho}$.

Rozpatrywany model przedstawiłem w publikacji [15].

Prezentację kluczowych wyników rozprawy kontynuowałem w rozdziale 6. Zawiera on pogłębioną analizę aktywności układu metodą multifraktalnej analizy zdetrendowanych fluktuacji (ang. skrót MFDFA). Następnie to kanoniczne podejście zmodyfikowałem w dwóch miejscach w opisany poniżej sposób.

- Odwrotność aktywności inwestorów zmierzyłem poprzez średnie lokalne czasy międzytransakcyjne – im dłuższy ten czas, tym mniejsza aktywność. Czasy te wyznaczałem kolejno dla każdego z niepokrywających się okien czasowych, których rozmiar jest zależny od rozpatrywanej skali. Dla tak zadanej miary zaobserwowałem skalowanie się funkcji fluktuacyjnej (rysunek 6.2).
- Dane empirycznie (tutaj odpowiednio zagregowane czasy międzytransakcyjne) przejawiają wyraźne własności multifraktalne. Zbadałem je korzystając z narzędzi takich jak uogólniony wykładnik Hursta $h(q)$, uogólniony wykładnik skalowania Rényi'ego $\tau(q)$ jak też uogólniony wykładnik Höldera $\alpha(q)$. Zaobserwowałem niemonotoniczną zależność między innymi empirycznego wykładnika Höldera od q . Aby wyznaczyć jego spektrum zastosowałem transformatę Legendre-Fenchela (L-F), dzięki czemu otrzymałem wielogałęziowe spektrum $f(\alpha)$. Ten nowy wynik wymagał dalszej analizy. Poprzez wyznaczenie ciepła właściwego układu, byłem w stanie każdej gałęzi spektrum przypisać fazę termicznie stabilną bądź niestabilną. Dodatkowo określiłem przemiany pomiędzy fazami jako drugiego rodzaju. Trzeba powiedzieć, że niemonotoniczne zachowania wykładników Hursta i Höldera nie mają swojego źródła w autokorelacjach krótkookresowych.

Metoda i metodologia analizy multifraktalnej prezentowane w tej części rozprawy zostały opublikowane [16].

7.2 Ocena kluczowych wyników

Autorski model CTRW przedstawiony w rozdziale 5 jest wprowadzeniem do nowej rodziny błędzeń losowych w czasie ciągłym. Warianty modelu z czasami wyczekiwania o wartościach powtarzających się w sekwencjach losowej długości pozwalają odtworzyć różne zależności występujące w szeregu czasów międzyzdarzeniowych. Model ten posiada następujące zalety.

- W definicji modelu podstawowe rozkłady czasów wyczekiwania $\psi(\Delta t)$ oraz skoków $h(\Delta x)$ są niezależne od siebie i mogą być zadawane osobno lub osobno wyznaczone z danych empirycznych. Ułatwia to znacząco porównywanie przewidywań modelu z danymi empirycznymi.
- W modelu możemy dowolnie zadać rozkład $\omega(\nu)$ liczby powtórzeń ν danej wartości czasu wyczekiwania. Możemy przez to modelować zależności zarówno krótkozasięgowe (gdy $\omega(\nu)$ jest rozkładem geometrycznym), jak i dalekozasięgowe (gdy $\omega(\nu)$ jest rozkładem potęgowym). Możliwość ta pokazuje, że wprowadzona rodzina błędzeń losowych jest szeroka i może być zastosowana do bardzo różnych danych empirycznych. W niniejszej rozprawie skupiłem się szczególnie

na przykładzie dalekozasięgowych zależności w szeregu czasów międzyzdarzeniowych. W takim przypadku czasy wyczekiwania posiadają potęgowo zanikającą autokorelację krokową z dowolnym wykładnikiem. Dzięki temu przewidywania modelu można łatwo porównywać z dowolnymi danymi z potęgowo zanikającymi pamięciami pomiędzy czasami międzyzdarzeniowymi.

- Kolejną, szczególnie istotną zaletą modelu jest jego rozwiązywalność analityczna. W rozprawie znajduje analityczną postać propagatora procesu oraz podaje zachowanie asymptotyczne jego charakterystyk statystycznych w granicy długich czasów, co dodatkowo wyróżnia zaproponowany model.
- Dzięki wynikom analitycznym mogłem w prosty sposób zbadać bezpośredni wpływ pamięci występującej w szeregu czasów wyczekiwania na momenty procesu i autokorelację prędkości. W szczególności uzyskałem ciekawy wynik dla autokorelacji prędkości. Dla modelu bez dryfu autokorelacja skoków jest zerowa, natomiast autokorelacja modułów zmian zanika potęgowo.
- Powyższą własność modelu skonfrontowałem bezpośrednio z własnościami danych finansowych. Zgodnie z faktami stylizowanymi przedstawionymi w rozdziale 2.3, nie powinniśmy obserwować autokorelacji logarytmicznych zmian ceny, natomiast powinniśmy obserwować efekt klastrowania zmienności, reprezentowany przez potęgowo zanikającą autokorelację modułów logarytmicznych zmian cen. Efekt ten jest dobrze odtwarzany przez model.
- Dodatkowo w modelu autokorelacja szeregu czasów wyczekiwania również zanika potęgowo, z tym samym wykładnikiem co autokorelacja modułów zmian. Zostało to zweryfikowane w oparciu o dane empiryczne (wyniki przedstawiłem w tabeli 5.1). Zgodność wyników jasno pokazuje, że zależności pomiędzy czasami wyczekiwania są kluczowym składnikiem odpowiadającym za efekt klastrowania zmienności, a dokładniej za wykładnik w powolnym, potęgowym zaniku autokorelacji modułów logarytmicznych zmian cen.

Zaproponowany w pracy model nie może być traktowany bezpośrednio jako model dynamiki ceny. Nie odtwarza on (bądź jego możliwości w tym zakresie nie zostały przeanalizowane) innych faktów stylizowanych, jak korelacja w szeregu modułów zmian, czy multifraktalność procesu. Niemniej jednak, zbudowany model spełnił zasadnicze wymagania. Należy go postrzegać jako ogólny model CTRW, dzięki któremu możemy dokładniej zrozumieć bezpośredni wpływ skorelowanych czasów międzyzdarzeniowych na statystyki procesu. Dodatkowo, przedstawione wnioski można rozciągnąć na inne metody generowania skorelowanego szeregu czasów wyczekiwania. Stwierdziłem to dzięki użyciu symulacyjnej analizy sytuacji, gdy pamięć w szeregu czasów wyczekiwania kreowana jest, na przykład, metodą filtrowania z użyciem transformaty Fouriera. Uzyskane w ten

sposób wykładniki autokorelacji szeregu czasów międzyzdarzeniowych i modułów zmian okazały się takie same jak odpowiadające im w przypadku modelu bazowego.

W kontekście danych finansowych pokazałem, że zjawisko klastrowania aktywności przekłada się bezpośrednio na efekt klastrowania zmienności. Zgodnie z modelem, potęgowo zanikające autokorelacje w obydwu typach charakterystyk powinny zanikać z tym samym wykładnikiem. Jest to ważny wynik, dzięki któremu można lepiej zrozumieć istotę tych efektów. Najczęściej obecnie stosowane modele dotyczące klastrowania zmienności operują na szeregach czasowych ze stałym krokiem czasowym i skupiają się na dokładnym zamodelowaniu zależności pomiędzy modułami zmian procesu bądź ich wariancjami. W niniejszej rozprawie pokazałem, że kluczowym elementem są tutaj nie absolutne wartości skoków, a czasy pomiędzy nimi. Otwiera to drogę do dalszych badań w tej tematyce, które być może pozwolą na jeszcze lepsze jej zrozumienie oraz stworzenie bardziej precyzyjnych modeli zjawiska klastrowania zmienności.

Przedstawione powyżej wyniki pozwoliły mi na kontynuowanie analizy aktywności układów, a w szczególności analizy czasów międzyzdarzeniowych. W tym celu w rozdziale 6 stworzyłem modyfikację kanonicznej metody MFDFA, dostosowaną do operowania na czasach międzyzdarzeniowych. Otrzymane wyniki oceniam poniżej.

- Zaproponowane przeze mnie nowatorskie podejście do używania średnich lokalnych czasów międzyzdarzeniowych jest rozwinięciem obecnie istniejących metod. Metodologia jest ogólna i może być zastosowana do danych empirycznych różnego typu (tzn. pochodzących również ze źródeł innych niż rynki finansowe).
- Zastosowanie w tym kontekście transformaty Legendre-Fenchela do otrzymania wielogałęziowego spektrum/widma wykładnika Höldera $f(\alpha)$ jest moim oryginalnym wkładem w tematykę analizy multifraktalnej. Takie podejście nie było wcześniej w ten sposób rozważane w kontekście danych empirycznych. Stąd, kolejne otrzymane rezultaty są także nowymi.
- Analizowałem w dalszym ciągu otrzymane powyżej wielogałęziowe widmo $f(\alpha)$. Poprzez wyznaczenie (analogonu) ciepła właściwego układu, każdą gałąź spektrum zbadałem pod względem stabilności termicznej. Przykładowo główna gałąź spektrum jest w fazie stabilnej. Zachowanie układu przeanalizowałem też w brzegowych punktach gałęzi, gdzie zachodzi przemiana pomiędzy fazami stabilną i niestabilną. Jest to przemiana ciągła (drugiego rzędu).
- Oprócz podstawy teoretycznej, wyniki tej części rozprawy w znacznej mierze opierają się na konkretnych rezultatach analizy przeprowadzonej na danych empirycznych. Niezwykle ważne są tutaj uzyskane

wyniki dla danych finansowych. Zaobserwowanie niemonotonicznego przebiegu wykładnika Höldera dla danych empirycznych jest rezultatem jedynie pobieżnie sygnalizowanym w dotychczasowej literaturze przedmiotu. Jak pokazuję w tej rozprawie, jednym z możliwych rozwinięć jest dalsze badanie lokalnych średnich czasów międzytransakcyjnych oraz implikacji wynikających z faktu wystąpienia niemonotonicznego wykładnika Höldera. W kontekście danych empirycznych jest to kluczowe zagadnienie, gdyż nie jest wywołane krótkozasięgowymi/krótkookresowymi autokorelacjami. Kontynuując wyniki z pierwszej części rozprawy, aktywność układu wpływa bezpośrednio na wiele z jego charakterystyk. Zależności pomiędzy okresami międzytransakcyjnymi mogą być więc kluczowe w zrozumieniu i lepszym wytłumaczeniu zjawiska klastrowania zmienności. Pokazuje to, że opisanie i zamodelowanie procesów rządzących czasami międzyzdarzeniowymi w układzie pozwoli na lepsze zrozumienie nie tylko samej aktywności układu, ale także jego ogólnego zachowania oraz innych obserwowanych właściwości.

- Upewniłem się, że wyniki otrzymane przeze mnie na bazie danych empirycznych nie zawierają multifraktalności pozornej, która mogłaby wynikać z niedoskonałości procedury, istnienia autokorelacji krótkozasięgowych bądź skończonej liczebności danych (ang. *finite-size effect*). Wszystkie wielkości wyznaczone były z odpowiadającymi im niepewnościami. Dla porównania moją procedurę przykładowo przetestowałem w drodze symulacji monofraktalnego procesu Poissona. Procedura nie wyprodukowała żadnych artefaktów typu multifraktalnego. Testy potwierdziły, że otrzymane wyniki są poprawne i istotne statystycznie.

7.3 Ogólne wnioski

Podsumowując ogólnie ocenę wyników mojej rozprawy doktorskiej mogę stwierdzić, że spełnione zostały wszystkie jej cele oraz udowodnione postawione tezy. W niniejszej pracy rozwinąłem zarówno metodologię i metody modelowania, jak i analizy stochastycznych sprzężeń dynamicznych występujących w układach złożonych. Wprowadzone podejścia zastosowałem do opisu empirycznych danych finansowych uzyskując wymagane zgodności pomiędzy przewidywaniami teoretycznymi a wspomnianymi danymi empirycznymi. Po pierwsze, stworzyłem formalizm wprowadzający nową rodzinę błędów losowych w czasie ciągłym, która umożliwia modelowanie skorelowanych czasów wyczekiwania. Po drugie, rozwinąłem metodologię analizy multifraktalnej aktywności układów. Po trzecie sformułowałem asymptotyczną (dyfuzyjną) klasyfikację błędów losowych w tym anomalnych, w oparciu o zależne od czasu błędzenie Weierstrassa.

Pomimo, że moja rozprawa odpowiadała na postawiane pytania, to warto byłoby badania kontynuować. Na przykład, metodologia CTRW otwiera możliwość odpowiedzi na pytanie o wpływ skorelowania czasów

wyczekiwanie (międzyzdarzeniowych) na inne statystyki procesu, a w tym na przykład na wyższe momenty. Ponadto, można zastosować formalizm do zbadania wpływu różnego rodzaju pamięci zawartej w szeregach czasów międzyzdarzeniowych, jak też uzyskać wyniki dla konkretnych rozkładów skoków i czasów pomiędzy skokami. W kontekście danych finansowych podejście zaproponowane w rozprawie można traktować jako inspirujący punkt wyjścia do zbudowania teorii opisującej wszystkie fakty stylizowane, czyli teorii dynamiki cen na giełdzie.

Przedstawione w rozprawie rozszerzenie analizy multifraktalnej można wykorzystać do pogłębionego badania przemian fazowych na rynkach finansowych, zwłaszcza w kontekście krachów rynkowych i recesji. Na przykład, zbadać reakcje poszczególnych gałęzi widma wymiarów $f(\alpha)$ na takie sytuacje. Pozwoliłoby to nie tylko lepiej zrozumieć reguły dynamiki rynków finansowych, lecz także mogłoby mieć praktyczne przełożenie na zarządzanie ryzykiem rynkowym. Jak wiadomo, kanoniczna analiza multifraktalna jest także wykorzystywana w innych obszarach nauki. Ciekawe mogłoby być użycie metodologii zaproponowanej w niniejszej rozprawie do subtelniejszej analizy sygnałów biomedycznych.

Dodatek A

Opis danych empirycznych

Dane dotyczące cen transakcji na akcjach na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie pobieram ze strony Domu Maklerskiego Banku Ochrony Środowiska [21]. Są to sekundowe świece *OHLCV* (ang. *Open, High, Low, Close, Volume*), czyli zagregowane dane transakcyjne, zawierające informacje o cenach pierwszej, najwyższej, najniższej i ostatniej w danej sekundzie oraz łączny wolumen transakcji (liczba akcji). Dane zapisywane są tylko dla sekund, w których wystąpiła co najmniej jedna transakcja. Używam danych z sesji ciągłej (dokładniejszy opis w rozdziale 2.1) od 15 kwietnia 2013 roku, kiedy była zmiana harmonogramu sesji, do 15 kwietnia 2020 roku. Poniżej w tabeli A.1 przedstawionych jest pierwszych 10 wierszy dla spółki PKNORLEN z dnia 2013-04-15.

Czas	<i>Open</i>	<i>High</i>	<i>Low</i>	<i>Close</i>	<i>Volume</i>
09:00:01	51.30	51.30	51.30	51.30	1642
09:00:35	51.00	51.00	51.00	51.00	461
09:00:36	51.00	51.00	51.00	51.00	16
09:00:44	51.00	51.00	51.00	51.00	1000
09:00:55	51.00	51.00	51.00	51.00	398
09:01:20	51.10	51.10	51.10	51.10	11
09:01:25	51.10	51.10	51.10	51.10	1
09:02:38	51.01	51.01	51.01	51.01	5
09:03:09	51.10	51.10	51.10	51.10	1199
09:03:20	51.20	51.20	51.20	51.20	11

Tabela A.1: Tabela przedstawiająca 10 pierwszych sekundo-
wych świeczek *OHLCV* dla spółki PKNORLEN z dnia 15 kwiet-
nia 2013. Dokładny opis kolumn znajduje się w tekście.

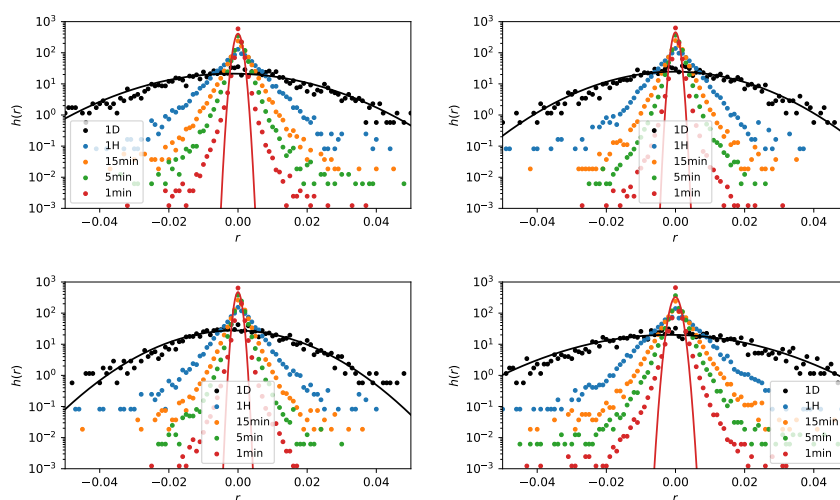
W powyższych danych widać, że w wielu sekundach nie obserwujemy transakcji. Średni okres między transakcjami dla PKNORLEN dla całych danych to około 20 sekund. Dodatkowo w ponad 80% świeczek wszystkie ceny *OHLC* są sobie równe. Rzadkie transakcje i te same ceny pozwalają sugerować, że te świece opisują pojedyncze transakcje. Dodatkowo, pojedyncze zlecenie może technicznie zostać zrealizowane jako kilka transakcji. Ceny tych transakcji powinny być monotoniczne. Dla rozważanej spółki jedynie niecałe 3.6% świeczek nie spełnia tej zależności. Pozwala to uznać, że używanie ostatnich cen z sekundowych świeczek jest wystarczającym

przybliżeniem niezagregowanych danych transakcyjnych dla polskiej giełdy w rozważanym okresie, którego używam w mojej rozprawie.

Dodatek B

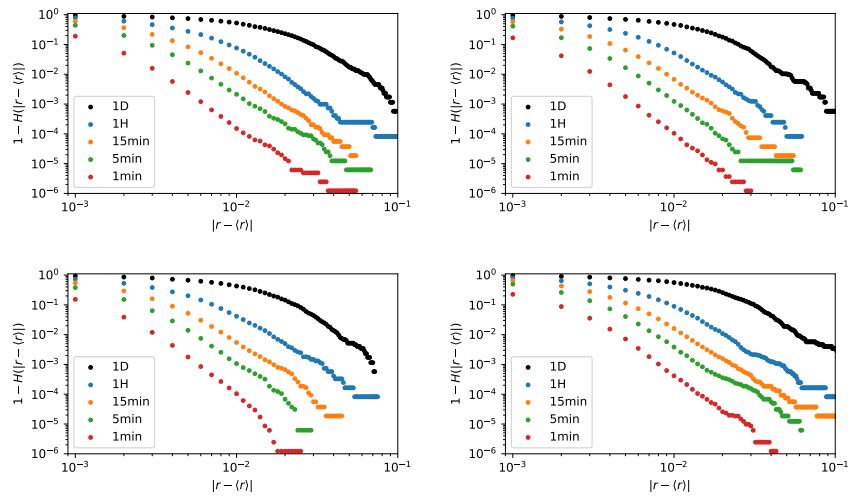
Empiryczne przykłady faktów stylizowanych

W tym dodatku przedstawiam wyniki analizy danych empirycznych analogiczne jak w rozdziałach 2.3 oraz 5.4 dla kolejnych najbardziej płynnych spółek z GPW. Wszystkie Wykresy w tym dodatku odpowiadają kolejno spółkom: górny wiersz po lewej KGHM i po prawej PKOBP, dolny wiersz po lewej PZU i po prawej PGE. Wyniki pokazują uniwersalność faktów stylizowanych, jak również metod analizy zaproponowanych w tej rozprawie.

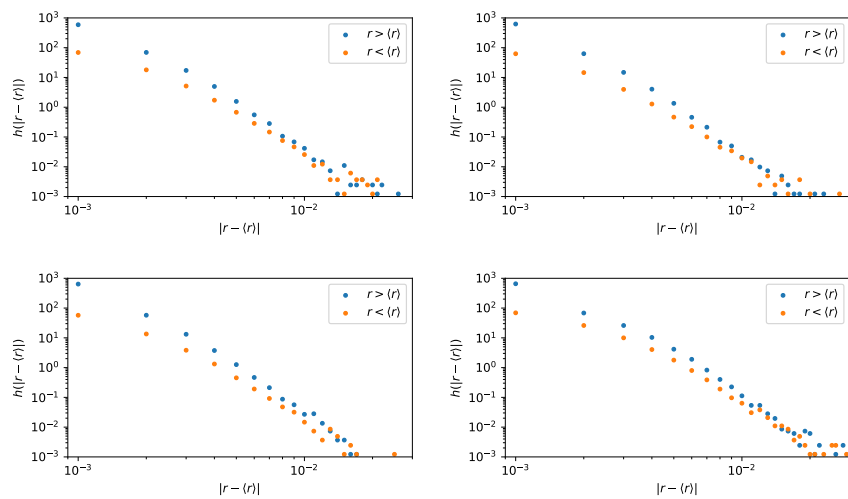


Rysunek B.1: Wszystkie wykresy w tym dodatku odpowiadają kolejno spółkom: górny wiersz po lewej KGHM i po prawej PKOBP, dolny wiersz po lewej PZU po prawej PGE. Rysunek przedstawia empiryczne rozkłady $h(r_{\Delta t})$ analogiczne do rys.

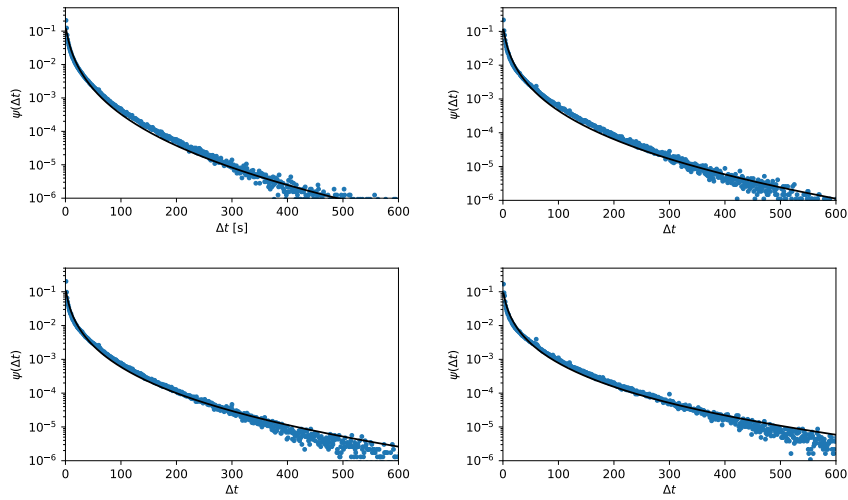
2.4.



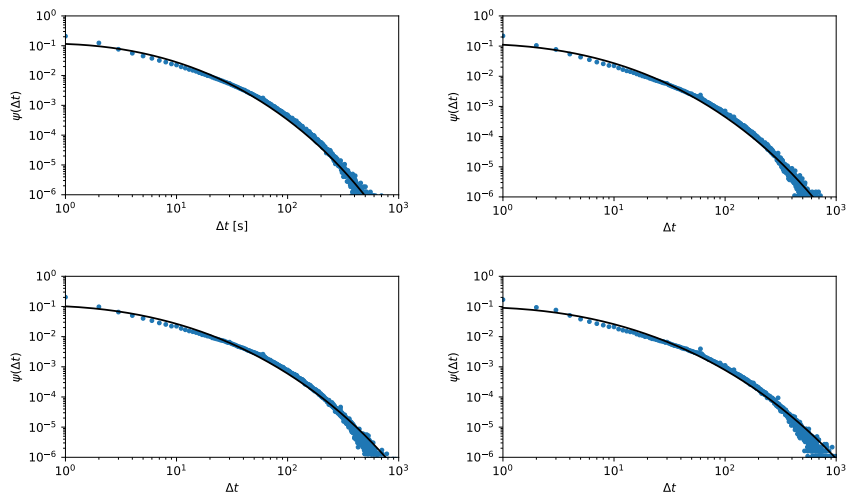
Rysunek B.2: Wykresy dopełnień empirycznych dystrybuant modułów odchyień od średniej $1 - H(r - \langle r \rangle)$ analogiczne do rys. 2.5.



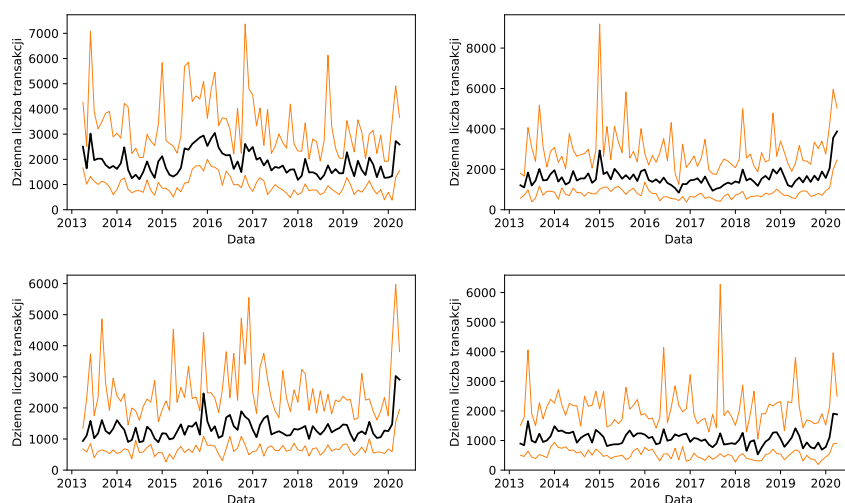
Rysunek B.3: Wykresy empirycznych rozkładów modułów odchyień logarytmicznych stóp zwrotu od średniej dla jednoczesnego kroku czasowego $h(r - \langle r \rangle)$, analogiczne do rys. 2.6.



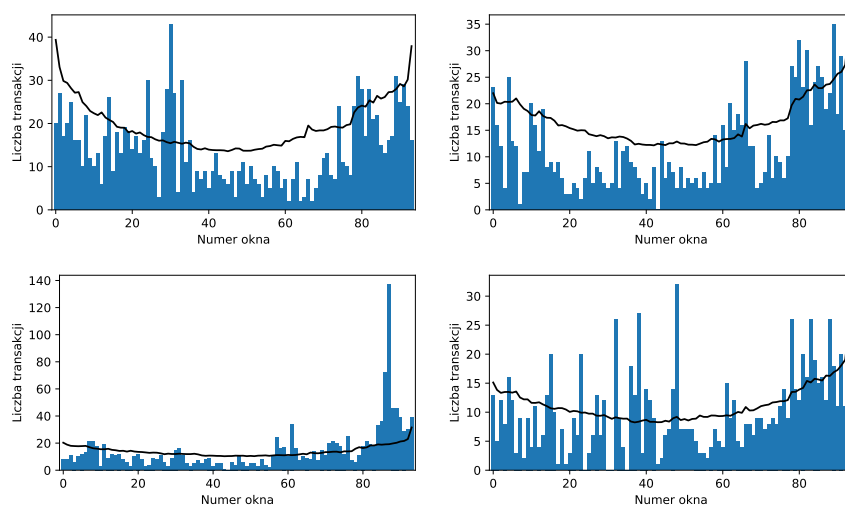
Rysunek B.4: Empiryczne rozkłady czasów międzytransakcyjnych $\psi(\Delta t)$ w skali półlogarytmicznej wraz z dopasowanymi rozkładami wykładniczego Weibulla, analogiczne do rys. 2.7.



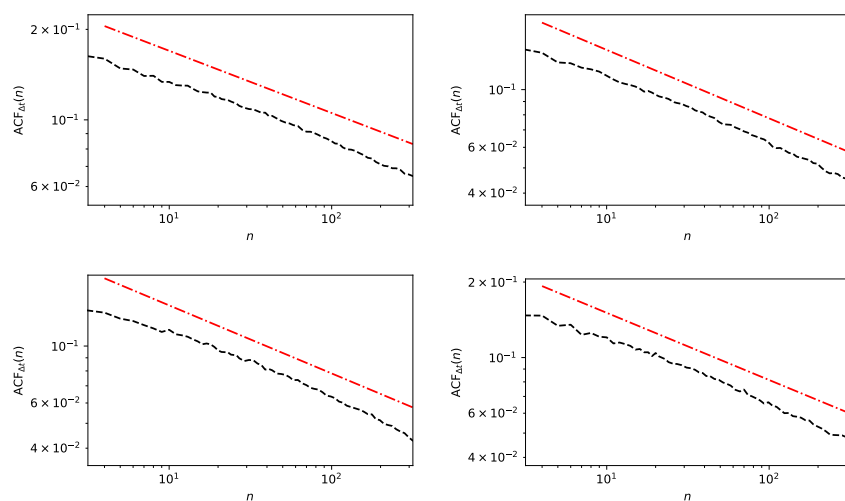
Rysunek B.5: Empiryczne rozkłady czasów międzytransakcyjnych $\psi(\Delta t)$ w skali logarytmicznej wraz z dopasowanymi rozkładami wykładniczego Weibulla, analogiczne do rys. 2.8.



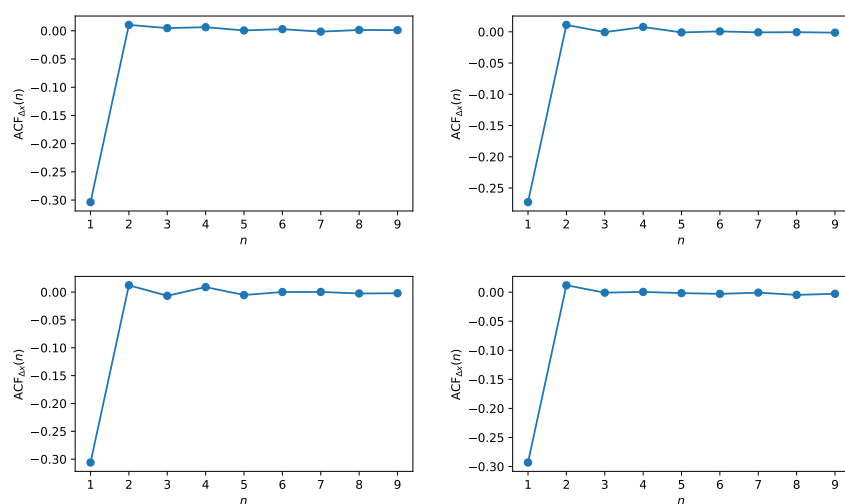
Rysunek B.6: Wykresy średniej, minimalnej oraz maksymalnej dziennej liczby transakcji dla każdego z rozpatrywanych miesięcy, analogiczne do rys. 2.11.



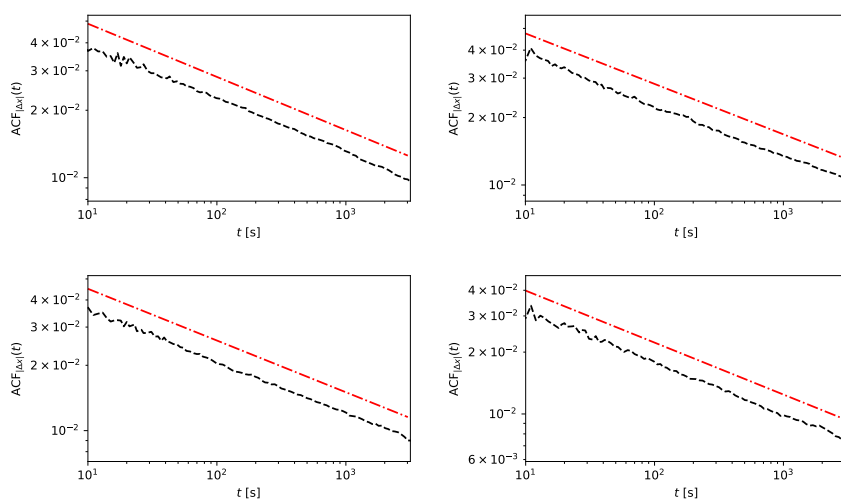
Rysunek B.7: Wykresy przedstawiające średnią liczbę transakcji w poszczególnych okienkach czasowych oraz ich przykładową jednorazową realizację, analogiczne do rys. 2.9.



Rysunek B.8: Wykresy krokowych autokorelacji szeregu czasów wyczekiwania pomiędzy zmianami ceny w skali logarytmicznej (czarne) wraz z potęgowymi dopasowaniami (czerwone). Tak wyznaczone wykładniki użyte są w tabeli 5.1.



Rysunek B.9: Wykresy empirycznych autokorelacji krokowych szeregu logarytmicznych zmian ceny, analogiczne do rys. 2.12.



Rysunek B.10: Wykresy czasowych autokorelacji modułów logarytmicznych zmian cen w skali logarytmicznej (czarne) wraz z potęgowymi dopasowaniami (czerwone). Tak wyznaczone wykładniki użyte są w tabeli 5.1.

Dodatek C

Momenty procesu spacerów i przelotów Weierstrassa

Zgodnie ze wzorami (3.20), do wyznaczenia momentów można posłużyć się propagatorami w przestrzeni Fouriera-Laplace'a i ich odpowiednimi pochodnymi w punkcie $k = 0$. Z powodu symetrii przestrzennej rozważanych procesów (tzn. brak dryfu), omawiam jedynie parzyste momenty przestrzenne. Co więcej, można wykazać, że wiodącym składnikiem propagatora, z którego wyznaczamy wartości oraz przedziały zbieżności momentów procesów, są składowe $\tilde{\Xi}^{W,F}(k, s)$. Dla spacerów otrzymuję:

$$\begin{aligned} \frac{d^{2m}}{dk^{2m}} \tilde{\Xi}^W(k, s) \Big|_{k=0} &= (-1)^m 2m! (b_0)^{2m} \tau_0 \left(1 - \frac{\tau}{N}\right) \\ &\times \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\tau^2 b^{2m}}{N}\right)^j \left[\tilde{\Theta}_j^W(k=0, s)\right]^{2m+1}, \end{aligned} \quad (C.1)$$

gdzie $\tilde{\Theta}^W(k=0, s) = \frac{1}{s\tau_0\tau^j+1}$ na podstawie czwartego równania w (3.36). Stąd:

$$\begin{aligned} \frac{d^{2m}}{dk^{2m}} \tilde{\Xi}^W(k, s) \Big|_{k=0} &= (-1)^m 2m! (b_0)^{2m} \tau_0 \left(1 - \frac{\tau}{N}\right) \\ &\times \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\tau^2 b^{2m}}{N}\right)^j \left(\frac{1}{s\tau_0\tau^j+1}\right)^{2m+1}. \end{aligned} \quad (C.2)$$

Natomiast dla przelotów uzyskujemy prostszą postać:

$$\begin{aligned} \frac{d^{2m}}{dk^{2m}} \tilde{\Xi}^F(k, s) \Big|_{k=0} &= \tau_0 \left(1 - \frac{\tau}{N}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\tau^2 b^{2m}}{N}\right)^j \tilde{\Theta}_j^F(k=0, s) \\ &= \tau_0 \left(1 - \frac{\tau}{N}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\tau^2 b^{2m}}{N}\right)^j \frac{1}{s\tau_0\tau^j+1}, \end{aligned} \quad (C.3)$$

przy czym skorzystaliśmy tutaj z równości $\tilde{\Theta}^F(k=0, s) = \tilde{\Theta}^W(k=0, s)$, która zachodzi na podstawie czwartego równania w (3.36) i (3.37).

Właśnie ta różnica w wykładniku potęgi w ostatnich czynnikach obu

wzorów (C.2) i (C.3) jest matematyczną przyczyną istotnych różnic w rozmiarach przedziałach zbieżności przestrzennych momentów procesu spacerów i przelotów.

Na przykładzie spacerów, kontynuuję obliczenia poprzez zastąpienie wyrazu $\left(\frac{1}{s\tau_0\tau^j+1}\right)^{2m+1}$ w równaniu (C.2) odwrotną transformatą Mellina. Stąd otrzymuję:

$$\begin{aligned} \frac{d^{2m}}{dk^{2m}} \tilde{\Xi}^W(k, s) \Big|_{k=0} &= (-1)^m 2m! (b_0)^{2m} \tau_0 \left(1 - \frac{\tau}{N}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\tau^2 b^{2m}}{N}\right)^j \\ &\times \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dz \tau^{-zj} \frac{\pi}{\sin(\pi z)} (s\tau_0)^{-z} \binom{z-1}{2m}, \quad (\text{C.4}) \end{aligned}$$

przy czym ostatni czynnik stanowi uogólniony czynnik binomialny (Newtona) oraz warunek zbieżności całki ma postać $0 < c = \Re(z) < 2m + 1$. W ramach tego warunku, kolejność sumowania i całkowania może być zamieniona o ile (dodatkowo) operacja sumowania jest zbieżna. Po zamianie, otrzymujemy szereg geometryczny składający się z wyrazów $\left(\frac{\tau^{2-z} b^{2m}}{N}\right)^j, j = 0, 1, 2, \dots$, który jest zbieżny jeżeli $\frac{\tau^{2-c} b^{2m}}{N} < 1 \iff \frac{1}{\beta} < \frac{1}{2m} + \frac{c-2}{2m} \frac{1}{\alpha}$. Używając górnej granicy wartości $c = 2m + 1$ otrzymamy ogólny wzór na zbieżność powyższego szeregu:

$$\frac{1}{\beta} < \frac{1}{2m} + \frac{2m-1}{2m} \frac{1}{\alpha}. \quad (\text{C.5})$$

Dalej, dopuszczając warunki zbieżności otrzymuję prostsze wyrażenie:

$$\begin{aligned} \frac{d^{2m}}{dk^{2m}} \tilde{\Xi}^W(k, s) \Big|_{k=0} &= (-1)^m 2m! (b_0)^{2m} \tau_0 \left(1 - \frac{\tau}{N}\right) \\ &\times \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dz \frac{1}{1 - \frac{b^{2m}}{\tau^{z-2} N}} \frac{\pi}{\sin(\pi z)} (s\tau_0)^{-z} \binom{z-1}{2m}. \quad (\text{C.6}) \end{aligned}$$

Powyższą całkę można już wykonać standardową metodę residuów (bardziej szczegółowy rachunek został przeprowadzony w pracy [13]) poprzez wybranie odpowiedniego prostokątnego konturu obejmującego bieguny pochodzące z wyrażenia $\frac{1}{\sin(\pi z)} : z_0(n) = 0, -1, -2, \dots$, oraz $\frac{1}{1 - b^{2m} \tau^{2-z} N^{-1}} : z_1(n) = 2 + \alpha \left(\frac{2m}{\beta} - 1\right) \pm 2\pi i \frac{n}{\log(\tau)}, n = 0, 1, 2, \dots$. W granicy długich czasów, czyli dla $|s| \ll 1$, istotny wkład dają jedynie bieguny $z_0(0) = 0$ oraz $z_1 = z_1(0) = 2 + \alpha \left(\frac{2m}{\beta} - 1\right)$. Stąd, ostateczny wynik

przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \frac{d^{2m}}{dk^{2m}} \tilde{\Xi}^W(k, s) \Big|_{k=0} &= (-1)^m 2m! (b_0)^{2m} \tau_0 \left(1 - \frac{\tau}{N}\right) \\ &\times \left[\frac{1}{1 - \frac{b^{2m} \tau^2}{N}} + \frac{1}{N} \frac{\pi \alpha}{\sin(\pi z_1)} (s \tau_0)^{-z_1} \binom{z_1 - 1}{2m} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Dla procesu przelotów można przeprowadzić analogiczną procedurę, jednak z powodu różnic pomiędzy wzorami (C.2) i (C.3) we wzorze na zbieżność szeregu wystarczy użyć $c = 1$. Dlatego, ograniczenie analogiczne do warunku (C.5) wygląda następująco:

$$\frac{1}{\beta} < \frac{1}{2m} - \frac{1}{2m} \frac{1}{\alpha}. \quad (\text{C.8})$$

Dodatek D

Autokowariancja procesu czasów

W tym dodatku znajdują się bardziej szczegółowe obliczenia dotyczące wyznaczenia autokowariancji czasów pomiędzy zdarzeniami ekstremalnymi $\text{COV}_{\Delta T}(n)$ dla $n = 0$, $n = 1$ oraz pozostałych $n \geq 2$.

W szczególności dla $n = 0$ mogę wzór (5.13) rozpisać jako wzór (5.12) gdzie K pochodzi z rozkładu ujemnego dwumianowego $\text{NB}(K; 1)$:

$$\begin{aligned}
 \text{COV}_{\Delta T}(0) &= \sum_{K=1}^{\infty} \text{NB}(K; 1) \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \text{COV}_{\Delta t}(|i-j|) \\
 &= \sum_{K=1}^{\infty} \text{NB}(K; 1) \left[\sum_{k=0}^{K-1} 2(K-k) \text{COV}_{\Delta t}(k) \right] - K \text{COV}_{\Delta t}(0) \\
 &= \frac{1}{\langle N \rangle} \sum_{j=0}^{\infty} \text{COV}_{\Delta t}(j) \sum_{i=0}^{\infty} i \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{i+j-1} \\
 &= \frac{1}{\langle N \rangle} \sum_{j=0}^{\infty} \text{COV}_{\Delta t}(j) \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{j-1} \sum_{i=0}^{\infty} i \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle} \right)^i \quad (\text{D.1}) \\
 &= \frac{1}{\langle N \rangle} \sum_{j=0}^{\infty} \text{COV}_{\Delta t}(j) \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{j-1} \langle N \rangle (\langle N \rangle - 1) \\
 &= (\langle N \rangle - 1) \sum_{j=0}^{\infty} \text{COV}_{\Delta t}(j) \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{j-1} \\
 &= \langle N \rangle \sum_{j=0}^{\infty} \text{COV}_{\Delta t}(j) \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle} \right)^j.
 \end{aligned}$$

W podobny sposób rozważam wzór (5.15) dla sąsiednich czasów wyczekiwania:

$$\begin{aligned}
\text{COV}_{\Delta T}(1) &= \sum_{K_1=1}^{\infty} \sum_{K_2=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{K_1} \sum_{j=1}^{K_2} \text{NB}(K_1;1) \text{NB}(K_2;1) \text{COV}_{\Delta t}(j+i-1) \\
&= \sum_{K_1=1}^{\infty} \sum_{K_2=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{K_1} \sum_{j=1}^{K_2} \left(\frac{1}{\langle N \rangle} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{K_1+K_2-2} \text{COV}_{\Delta t}(j+i-1) \\
&\quad \left\{ \Delta_1 = K_1 - i, \quad \Delta_2 = K_2 - j \right\} \\
&= \sum_{\Delta_1=0}^{\infty} \sum_{\Delta_2=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\langle N \rangle} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{\Delta_1+\Delta_2+i+j-2} \text{COV}_{\Delta t}(j+i-1) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{i+j-2} \text{COV}_{\Delta t}(j+i-1) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{m-1} m \text{COV}_{\Delta t}(m).
\end{aligned} \tag{D.2}$$

Następnie przechodzę do pozostałych $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\text{COV}_{\Delta T}(n) &= \sum_{W=n-1}^{\infty} \text{NB}(W; n-1) \sum_{K_1=1}^{\infty} \text{NB}(K_1; 1) \sum_{K_2=1}^{\infty} \text{NB}(K_2; 1) \text{COV}(n) \Big|_{K_1, K_2, W_{n-1}} \\
&= \sum_{W=n-1}^{\infty} \sum_{K_1=1}^{\infty} \sum_{K_2=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{K_1} \sum_{j=1}^{K_2} \text{NB}(W; n-1) \text{NB}(K_1; 1) \text{NB}(K_2; 1) \text{COV}_{\Delta t}(j+i+W-1) \\
&= \sum_{W=n-1}^{\infty} \sum_{K_1=1}^{\infty} \sum_{K_2=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{K_1} \sum_{j=1}^{K_2} \\
&\quad \binom{W-1}{n-2} \left(\frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{W+K_1+K_2-n-1} \text{COV}_{\Delta t}(j+i+W-1) \\
&\quad \left\{ \Delta_1 = K_1 - i, \quad \Delta_2 = K_2 - j \right\} \\
&= \sum_{W=n-1}^{\infty} \sum_{\Delta_1=0}^{\infty} \sum_{\Delta_2=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \\
&\quad \binom{W-1}{n-2} \left(\frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{W+\Delta_1+\Delta_2+i+j-n-1} \text{COV}_{\Delta t}(j+i+W-1) \\
&= \sum_{W=n-1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \binom{W-1}{n-2} \left(\frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{W+i+j-n-1} \text{COV}_{\Delta t}(j+i+W-1) \\
&= \sum_{W=n-1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \binom{W-1}{n-2} \left(\frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{W+m-n} m \text{COV}_{\Delta t}(m+W) \\
&= \sum_{W=n-1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(W-1)!}{(n-2)!(W-n+1)!} \left(\frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{W+m-n} m \text{COV}_{\Delta t}(m+W)
\end{aligned} \tag{D.3}$$

Niech $w = W - n + 1$:

$$\begin{aligned}
&\text{COV}_{\Delta T}(n) \\
&= \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(w+n-2)!}{(n-2)!w!} \left(\frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{w+m-1} m \text{COV}_{\Delta t}(m+w+n-1) \\
&= \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(w+n-2)!}{(n-2)!w!} \left(\frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle} \right)^{w+m} (m+1) \text{COV}_{\Delta t}(m+w+n)
\end{aligned} \tag{D.4}$$

Niech $x = w + m$ oraz $y = w - m$:

$$\begin{aligned}
& \text{COV}_{\Delta T}(n) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{\substack{y=-x \\ \text{co drugi}}}^x \frac{\left(\frac{x+y}{2} + n - 2\right)!}{(n-2)! \frac{x+y}{2}!} \left(\frac{1}{\langle N \rangle}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle}\right)^x \left(\frac{x-y}{2} + 1\right) \text{COV}_{\Delta t}(x+n) \\
&= \frac{1}{(n-2)!} \left(\frac{1}{\langle N \rangle}\right)^{n-1} \sum_{x=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle}\right)^x \text{COV}_{\Delta t}(x+n) \\
&\quad \times \sum_{\substack{y=-x \\ \text{co drugi}}}^x \frac{\left(\frac{x+y}{2} + n - 2\right)!}{\frac{x+y}{2}!} \left(\frac{x-y}{2} + 1\right) \\
&= \frac{1}{(n-2)!} \left(\frac{1}{\langle N \rangle}\right)^{n-1} \sum_{x=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle}\right)^x \text{COV}_{\Delta t}(x+n) \sum_{q=0}^x \frac{(q+n-2)!}{q!} (x-q+1) \\
&= \frac{1}{(n-2)!} \left(\frac{1}{\langle N \rangle}\right)^{n-1} \sum_{x=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle}\right)^x \text{COV}_{\Delta t}(x+n) \frac{(x+n)(x+1)}{n(n-1)} \frac{(x+n-1)!}{(x+1)!} \\
&= \left(\frac{1}{\langle N \rangle}\right)^{n-1} \sum_{x=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle}\right)^x \text{COV}_{\Delta t}(x+n) \frac{(x+n)!}{n!x!} \\
&= \left(\frac{1}{\langle N \rangle}\right)^{n-1} \sum_{x=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle}\right)^x \text{COV}_{\Delta t}(x+n) \binom{x+n}{n}.
\end{aligned} \tag{D.5}$$

Ostatnim obliczeniem będzie wyznaczenie Z transformaty ze wzoru (5.18) przy podstawieniu $q = j + n$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\text{COV}}_{\Delta T}(z) &= \langle N \rangle \sum_{q=0}^{\infty} \text{COV}_{\Delta t}(q) \sum_{n=0}^q \left(\frac{1}{z \langle N \rangle}\right)^n \left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle}\right)^{q-n} \binom{q}{n} \\
&= \langle N \rangle \sum_{q=0}^{\infty} \text{COV}_{\Delta t}(q) \left(\frac{1}{z \langle N \rangle} + \frac{\langle N \rangle - 1}{\langle N \rangle}\right)^q \\
&= \langle N \rangle \sum_{q=0}^{\infty} \text{COV}_{\Delta t}(q) \left(\frac{z \langle N \rangle}{z \langle N \rangle - z + 1}\right)^{-q} \\
&= \langle N \rangle \widehat{\text{COV}}_{\Delta t} \left(\frac{z \langle N \rangle}{z \langle N \rangle - z + 1}\right) \\
&= \langle N \rangle \widehat{\text{COV}}_{\Delta t} \left(\frac{\langle N \rangle}{\langle N \rangle - 1 + \frac{1}{z}}\right) \\
&= \langle N \rangle \widehat{\text{COV}}_{\Delta t} \left(\frac{1}{\frac{\langle N \rangle - 1}{\langle N \rangle} + \frac{1/\langle N \rangle}{z}}\right).
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Dodatek E

Rozwiązanie części $B_n(t)$ propagatora procesu

Pierwszym obliczeniem jest wyznaczenie transformaty Laplace'a drugiej części propagatora $B_n(t)$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_n(s) &= \mathcal{L}\{B_n(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} B_n(t) dt \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{v_1, \dots, v_k \\ v_1 + \dots + v_k = n}} \int_{\Delta t^1, \dots, \Delta t^k}^{\Delta t^k} \int_0^{\Delta t^k} e^{-s\delta t} d\delta t e^{-s\Delta t^1 v_1} \psi(\Delta t^1) \omega(v_1) \dots e^{-s\Delta t^{k-1} v_{k-1}} \psi(\Delta t^{k-1}) \omega(v_{k-1}) \\
 &\quad \times e^{-s\Delta t^k v_k} \psi(\Delta t^k) \Omega(v_k) d\Delta t^1 \dots d\Delta t^{k-1} d\Delta t^k \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{v_1, \dots, v_k \\ v_1 + \dots + v_k = n}} \tilde{\psi}(sv_1) \dots \tilde{\psi}(sv_{k-1}) \omega(v_1) \dots \omega(v_{k-1}) \int_0^\infty e^{-s\Delta t^k v_k} \psi(\Delta t^k) \Omega(v_k) \frac{1 - e^{-s\Delta t^k}}{s} d\Delta t^k \\
 &= \frac{1}{s} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{v_1, \dots, v_k \\ v_1 + \dots + v_k = n}} \tilde{\psi}(sv_1) \dots \tilde{\psi}(sv_{k-1}) [\tilde{\psi}(sv_k) - \tilde{\psi}(s(v_k + 1))] \omega(v_1) \dots \omega(v_{k-1}) \Omega(v_k).
 \end{aligned} \tag{E.1}$$

Kolejnym krokiem jest transformata Z:

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_z(s) &= \sum_{n=1}^\infty z^{-n} \tilde{B}_n(s) \\
 &= \frac{1}{s} \sum_{k=1}^\infty \sum_{v_1, \dots, v_k} z^{-v_1} \tilde{\psi}(sv_1) \omega(v_1) \dots z^{-v_{k-1}} \tilde{\psi}(sv_{k-1}) \omega(v_{k-1}) \\
 &\quad \times z^{-v_k} [\tilde{\psi}(sv_k) - \tilde{\psi}(s(v_k + 1))] \Omega(v_k) \tag{E.2} \\
 &= \frac{1}{s} \sum_{k=1}^\infty \tilde{f}(z; s)^{k-1} \sum_{v_k=1}^\infty z^{-v_k} [\tilde{\psi}(sv_k) - \tilde{\psi}(s(v_k + 1))] \Omega(v_k) \\
 &= \frac{1}{s} \frac{\sum_{v=1}^\infty z^{-v} [\tilde{\psi}(sv) - \tilde{\psi}(s(v + 1))] \Omega(v)}{1 - \tilde{f}(z; s)}.
 \end{aligned}$$

Zauważmy, że występującą sumę możemy rozpisać jako:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{-\nu} [\tilde{\psi}(s\nu) - \tilde{\psi}(s(\nu+1))] \Omega(\nu) \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{-\nu} \tilde{\psi}(s\nu) \Omega(\nu) - \sum_{\nu=1}^{\infty} z z^{-(\nu+1)} \tilde{\psi}(s(\nu+1)) \Omega(\nu) \\
&= \tilde{F}(z; s) - z \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{-(\nu+1)} \tilde{\psi}(s(\nu+1)) [\Omega(\nu+1) + \omega(\nu+1)] \\
&= \tilde{F}(z; s) - z \left[\tilde{F}(z; s) + \tilde{f}(z; s) - z^{-1} \tilde{\psi}(s) [\Omega(1) + \omega(1)] \right] \\
&= \tilde{F}(z; s) - z \tilde{F}(z; s) - z \tilde{f}(z; s) + \tilde{\psi}(s),
\end{aligned} \tag{E.3}$$

gdzie $\tilde{f}(z; s)$ i $\tilde{F}(z; s)$ zostały zdefiniowane w równaniu (5.35).

Dodatek F

Obliczenia momentów procesu w granicy długich czasów

Najpierw obliczę rozwinięcia z najważniejszymi członami potęgowymi składowych momentów:

$$\begin{aligned}
 1 - j_0 &\approx 1 - \left(1 + C_0^1 s + C_0 s^{\rho-1} + C_0^2 s^2 + C_0^3 s^3\right) = \\
 &= -s C_0^1 \left(1 + \frac{C_0}{C_0^1} s^{\rho-2} + \frac{C_0^2}{C_0^1} s + \frac{C_0^3}{C_0^1} s^2\right), \\
 j_1 &\approx C_1^0 + C_1 s^{\rho-2} + C_1^1 s + C_1^2 s^2, \\
 I_0 + j_0 &\approx C_1^0 + D_0 s^{\rho-2} + \left(D_0^1 + C_0^1\right) s + C_0 s^{\rho-1} + \left(D_0^2 + C_0^2\right) s^2, \\
 I_1 + j_1 &\approx D_1 s^{\rho-3} + \left(\frac{C_1^0}{2} + \frac{C_0^0}{2}\right) + C_1 s^{\rho-2} + \left(D_1^1 + C_1^1\right) s + \left(D_1^2 + C_1^2\right) s^2, \\
 \frac{s C_0^1}{1 - j_0} &\approx -1 + \frac{C_0}{C_0^1} s^{\rho-2} + \frac{C_0^2}{C_0^1} s + \frac{C_0^3}{C_0^1} s^2 \\
 &\quad - \left(\frac{C_0}{C_0^1}\right)^2 s^{2(\rho-2)} + \left(\frac{C_0^2}{C_0^1}\right)^2 s^2 + \frac{2 C_0 C_0^2}{(C_0^1)^2} s^{\rho-2} s \\
 &\quad + \left(\frac{C_0}{C_0^1}\right)^3 s^{3(\rho-2)} + \frac{3(C_0)^2 C_0^2}{(C_0^1)^3} s^{2(\rho-2)} s \\
 &\quad - \left(\frac{C_0}{C_0^1}\right)^4 s^{4(\rho-2)} + \frac{4(C_0)^3 C_0^2}{(C_0^1)^4} s^{3(\rho-2)} s + \dots
 \end{aligned} \tag{F.1}$$

Następnie przeanalizuję zachowanie drugiego momentu, patrząc osobno na współczynniki przy najważniejszych potęgach s . Zaczę od najniższej potęgi s^{-3} razem z odpowiadającym mu wyrazem w przestrzeni czasów:

$$s^{-3} : 2 \langle \Delta x \rangle^2 \left(\frac{1}{C_0^1}\right)^2 (C_1^0 C_1^0) = \frac{2 \langle \Delta x \rangle^2}{\langle \psi \rangle^2} \underbrace{\quad}_{\mathcal{L}^{-1}} \frac{\langle \Delta x \rangle^2}{\langle \psi \rangle^2} t^2. \tag{F.2}$$

Widać, że przy wyznaczeniu wariancji, ten wyraz wyzeruje się przy odejmowaniu podniesionej do kwadratu liniowej części pierwszego momentu.

Współczynnik przy wyrazie zawierającym s^{-2} oraz $\langle \Delta x \rangle^2$:

$$\begin{aligned}
 & \langle \Delta x \rangle^2 s^{-2} : \\
 & 2 \left(\frac{-1 + \frac{C_0^2}{C_0^1} s}{C_0^1} \right)^2 \left[(C_1^0 + C_1^1 s) (C_1^0 + (D_0^1 + C_0^1) s) - \left(\frac{C_1^0}{2} + \frac{C_2^0}{2} \right) C_0^1 s + C_1^0 C_0^1 s \right] \\
 & \rightarrow 2 \frac{1 - 2 \frac{C_0^2}{C_0^1} s}{(C_0^1)^2} \left[(C_1^0 + C_1^1 s) (C_1^0 + (D_0^1 + C_0^1) s) - \left(\frac{C_1^0}{2} + \frac{C_2^0}{2} \right) C_0^1 s + C_1^0 C_0^1 s \right] \\
 & \rightarrow 2 \left(\frac{1}{C_0^1} \right)^2 \left[D_0^1 C_1^0 + C_1^1 C_1^0 - \frac{1}{2} C_0^1 C_2^0 + \frac{3}{2} C_0^1 C_1^0 - 2 \frac{C_0^2 C_1^0 C_1^0}{C_0^1} \right] = \\
 & = -\frac{1}{C_0^1 \langle \psi \rangle^2} \left[4C_0^2 + 3C_0^1 \langle \psi \rangle + 2C_1^1 \langle \psi \rangle + 2D_0^1 \langle \psi \rangle + C_2^0 \langle \psi \rangle^2 \right]
 \end{aligned} \tag{F.3}$$

Współczynnik przy wyrazie zawierającym s^{-2} oraz $\langle \Delta x^2 \rangle$:

$$\frac{\langle \Delta x^2 \rangle - C_1^0}{s^2} \frac{1}{C_0^1} \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} \frac{\langle \Delta x^2 \rangle}{\langle \psi \rangle} t. \tag{F.4}$$

Współczynnik przy najważniejszym wyrazie potęgowym $s^{\rho-5}$:

$$\begin{aligned}
 & \langle \Delta x \rangle^2 s^{\rho-5} : \\
 & 2 \left(\frac{-1 + \frac{C_0}{C_0^1} s^{\rho-2}}{C_0^1} \right)^2 \left[(C_1^0 + C_1^1 s^{\rho-2}) (C_1^0 + D_0^1 s^{\rho-2}) + (D_1^1 s^{\rho-3}) (-s C_0^1) \right] \\
 & \rightarrow 2 \left(\frac{1}{C_0^1} \right)^2 \left(1 - 2 \frac{C_0}{C_0^1} s^{\rho-2} \right) \left[C_1^0 C_1^0 + (C_1^0 D_0^1 + C_1^0 C_1^1 - C_0^1 D_1^1) s^{\rho-2} \right] \\
 & \rightarrow 2 \left(\frac{1}{C_0^1} \right)^2 \left[C_1^0 D_0^1 + C_1^0 C_1^1 - C_0^1 D_1^1 - 2 \frac{C_0}{C_0^1} C_1^0 C_1^0 \right] \\
 & = -\frac{2}{C_0^1 \langle \psi \rangle} \left(D_0^1 + C_1^1 + D_1^1 \langle \psi \rangle + 2 \frac{C_0}{\langle \psi \rangle} \right).
 \end{aligned} \tag{F.5}$$

Zobaczmy, że patrząc na zachowanie wariancji ten wyraz potęgowy jest ważniejszy niż wyraz potęgowy z pierwszego momentu, ponieważ zachodzi $4 - \rho > 2(3 - \rho)$ dla $q > 2$. Łącząc to otrzymujemy przybliżenie drugiego

momentu w przestrzenie Laplace'a:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_2(s) \approx & \frac{2\langle\Delta x\rangle^2}{\langle\psi\rangle^2}s^{-3} - \langle\Delta x\rangle^2 \frac{2}{C_0^1\langle\psi\rangle} \left(D_0 + C_1 - D_1 + 2\frac{C_0}{\langle\psi\rangle} \right) s^{\rho-5} \\ & + \frac{\langle\Delta x^2\rangle}{\langle\psi\rangle}s^{-2} - \langle\Delta x\rangle^2 \frac{1}{C_0^1\langle\psi\rangle^2} \left[4C_0^2 + 3C_0^1\langle\psi\rangle + 2C_1^1\langle\psi\rangle + 2D_0^1\langle\psi\rangle + C_2^0\langle\psi\rangle^2 \right] s^{-2}. \end{aligned} \tag{F.6}$$

Dodatek G

Częściowa suma statystyczna, wymiary Rényi'ego oraz maksimum widma osobliwości

Postawiona przeze mnie w rozdziale 6.2.2 hipoteza skalowania pozwala wyrazić uogólnioną sumę statystyczną $Z_q(s)$ w postaci skalującej. Mianowicie, łącząc równania (6.5), (6.6) i (6.9) otrzymuję:

$$Z_q(s) \approx \frac{1}{N_d^{q-1}} \frac{A_q}{A_{q=1}^q} s^{q[h(q)-h(q=1)]}. \quad (\text{G.1})$$

Następnie, porównując wyrażenie (6.9) z powyższym, przedstawiam $Z_q(s)$ w wygodniejszej dla dalszych rozważań postaci:

$$Z_q(s) \approx \frac{1}{N_d^{q-1}} A_q^{\text{rel}} s^{qh^{\text{rel}}(q)} = \frac{1}{N_d^{q-1}} A_q^{\text{rel}} s^{\tau^{\text{rel}}(q)} = \frac{1}{N_d^{q-1}} A_q^{\text{rel}} s^{(q-1)D^{\text{rel}}(q)}, \quad (\text{G.2})$$

gdzie względne wielkości multifraktalne zdefiniowałem następująco:

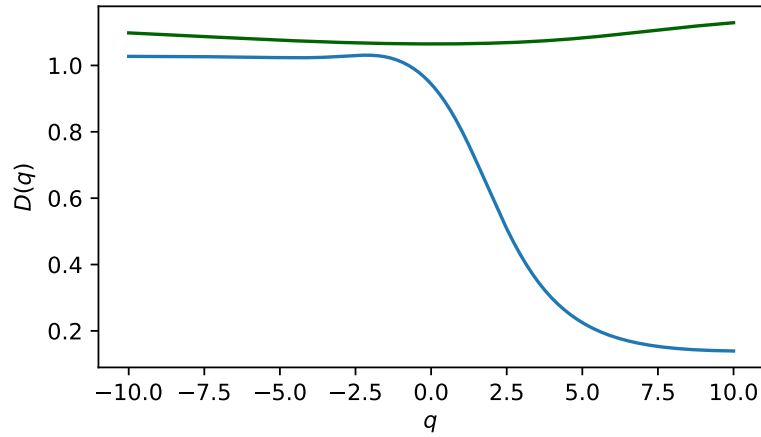
$$\begin{aligned} A_q^{\text{rel}} &\equiv \frac{A_q}{(A_{q=1})^q}, \\ h^{\text{rel}}(q) &\equiv h(q) - h(q=1), \\ \tau^{\text{rel}}(q) &\equiv qh^{\text{rel}}(q), \\ D^{\text{rel}}(q) &\equiv \frac{\tau^{\text{rel}}(q)}{q-1}. \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

Stąd, uogólniona suma statystyczna faktoryzuje się:

$$Z_q(s) = Z_q^{\text{lin}}(s) \tilde{Z}_q(s), \quad Z_q^{\text{lin}}(s) = \frac{1}{N_d^{q-1}} A_q^{\text{rel}} s^{-\tau^{\text{lin}}}, \quad \tilde{Z}_q(s) = s^{\tau(q)}, \quad (\text{G.4})$$

gdzie $\tau^{\text{lin}} = (q-1)D(q=0)$ oraz dla zachowania samozgodności formalizmu należy przyjąć, że:

$$D(q=0) \equiv h(q=1) \quad \text{oraz} \quad \tau(q) = qh(q) - D(q=0). \quad (\text{G.5})$$



Rysunek G.1: Przykładowy wykres empirycznych wymiarów Rényi'ego $D(q)$ dla spółki PKNORLEN (krzywa niebieska) porównany z wynikami symulowanego referencyjnego procesu Poissona przedstawionymi za pomocą zielonej linii. Także i w tym przypadku widoczny jest subtelny charakter niemonotoniczności.

Zauważmy jeszcze, że ma miejsce następująca wygodna standaryzacja $Z_{q=1}(s) = Z_{q=1}^{lin} = \tilde{Z}_{q=1}(s) = 1$.

Zatem, uogólniona suma statystyczna jest iloczynem czynnika skalującego się z wykładnikiem potęgi liniowo zależnym od q (nieistotnego z punktu widzenia niniejszej rozprawy) oraz czynnika właściwego, w którym zawarta jest poszukiwana przeze mnie multifraktalność. W szczególności, taka faktoryzacja sumy statystycznej pozwala na otrzymanie z częściowej sumy statystycznej $\tilde{Z}_q(s)$ uogólnionego wykładnika Hursta $h(q)$ a dzięki temu umożliwia dalszą analizę multifraktalną, którą przedstawiłem w niniejszej rozprawie.

Wymiary Rényi'ego (kanoniczne i względne) definiuję za pomocą wykładnika skalowania $\tau(q)$ następująco:

$$\begin{aligned} D(q) &= \frac{\tau(q)}{q-1}, \\ D^{rel}(q) &= D(q) - D(q=0), \end{aligned} \tag{G.6}$$

gdzie przy wyprowadzeniu drugiej równości skorzystałem z drugiej równości w (G.5) oraz drugiej, trzeciej i czwartej równości w (G.3). Przykładowy wykres $D(q)$ w zależności od q przedstawiłem na rysunku G.1. Także i w tym przypadku widoczny jest subtelny charakter niemonotoniczności $D(q)$.

Na podstawie równania (6.16) oraz drugiej równości w (G.5) otrzymuję, że

maksimum widma osobliwości:

$$f(\alpha(q=0)) = -\tau(q=0) = D(q=0) = h(q=1), \quad (\text{G.7})$$

czyli jest ono równe $D(q=0)$, które (w ogólności) jest różne od 1.

W kanonicznym podejściu MFDFA, z relacji skalowania uogólnionej sumy statystycznej wynika, że $D(q=0)$ jest wymiarem Hausdorffa szeregu czasowego (nośnika). Jednakże, opracowane przeze mnie podejście opiera się na analizie częściowej sumy statystycznej (zdefiniowanej trzecią równością w (G.4)). Definicja ta bazuje na wykładniku skalowania danym drugim równaniem w (G.5), gdzie w ogólności $D(q=0) \neq 1$. Dlatego kanoniczna interpretacja $D(q=0)$ nie jest tutaj brana pod uwagę. Po prostu, w moim podejściu $D(q=0)$ może być traktowane jako parametr zdefiniowany przez $h(q=1)$, czyli związany jedynie z informacją, a nie z topologią. Prowadzi to do ogólniejszego ujęcia kanonicznego formalizmu multifraktalnego (MFDFA).

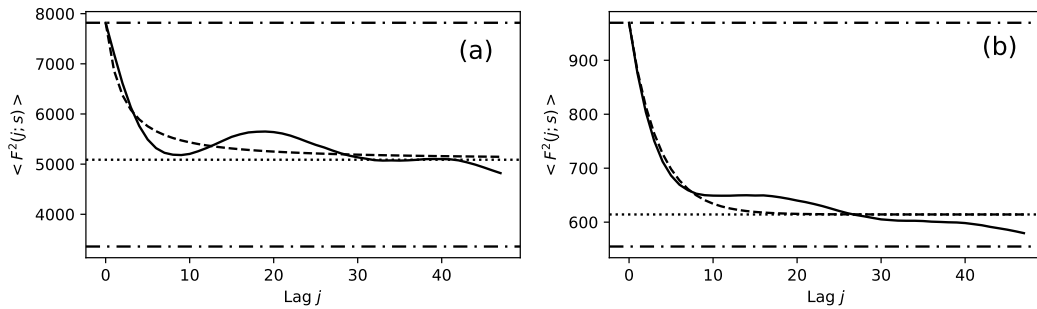
Dodatek H

Funkcja autokorelacji $\langle F^2(j; s) \rangle$

Do zbadania zależności występujących w wewnątrzdziennych szeregach odchyleń od profilu, wprowadzam funkcję autokorelacji $F^2(j; v; s)$ jako uogólnienie wzoru 6.4:

$$F^2(j; v; s) = \frac{1}{s-j} \sum_{i=1}^{s-j} |U_v(i) - y_v(i)| |U_v(i+j) - y_v(i+j)|. \quad (\text{H.1})$$

Wielkość tą uśredniam po zespole dni handlowych $\langle F^2(j; s) \rangle = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} F^2(j; i; s)$ i przedstawiam na poniższym rys. H.1. Empiryczna autokorelacja,



Rysunek H.1: Porównanie dwóch wewnątrzdziennych nieliniowych funkcji autokorelacji $\langle F^2(j; s) \rangle$ w funkcji j dla ustalonego $s = 94$, uśrednionych po zespole statystycznym wszystkich dni. (a) Zanik empirycznej funkcji autokorelacji (linia ciągła) jest dobrze przybliżony zanikiem potęgowym (linia przerywana). Górna pozioma linia przerywano-kropkowana jest na wysokości $\langle (U - y)^2 \rangle$, podczas gdy dolna $\langle U - y \rangle^2$. Kropkowana pozioma linia reprezentuje pionowe stałe przesunięcie funkcji potęgowej. Przypuszczalnie, położenie tej linii znacznie powyżej $\langle U - y \rangle^2$ spowodowane jest istnieniem wzorców w szeregu czasów międzyzdarzeniowych (przedstawionych na rys. 6.1). Wykres (b) analogicznie pokazuje zanik funkcji autokorelacji dla wygenerowanego procesu Poissona, opartego na średnich empirycznych czasach międzyzdarzeniowych dla każdego dnia oddzielnie. Zanik wykładniczy (linia przerywana) dobrze pasuje do danych.

przedstawiona na części (a), zanika powoli z widocznym falowaniem. W znacznej mierze udaje się ją przybliżyć funkcją potęgową $\langle F^2(j; s) \rangle \approx A/(a + j)^\alpha + \text{const}$ z amplitudą $A = 9027 \pm 16600$ oraz stałą $\text{const} = 5088 \pm 133 > \langle U - y \rangle^2 = 3358$. Parametr przesunięcia jest zadany jako $a = A^{1/\alpha}(\langle (U - y)^2 \rangle - \text{const})^{-1/\alpha} = 2.53 \pm 2.20$. Autokorelacja zanika powoli do dodatniej wartości, czego bezpośrednią przyczyną jest definicja, w której używam iloczynu wartości bezwzględnych fluktuacji. Na podstawie obserwowanych oscylacji wnioskować mogę o istnieniu długozasięgowej struktury fluktuacji. Można wnioskować, że to długozasięgowe korelacje pomiędzy odchyleniami są przyczyną tej struktury.

Dla procesu Poissona (część (b)) autokorelacja zanika znacznie szybciej, przybliżona jest funkcją wykładniczą $\langle F^2(j; s) \rangle \approx A \exp(-aj) + \text{const}$ z parametrami $A = 338.2 \pm 2.4$, $a = 0.321 \pm 0.017$, $\text{const} = 600.0 \pm 2.4$. Kropkowana linia nie zbiega się z dolną kropkowano-przerywaną linią, co spowodowane jest skończoną wielkością danych. Jednak względem wartości dolnej linii ta różnica jest znacznie mniejsza, niż w przypadku danych empirycznych. Na tej podstawie mogę wnioskować, że w przypadku danych empirycznych efekt danych skończonej długości jest zanedbywalny w porównaniu do efektów wynikających z empirycznych zależności.

Dodatek I

Jednowymiarowa transformata Legendre-Fenchela

Jednowymiarowa transformata Legendre-Fenchela (L-F) jest rozszerzeniem kanonicznej jednowymiarowej transformaty Legendre'a (L) poza dziedzinę funkcji wypukłych (do których ograniczona jest transformata L) – np. na dziedzinę funkcji wypukło-wklęsłych. Pozwala to na pogłębioną analizę szeregów czasowych, a poprzez to na lepszy opis układów złożonych – w szczególności na otrzymanie wielogałęziowego widma, $f(\alpha)$, wykładnika Höldera $\alpha(q)$. Takie wykorzystanie transformaty L-F jest autorskim krokiem w wielofraktalnej analizie szeregów czasowych.

Przypominam, że jednowymiarowa transformata L dla różniczkowalnej wypukłej funkcji $\tau(q)$ definiuje funkcję $f(\alpha)$ jako:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha q - \tau(q), \\ \alpha &= \alpha(q) = \frac{d\tau(q)}{dq}, \\ q &= q(\alpha) = \frac{df(\alpha)}{d\alpha}, \end{aligned} \tag{I.1}$$

gdzie zmienne q oraz α są powiązane ze sobą za pomocą drugiego zestawu równań poprzez funkcję τ lub trzeciego poprzez funkcję f .

Transformacja L-F rozszerza możliwość zastosowania tego przekształcenia na funkcje wypukło-wklęsłe (oczywiście też na wklęsło-wypukłe), korzystając odpowiednio przedziałami z równań (I.1). Dzięki temu można otrzymać wielogałęziowe odwzorowanie $f(\alpha)$. Wynika to z niemonotonicznej zależności wykładnika Höldera od zmiennej q , gdzie ustalonemu α może odpowiadać kilka wartości q (rys. 6.7).

Dodatkowo, z równań (I.1) i warunków (G.5) wynika, że:

$$\begin{aligned} f(\alpha(q=1)) &= \alpha(q=1), \\ \left. \frac{df(\alpha(q))}{d\alpha(q)} \right|_{\alpha(q=1)} &= 1, \end{aligned} \tag{I.2}$$

które definiują, a w tym lokalizują, główną gałąź spektrum $f(\alpha)$. Własności (I.2) wykorzystuję przedziałami, analogicznie jak w przypadku równań (I.1). Warunki (I.1) i (I.2) oznaczają, że prosta o współczynniku nachylenia równym 1 jest styczna do krzywej $f(\alpha)$ w punkcie o współrzędnych $(\alpha(q=1), f(\alpha(q=1)))$ wychodząc z punktu $(0,0)$. Styczną tą przedstawiłem na rysunku 6.8 w postaci cienkiej kropkowanej linii prostej.

Zastosowanie transformaty L-F przedstawiam na prostym, analitycznym przykładzie funkcji $\tau(x) = -ax^3 + cx$, gdzie $a, c > 0$, przy czym rozważam przypadek $c \geq a$. Mianowicie dopuszczam, że **funkcja** $\tau(x)$ określona na poddziedzinie zmiennej x , **zawiera zarówno część wypukłą** (określoną na poddziedzinie $[x_1, 0]$), jak i **wklęsłą** (określoną na poddziedzinie $[0, x_2]$). Przedstawiam ją na rysunku I.1, przy czym obu "ogonków" funkcji τ , jednego dla $x < x_1$ a drugiego dla $x > x_2$, nie biorę tutaj pod uwagę. Zamieściłem tam wykresy funkcji $\tau(x)$ i $y(x) = ax$ oraz funkcji $f(q)$ dla takich wybranych wartości q dla których mam do czynienia zarówno z supremum (kresem górnym) jak też infimum (kresem dolnym) funkcji $f(x)$. Pokrywają się one tutaj z ekstremami funkcji $f(x)$, odpowiednio, z maksimum i minimum. Można to zapisać (dla $q \geq 0$) następująco:

$$f(z) = \begin{cases} \sup_{0 \leq x \leq x_1} [y(x) - \tau(x)], & z = -q, \\ \inf_{0 \leq x \leq x_2} [y(x) - \tau(x)], & z = q, \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

dla ustalonego $\alpha (\leq c)$ (dolny wykres na rysunku I.1). Pozwala to wyznaczyć lokalizację $-q$ i q oraz wartości $f(-q)$ i $f(q)$. Mianowicie, z definicji (I.1) wynika, że $f(x) \leq 0$ dla $x_1 \leq x < 0$ oraz $f(x) \geq 0$ dla $0 \leq x \leq x_2$, gdzie ograniczyłem się do przedziału $[x_1, x_2]$. Jak widać, $f(-q)$ i $f(q)$ położone są tutaj symetrycznie, gdzie $\mp q$ wyznaczam z równania:

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=\mp q} = 0 = 3aq^2 - (c - \alpha), \quad (\text{I.4})$$

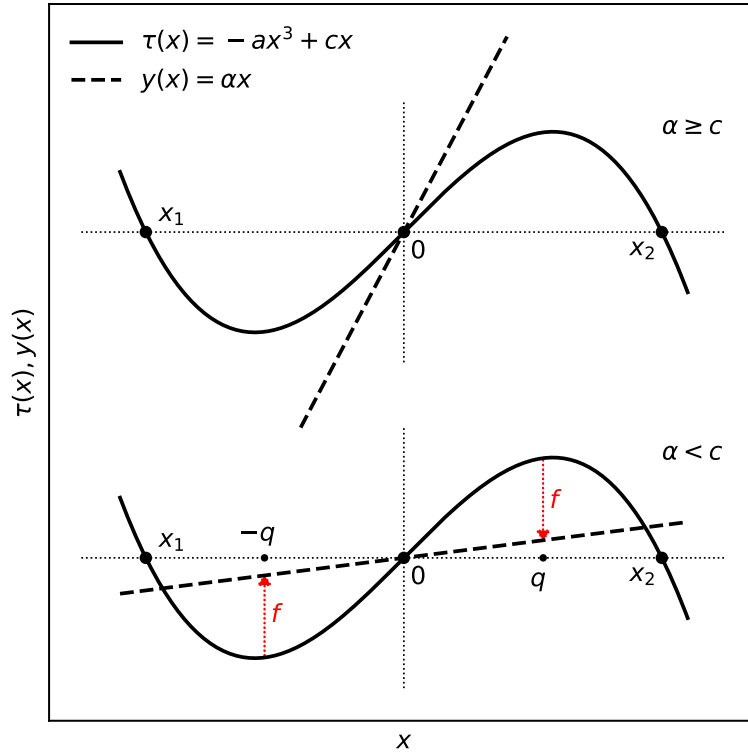
z którego dla zadanego α , będącego współczynnikiem nachylenia prostej $y(x) = ax$, otrzymuję:

$$q(\alpha) = \pm \sqrt{\frac{c - \alpha}{3a}}. \quad (\text{I.5})$$

Dzięki równaniu (I.4) można powiązać ze sobą dwie kluczowe wielkości: q oraz α i traktować je jak zmienne sprzężne.

Jak wynika z równania (I.4) (lub równoważnie z równania (I.5)), współczynnik c określa górną granicę wartości α , co pozwala wyznaczyć jego dozwolone granice, tzn. $0 \leq \alpha \leq c$. Zmienna $\mp q$ wskazuje wartości x , w których funkcja $f(x)$ ma swoje ekstrema. Wzór (I.5) można odwrócić uzyskując:

$$\alpha(q) = \left. \frac{d\tau(x)}{dx} \right|_{x=\mp q} = -3aq^2 + c, \quad (\text{I.6})$$



Rysunek I.1: Schematyczne wykresy wypukło-wklesłej funkcji $\tau(x)$ (linia ciągła), z zaznaczonymi na dolnym wykresie położeniami kresów (infimum i supremum) funkcji f (czerwone strzałki) w punktach, odpowiednio, $-q$ oraz $q > 0$. Należy się tutaj ograniczyć do zakresu $0 \leq \alpha \leq \left. \frac{d\tau(x)}{dx} \right|_{x=0} = c$.

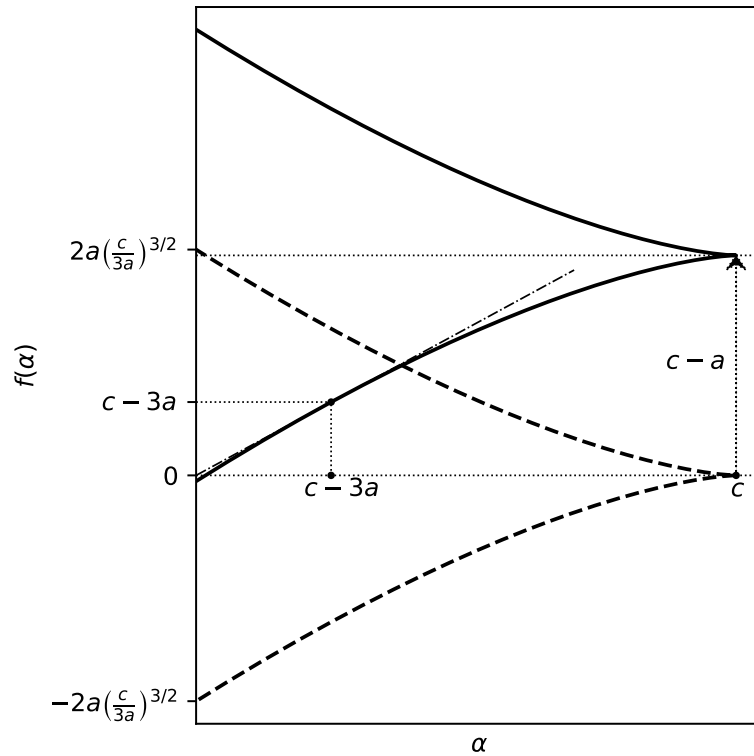
a następnie, korzystając z pierwszego równania w (I.1), otrzymać dwugałęziste widmo:

$$f(\alpha) = \pm 2a \left(\frac{c - \alpha}{3a} \right)^{3/2}. \quad (\text{I.7})$$

Przebieg tego widma przedstawiłem na rysunku I.2 w postaci krzywej przerywanej.

Ponadto, na tym rysunku zamieściłem krzywą ciągłą przesuniętą do góry o wielkość $c - a$, dzięki czemu to przesunięte widmo $f(\alpha)$ spełnia już zasadnicze wymagania analizy wielofraktalnej przedstawionej w dodatku G. Mianowicie:

- (i) $\tau(x) \Rightarrow \tau(x) + a - c = -ax^3 + cx + a - c$, co powoduje, że $(\tau(q = 1)) = 0$, a stąd zapewniona jest właściwa normalizacja częściowej sumy statystycznej $\tilde{Z}_q$ określonej trzecią równością we wzorze (G.4). Powyższe przesunięcie nie zmienia ani q ani α .
- (ii) Dzięki powyższemu otrzymuję, że $D(q) = \frac{\tau(q)}{q-1} = -\frac{a(q^3-1)}{q-1} + c$, czyli w szczególności $D(q = 0) = c - a$ oraz $D(q = 1) = \alpha(q = 1) = c - 3a$.

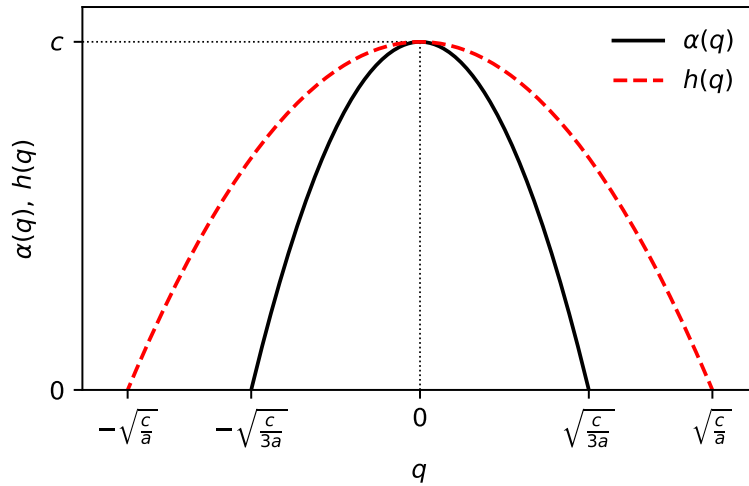


Rysunek I.2: Dwugłęziowe widma $f(\alpha)$ vs. α . Linia ciągła to widmo przesunięte o $D(q=0) = c-a$ względem kreskowanej linii – widma wyjściowego. W wyniku tego przesunięcia otrzymałem punkt styczności pochodnej $\left. \frac{f(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha(q=1)}$ spełniający relację $f(\alpha(q=1)) = \alpha(q=1) = D(q=1) = c-3a$, dla ustalonego $q=1$. Należy zaznaczyć, że maksymalna wartość $f(\alpha)$ wynosi $f(\alpha(q=0)) = c-a$ i w ogólności może być różna od 1 – jak widać, równałyby się 1 wtedy i tylko wtedy gdyby $c=a+1$. Poniżej, w przedostatnim akapicie, rozwijam to stwierdzenie.

Stąd, $a = \frac{D(q=0)-D(q=1)}{2}$ i $c = \frac{3D(q=0)-D(q=1)}{2}$. Zauważmy, że użyta tutaj została ta nowa, przesunięta funkcja τ .

- (iii) W dalszym ciągu, korzystając z przesuniętej funkcji τ oraz obu równości w (G.5), otrzymuję $h(q) = \frac{\tau(q)+D(q=0)}{q} = -aq^2 + c$. Stąd otrzymuję pożyteczną równość $h(q=1) = D(q=0)$.
- (iv) Wynika stąd ostatecznie, że nowe widmo $f(\alpha) \Rightarrow f(\alpha) + c-a$, gdzie wykorzystałem przesuniętą funkcję τ i definicję (I.3).

Trzeba podkreślić, że jest możliwa standaryzacja widma f , czyli znalezienie takiego przekształcenia liniowego funkcji τ , aby w konsekwencji spełnione były trzy kluczowe wymagania: maksimum widma $f(\alpha(q=0)) = 1$, $f(\alpha(q=1)) = \alpha(q=1)$ oraz styczna $\left. \frac{df(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha(q=1)} = 1$. Łatwo sprawdzić, że



Rysunek I.3: Dwuramienne wykresy $\alpha(q)$ (linia ciągła) oraz $h(q)$ (linia przerywana) dobrze ilustrują ich niemonotoniczny charakter w zmiennej q .

poszukiwane przekształcenie liniowe jest postaci:

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}(x) &= \gamma\tau(x) + \beta, \\ \tilde{y}(x) &= \gamma y(x) + \beta.\end{aligned}\tag{I.8}$$

Stąd:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(x) &= \gamma\alpha, \\ \tilde{f}(z) &= \begin{cases} \sup_{0 \leq x \leq x_1} [\tilde{y}(x) - \tilde{\tau}(x)], & z = -q, \\ \inf_{0 \leq x \leq x_2} [\tilde{y}(x) - \tilde{\tau}(x)], & z = q, \end{cases} \\ &= \gamma f(z), \\ \tilde{q} &= q, \\ \tilde{\tau}(q) &= (q-1)\tilde{D}(q), \\ \tilde{h}(q) &= \frac{\tilde{\tau}(q) + \tilde{D}(q=0)}{q}.\end{aligned}\tag{I.9}$$

gdzie $\gamma = \frac{1}{c-a}$ oraz $\beta = -1$, gdyż po drodze wykorzystaliśmy warunki: $\tilde{\tau}(q=1) = 0$ oraz $\tilde{f}(\tilde{\alpha}(q=0)) = -\tilde{\tau}(q=0) = \tilde{D}(q=0) = -\beta = 1$.

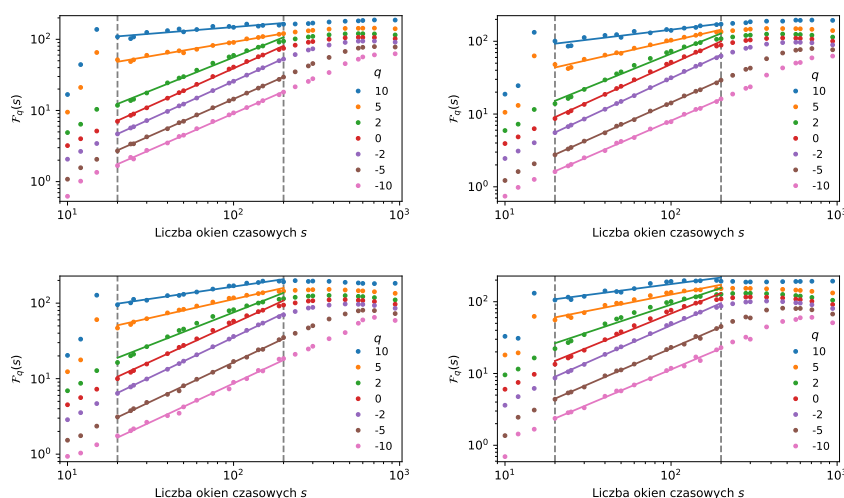
W ogólności tego typu przekształcenie liniowe istnieje zarówno dla transformacji L, jak też L-F i oznacza po prostu, że funkcje τ oraz $\tilde{\tau}$ są sobie równoważne. Oczywiście, odpowiednio do tego transformacji podlegają częściowe sumy statystyczne określone w (G.4). Powyższą transformację można rozszerzyć na przypadek nośnika o wymiarze różnym od 1 (w tym celu wystarczy zamiast $-\beta$ w równości w ostatnim wierszu poprzedniego akapitu wstawić ten wymiar).

Pragnę podkreślić, że zasadniczym celem niniejszego dodatku było pokazanie, na możliwie prostym przykładzie, w jaki sposób można i trzeba wykorzystać transformację L-F, czyli jak postępować w przypadku, gdy mamy do czynienia z funkcjami wypukło-wklęsłymi $\tau(x)$ (także wklęsło-wypukłymi).

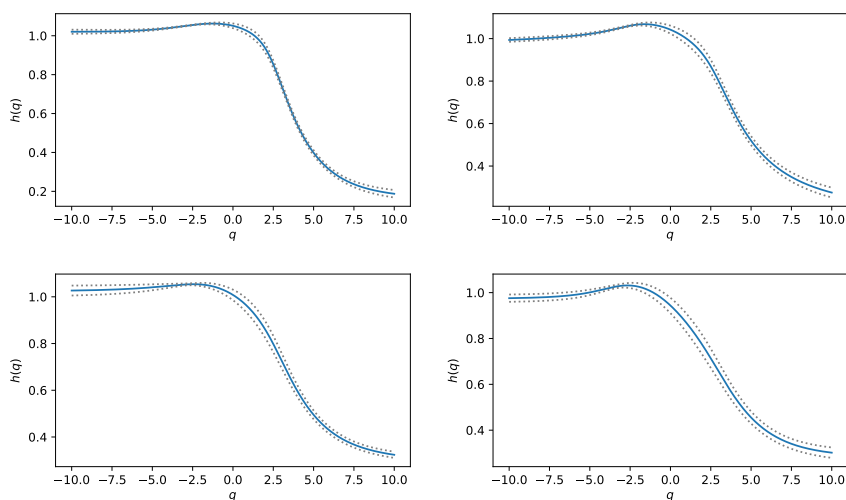
Dodatek J

Wyniki analizy multifraktalnej dla różnych spółek

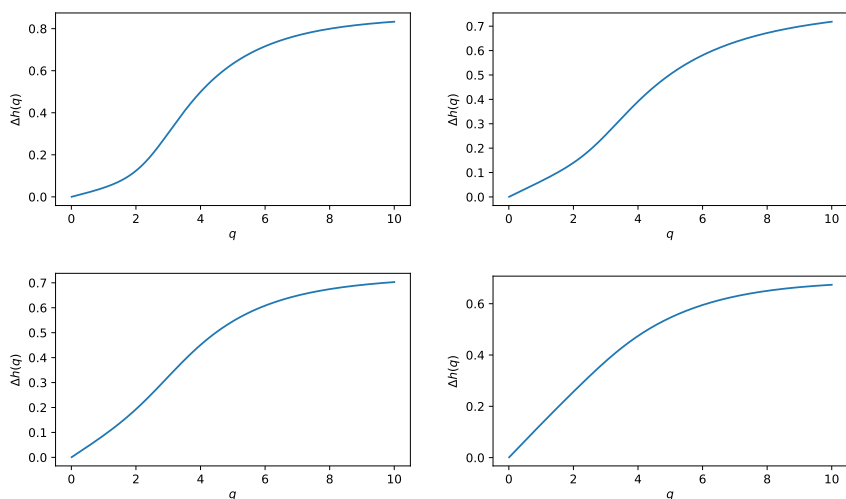
W tym dodatku przedstawiam wyniki analizy multifraktalnej dla kolejnych najbardziej płynnych spółek z GPW analogicznie jak to zrobiłem w rozdziale 6. Wykresy zamieszczone na kolejnych rysunkach J.1 – J.8 odpowiadają (w następującym porządku) spółkom: górny wiersz po lewej KGHM a po prawej PKOBP, dolny wiersz po lewej PZU a po prawej PGE. Wyniki przedstawione w tym dodatku mają na celu pokazanie, że omawiana w rozprawie, niemonotoniczna multifraktalność może być powszechną charakterystyczną cechą spółek giełdowych.



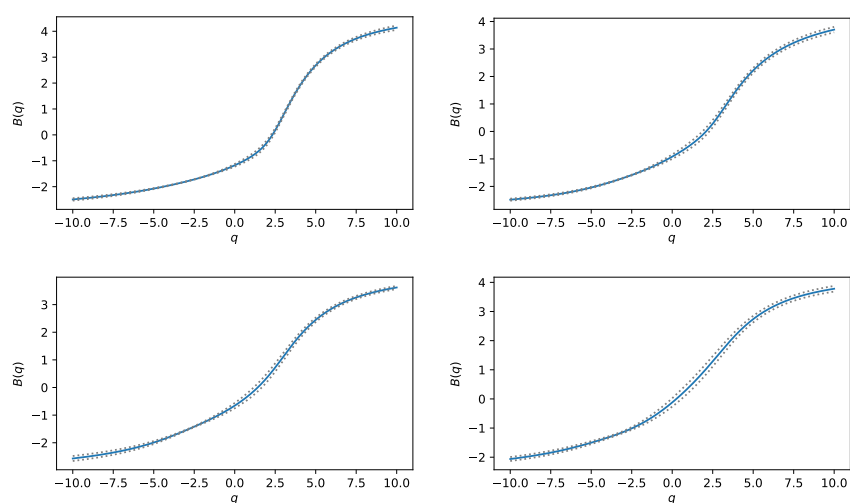
Rysunek J.1: Wykresy empirycznych funkcji $\mathcal{F}_q(s)$ (punkty) w skali log-log dla wybranych reprezentatywnych wartości q z przedziału $[-10; 10]$. Ukośne linie ciągłe stanowią do nich dopasowania za pomocą funkcji danych wzorami (6.12) (dla $q = 0$) i (6.13) (dla $q \neq 0$). Pionowe przerywane linie pokazują wybrany zakres obszaru dopasowania (skali). Pragnę podkreślić, że powyższe postępowanie jest wyjściowym elementem procedury przedstawionej w rozdziale 6.



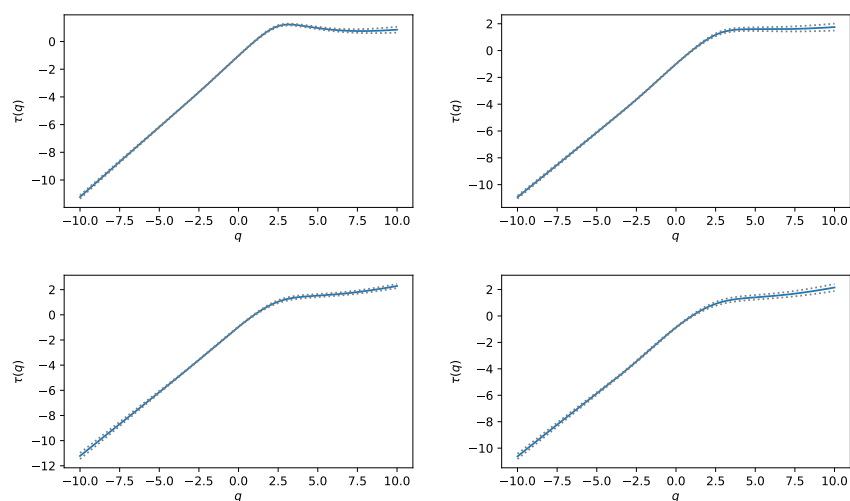
Rysunek J.2: Wykresy empirycznych uogólnionych wykładników Hursta $h(q)$ (niebieskie krzywe ciągłe) wraz z błędami dopasowań (niebieskie krzywe kropkowane). Widoczne są subtelne niemonotoniczności analogiczne do tej przedstawionej w rozdziale 6 na rysunku 6.3.



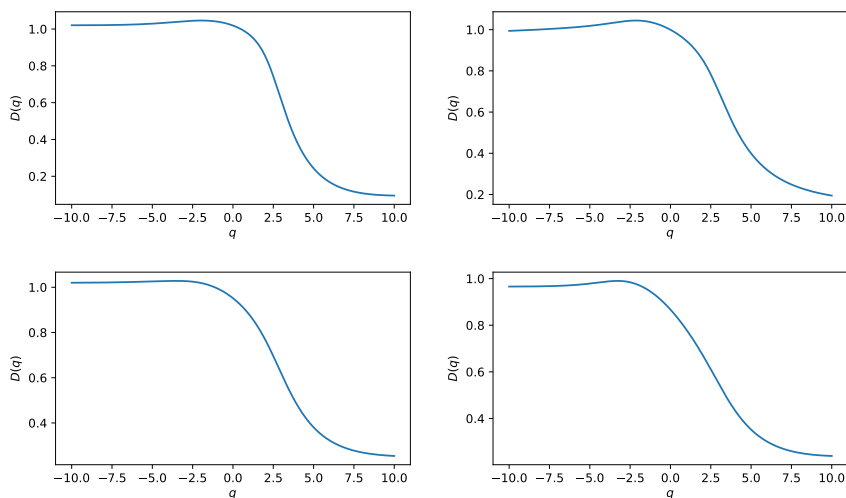
Rysunek J.3: Przebiegi empirycznych nieparzystości wykładników Hursta, $\Delta h(q)$ w zależności od q , analogiczne do tego przedstawionego w rozdziale 6 na rysunku 6.4.



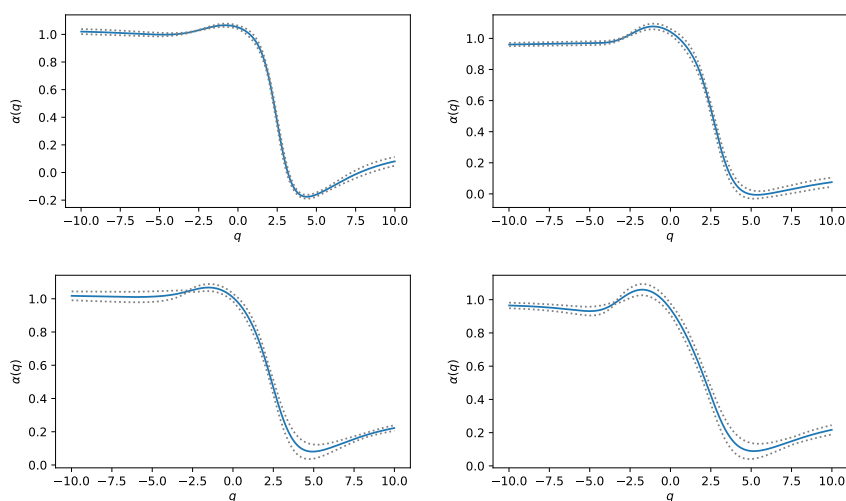
Rysunek J.4: Wykresy empirycznych funkcji tła $B(q)$, analogiczne do przedstawionego w rozdziale 6 na rysunku 6.5.



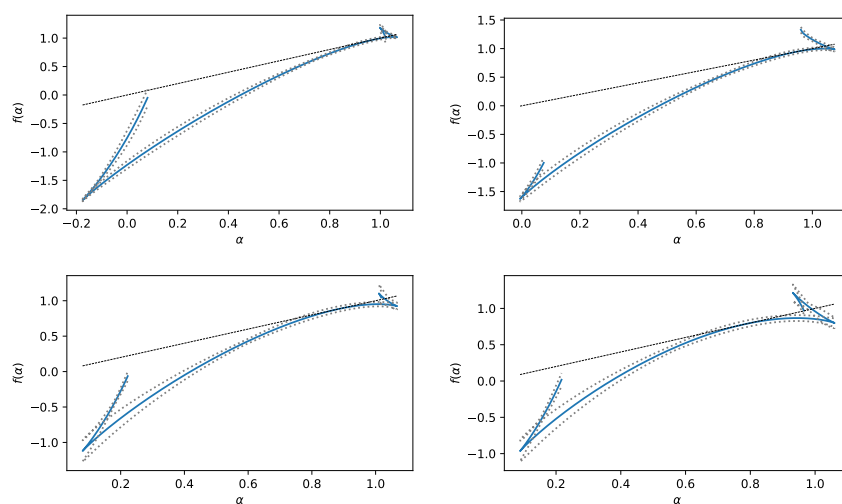
Rysunek J.5: Wykresy empirycznych wykładników skalowania Rényi'ego $\tau(q)$; ich przebiegi są analogiczne do tego przedstawionego w rozdziale 6 na rysunku 6.6.



Rysunek J.6: Wykresy empirycznych funkcji $D(q)$; ich przebiegi są analogiczne do tego przedstawionego w dodatku G na rysunku G.1.



Rysunek J.7: Wykresy empirycznych niemonotonicznych wykładników Höldera $\alpha(q)$, których przebiegi są analogiczne do tego przedstawionego w rozdziale 6 na rysunku 6.7.



Rysunek J.8: Wykresy empirycznych wielogałęziowych widm wymiarów/osobliwości, $f(\alpha)$, wykładników Höldera. Przypominają one analogiczne widmo przedstawione w rozdziale 6 na rysunku 6.8.

Bibliografia

- [1] Y. Bar-Yam, *Dynamics of Complex Systems*. Cambridge, MA, USA: Perseus Books, 1997, ISBN: 0-201-55748-7.
- [2] D. Chowdhury, K. Nishinari, A. Schadschneider i S. O. service), *Stochastic Transport in Complex Systems From Molecules to Vehicles*. San Diego Elsevier Science [Imprint], 2010, Scholarly & Professional Elsevier Science & Technology Books, ISBN: 0444528539.
- [3] P. Sibani i H. J. Jensen, *Stochastic Dynamics of Complex Systems - From Glasses to Evolution* (Series on Complexity Science). World Scientific, 2013, t. 2.
- [4] M. Albert, G. Haack, C. Flindt i M. Büttiker, „Electron Waiting Times in Mesoscopic Conductors,” *Phys. Rev. Lett.*, t. 108, s. 186 806, 18 2012. DOI: [10.1103/PhysRevLett.108.186806](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.186806).
- [5] D. Dasenbrook, P. P. Hofer i C. Flindt, „Electron waiting times in coherent conductors are correlated,” *Phys. Rev. B*, t. 91, s. 195 420, 19 2015. DOI: [10.1103/PhysRevB.91.195420](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.91.195420).
- [6] A. Saichev i D. Sornette, „“Universal” Distribution of Interearthquake Times Explained,” *Phys. Rev. Lett.*, t. 97, s. 078 501, 7 2006. DOI: [10.1103/PhysRevLett.97.078501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.078501).
- [7] R. N. Mantegna i H. E. Stanley, *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2000, ISBN: 0-521-62008-2.
- [8] E. Scalas, „Five years of continuous-time random walks in econophysics,” w *The Complex Networks of Economic Interactions*, Springer, 2006, s. 3–16.
- [9] M. I. Bogachev, A. R. Kayumov i A. Bunde, „Universal Internucleotide Statistics in Full Genomes: A Footprint of the DNA Structure and Packaging?” *PLOS ONE*, t. 9, nr. 12, s. 1–17, grud. 2014. DOI: [10.1371/journal.pone.0112534](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0112534).
- [10] M. Karsai, K. Kaski, A.-L. Barabási i J. Kertész, „Universal features of correlated bursty behaviour,” *Scientific Reports*, t. 2, 397 EP –, 2012, Article.
- [11] J. Perelló, J. Masoliver, A. Kasprzak i R. Kutner, „Model for interevent times with long tails and multifractality in human communications: An application to financial trading,” *Phys. Rev. E*, t. 78, s. 036 108, 3 2008. DOI: [10.1103/PhysRevE.78.036108](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.78.036108).

- [12] Y. Wu, C. Zhou, J. Xiao, J. Kurths i H. J. Schellnhuber, „Evidence for a bimodal distribution in human communication,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, t. 107, nr. 44, s. 18 803–18 808, 2010, ISSN: 0027-8424. DOI: [10.1073/pnas.1013140107](https://doi.org/10.1073/pnas.1013140107).
- [13] T. Gubiec, J. Klamut i R. Kutner, „Multi-phase Long-Term Autocorrelated Diffusion: Stationary Continuous-Time Weierstrass Walk Versus Flight,” w *Simplicity of Complexity in Economic and Social Systems*, D. Grech i J. Miśkiewicz, red., Cham: Springer International Publishing, 2021, s. 55–88, ISBN: 978-3-030-56160-4.
- [14] J. Klamut i T. Gubiec, „Directed continuous-time random walk with memory,” *The European Physical Journal B*, t. 92, nr. 4, s. 69, 2019, ISSN: 1434-6036. DOI: [10.1140/epjb/e2019-90453-y](https://doi.org/10.1140/epjb/e2019-90453-y).
- [15] J. Klamut i T. Gubiec, „Continuous Time Random Walk with Correlated Waiting Times. The Crucial Role of Inter-Trade Times in Volatility Clustering,” *Entropy*, t. 23, nr. 12, 2021, ISSN: 1099-4300. DOI: [10.3390/e23121576](https://doi.org/10.3390/e23121576).
- [16] J. Klamut, R. Kutner, T. Gubiec i Z. R. Struzik, „Multibranch multifractality and the phase transitions in time series of mean interevent times,” *Phys. Rev. E*, t. 101, s. 063 303, 6 2020. DOI: [10.1103/PhysRevE.101.063303](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.101.063303).
- [17] R. Cont, „Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues,” *Quantitative Finance*, t. 1, nr. 2, s. 223–236, 2001. DOI: [10.1080/713665670](https://doi.org/10.1080/713665670).
- [18] W. Dębski, *Rynek finansowy i jego mechanizmy. Podstawy teorii i praktyki*. Warszawa, Polska: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2014, ISBN: 9788301179960.
- [19] https://www.sec.gov/oiea/investor-alerts-bulletins/ib_stoporders.html, [Online; accessed 21-December-2021].
- [20] J. Ziębiec, *Zasady obrotu giełdowego*. Warszawa, Polska: Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie SA, 2009, ISBN: 978-83-60510-15-5.
- [21] <https://bossa.pl/>, [Online; accessed 15-April-2020].
- [22] <https://www.bankier.pl/wiadomosc/Nowy-harmonogram-sesji-na-GPW-2803968.html>, [Online; accessed 21-December-2021].
- [23] F. Mainardi, M. Raberto, R. Gorenflo i E. Scalas, „Fractional calculus and continuous-time finance II: the waiting-time distribution,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, t. 287, nr. 3-4, s. 468 – 481, 2000, ISSN: 0378-4371.
- [24] E. Scalas, T. Kaizoji, M. Kirchler, J. Huber i A. Tedeschi, „Waiting times between orders and trades in double-auction markets,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, t. 366, s. 463–471, 2006, ISSN: 0378-4371. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2005.09.047>.
- [25] P. C. Ivanov, A. Yuen i P. Perakakis, „Impact of Stock Market Structure on Intertrade Time and Price Dynamics,” *PLOS ONE*, t. 9, nr. 4, s. 1–14, kw. 2014. DOI: [10.1371/journal.pone.0092885](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0092885).

- [26] J. Kwapien, M. Watorek, M. Bezbradica, M. Crane, T. Tan Mai i S. Drozd, „Analysis of inter-transaction time fluctuations in the cryptocurrency market,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, t. 32, nr. 8, s. 083 142, 2022. DOI: [10.1063/5.0104707](https://doi.org/10.1063/5.0104707). eprint: <https://doi.org/10.1063/5.0104707>.
- [27] <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.exponweib.html>, [Online; accessed 21-December-2021].
- [28] K. C. Chan, W. G. Christie i P. H. Schultz, „Market Structure and the Intraday Pattern of Bid-Ask Spreads for NASDAQ Securities,” *The Journal of Business*, t. 68, nr. 1, s. 35–60, 1995, ISSN: 00219398, 15375374.
- [29] T. Gubiec i M. Wiliński, „Intra-day variability of the stock market activity versus stationarity of the financial time series,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, t. 432, s. 216–221, 2015, ISSN: 0378-4371. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.03.033>.
- [30] T. Gubiec i R. Kutner, „Backward jump continuous-time random walk: An application to market trading,” *Physical Review E*, t. 82, nr. 4, s. 046 119, 2010.
- [31] T. Gubiec i R. Kutner, „Continuous-Time Random Walk with multi-step memory: an application to market dynamics,” *The European Physical Journal B*, t. 90, nr. 11, s. 228, 2017, ISSN: 1434-6036.
- [32] R. Cont, „Volatility Clustering in Financial Markets: Empirical Facts and Agent-Based Models,” w *Long Memory in Economics*, G. Teyssière i A. P. Kirman, red. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007, s. 289–309, ISBN: 978-3-540-34625-8. DOI: [10.1007/978-3-540-34625-8_10](https://doi.org/10.1007/978-3-540-34625-8_10).
- [33] T. Lux i M. Marchesi, „Volatility Clustering in Financial Markets: A Microsimulation of Interacting Agents,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, t. 03, nr. 04, s. 675–702, 2000. DOI: [10.1142/S0219024900000826](https://doi.org/10.1142/S0219024900000826). eprint: <https://doi.org/10.1142/S0219024900000826>.
- [34] A. Krawiecki, J. A. Hołyst i D. Helbing, „Volatility Clustering and Scaling for Financial Time Series due to Attractor Bubbling,” *Phys. Rev. Lett.*, t. 89, s. 158 701, 15 2002. DOI: [10.1103/PhysRevLett.89.158701](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.158701).
- [35] P. Embrechts, C. Klüppelberg i T. Mikosch, *Modelling Extremal Events: for Insurance and Finance* (Stochastic Modelling and Applied Probability). Springer Berlin Heidelberg, 2013, ISBN: 9783540609315.
- [36] D. J. Daley i D. Vere-Jones, *An introduction to the theory of point processes. Vol. I* (Probability and its Applications (New York)), Second. New York: Springer-Verlag, 2003, s. xxii+469, Elementary theory and methods, ISBN: 0-387-95541-0.
- [37] R. F. Engle i J. R. Russell, „Autoregressive Conditional Duration: A New Model for Irregularly Spaced Transaction Data,” *Econometrica*, t. 66, s. 1127–1162, 1998.

- [38] S. Focardi i F. J. Fabozzi, „An autoregressive conditional duration model of credit-risk contagion,” *Journal of Risk Finance*, t. 6, s. 208–225, lip. 2005. DOI: [10.1108/15265940510599829](https://doi.org/10.1108/15265940510599829).
- [39] A. Heinen, „Modelling Time Series Count Data: An Autoregressive Conditional Poisson Model,” University Library of Munich, Germany, MPRA Paper, 2003.
- [40] E. Vlahogianni, M. Karlaftis i K. Kepaptsoglou, „Nonlinear Autoregressive Conditional Duration Models for Traffic Congestion Estimation,” *Journal of Probability and Statistics*, t. 2011, sierp. 2011. DOI: [10.1155/2011/798953](https://doi.org/10.1155/2011/798953).
- [41] A. Dufour i R. F. Engle, „Time and the Price Impact of a Trade,” *The Journal of Finance*, t. 55, nr. 6, s. 2467–2498, 2000. DOI: [10.1111/0022-1082.00297](https://doi.org/10.1111/0022-1082.00297).
- [42] J. Beran, Y. Feng i S. Ghosh, „Modelling long-range dependence and trends in duration series: an approach based on EFARIMA and ESE-MIFAR models,” *Statistical Papers*, t. 56, nr. 2, s. 431–451, 2015, ISSN: 1613-9798. DOI: [10.1007/s00362-014-0590-x](https://doi.org/10.1007/s00362-014-0590-x).
- [43] A. Hawkes, „Spectra of some self-exciting and mutually-exciting point processes,” *Biometrika*, t. 58, s. 83, 1971.
- [44] A. Hawkes, „Point spectra of some mutually-exciting point processes,” *J. R. Stat. Soc. B*, t. 33, s. 438, 1971.
- [45] A. L. Hawkes A. G., „Cluster models for earthquakes—Regional comparisons,” *Bull. Int. Stat. Inst.*, t. 45, s. 454, 1973.
- [46] R. Kobayashi i R. Lambiotte, „TiDeH: Time-Dependent Hawkes Process for Predicting Retweet Dynamics,” w *ICWSM*, 2016.
- [47] L. Mitchell i M. E. Cates, „Hawkes process as a model of social interactions: a view on video dynamics,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, t. 43, nr. 4, s. 045 101, 2009. DOI: [10.1088/1751-8113/43/4/045101](https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/4/045101).
- [48] C. Blundell, J. Beck i K. A. Heller, „Modelling Reciprocating Relationships with Hawkes Processes,” w *Advances in Neural Information Processing Systems 25*, F. Pereira, C. J. C. Burges, L. Bottou i K. Q. Weinberger, red., Curran Associates, Inc., 2012, s. 2600–2608.
- [49] E. Bacry, I. Mastromatteo i J.-F. Muzy, „Hawkes Processes in Finance,” *Market Microstructure and Liquidity*, t. 01, nr. 01, s. 1 550 005, 2015. DOI: [10.1142/S2382626615500057](https://doi.org/10.1142/S2382626615500057).
- [50] A. G. Hawkes, „Hawkes processes and their applications to finance: a review,” *Quantitative Finance*, t. 18, nr. 2, s. 193–198, 2018. DOI: [10.1080/14697688.2017.1403131](https://doi.org/10.1080/14697688.2017.1403131).
- [51] E. W. Montroll i G. H. Weiss, „Random Walks on Lattices. II,” *Journal of Mathematical Physics*, t. 6, nr. 2, s. 167–181, 1965.
- [52] H. Scher i E. W. Montroll, „Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids,” *Physical Review B*, t. 12, nr. 6, s. 2455–2477, 1975.

- [53] G. Weiss, „A primer of random walkology,” w *Fractals in Science*, Springer, 1994, s. 119–162.
- [54] A. Blumen, J. Klafter i G. Zumofen, „Recombination in amorphous materials as a continuous-time random-walk problem,” *Phys. Rev. B*, t. 27, s. 3429–3435, 6 1983. DOI: [10.1103/PhysRevB.27.3429](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.27.3429).
- [55] B. Bijeljic, P. Mostaghimi i M. J. Blunt, „Signature of Non-Fickian Solute Transport in Complex Heterogeneous Porous Media,” *Phys. Rev. Lett.*, t. 107, s. 204502, 20 2011. DOI: [10.1103/PhysRevLett.107.204502](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.204502).
- [56] E. Barkai i Y.-C. Cheng, „Aging continuous time random walks,” *The Journal of Chemical Physics*, t. 118, nr. 14, s. 6167–6178, 2003.
- [57] C. Monthus i J.-P. Bouchaud, „Models of traps and glass phenomenology,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, t. 29, nr. 14, s. 3847, 1996.
- [58] O. Mülken i A. Blumen, „Continuous-time quantum walks: Models for coherent transport on complex networks,” *Physics Reports*, t. 502, nr. 2, s. 37–87, 2011, ISSN: 0370-1573. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2011.01.002>.
- [59] E. Gudowska-Nowak i K. Weron, „Random walk models of electron tunneling in a fluctuating medium,” *Phys. Rev. E*, t. 65, s. 011103, 1 2001. DOI: [10.1103/PhysRevE.65.011103](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.011103).
- [60] A. Helmstetter i D. Sornette, „Diffusion of epicenters of earthquake aftershocks, Omori’s law, and generalized continuous-time random walk models,” *Physical Review E*, t. 66, nr. 6, s. 061104, 2002.
- [61] B. Berkowitz, A. Cortis, M. Dentz i H. Scher, „Modeling non-Fickian transport in geological formations as a continuous time random walk,” *Reviews of Geophysics*, t. 44, nr. 2, 2006. DOI: [10.1029/2005RG000178](https://doi.org/10.1029/2005RG000178).
- [62] Chang, Q., Cuppen, H. M. i Herbst, E., „Continuous-time random-walk simulation of H_2 formation on interstellar grains,” *A&A*, t. 434, nr. 2, s. 599–611, 2005. DOI: [10.1051/0004-6361:20041842](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20041842).
- [63] R. Balescu, „Anomalous transport in turbulent plasmas and continuous time random walks,” *Phys. Rev. E*, t. 51, s. 4807–4822, 5 1995. DOI: [10.1103/PhysRevE.51.4807](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.51.4807).
- [64] H. Teimouri i A. B. Kolomeisky, „All-time dynamics of continuous-time random walks on complex networks,” *The Journal of Chemical Physics*, t. 138, nr. 8, s. 084110, 2013. DOI: [10.1063/1.4792726](https://doi.org/10.1063/1.4792726).
- [65] C. Nicolaides, L. Cueto-Felgueroso i R. Juanes, „Anomalous physical transport in complex networks,” *Phys. Rev. E*, t. 82, s. 055101, 5 2010. DOI: [10.1103/PhysRevE.82.055101](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.055101).

- [66] I. Sokolov, A. Blumen i J. Klafter, „Linear response in complex systems: CTRW and the fractional Fokker–Planck equations,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, t. 302, nr. 1, s. 268–278, 2001, Proc. Int. Workshop on Frontiers in the Physics of Complex Systems, ISSN: 0378-4371. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(01\)00470-8](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(01)00470-8).
- [67] R. Yulmetyev, P. Hänggi i F. Gafarov, „Stochastic dynamics of time correlation in complex systems with discrete time,” *Phys. Rev. E*, t. 62, s. 6178–6194, 5 2000. DOI: [10.1103/PhysRevE.62.6178](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.62.6178).
- [68] B. Szabat, K. Weron i P. Hetman, „Wait-and-switch relaxation model: Relationship between nonexponential relaxation patterns and random local properties of a complex system,” *Phys. Rev. E*, t. 75, s. 021 114, 2 2007. DOI: [10.1103/PhysRevE.75.021114](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.75.021114).
- [69] J. Klafter, G. Zumofen i A. Blumen, „Non-Brownian transport in complex systems,” *Chemical Physics*, t. 177, nr. 3, s. 821–829, 1993, ISSN: 0301-0104. DOI: [https://doi.org/10.1016/0301-0104\(93\)85044-9](https://doi.org/10.1016/0301-0104(93)85044-9).
- [70] G. R. Rainer Klages i I. M. Sokolov, *Anomalous Transport: Foundations and Applications*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2008, ISBN: 9783527407224.
- [71] G. Hornung, B. Berkowitz i N. Barkai, „Morphogen gradient formation in a complex environment: An anomalous diffusion model,” *Phys. Rev. E*, t. 72, s. 041 916, 4 2005. DOI: [10.1103/PhysRevE.72.041916](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.041916).
- [72] N. Iyengar, C. Peng, R. Morin, A. Goldberger i L. Lipsitz, „Age-related alterations in the fractal scaling of cardiac interbeat interval dynamics,” *American Journal of Physiology-Regulatory, Integrative and Comparative Physiology*, t. 271, nr. 4, R1078–R1084, 1996.
- [73] W. Paul i J. Baschnagel, *Stochastic Processes: From Physics to Finance*, 2 wyd. Springer International Publishing, 2013, ISBN: 978-3-319-00327-6.
- [74] E. Scalas, R. Gorenflo i F. Mainardi, „Fractional calculus and continuous-time finance,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, t. 284, nr. 1-4, s. 376–384, 2000, ISSN: 0378-4371.
- [75] J. Masoliver, M. Montero i G. H. Weiss, „Continuous-time random-walk model for financial distributions,” *Physical Review E*, t. 67, nr. 2, s. 021 112, 2003.
- [76] P. Repetowicz i P. Richmond, „Modeling share price evolution as a continuous time random walk (CTRW) with non-independent price changes and waiting times,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, t. 344, nr. 1-2, s. 108–111, 2004, Applications of Physics in Financial Analysis 4 (APFA4), ISSN: 0378-4371.

- [77] J. Masoliver, M. Montero, J. Perello i G. H. Weiss, „The CTRW in finance: Direct and inverse problems with some generalizations and extensions,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, t. 379, nr. 1, s. 151–167, 2007, ISSN: 0378-4371.
- [78] L. Hufnagel, D. Brockmann i T. Geisel, „The scaling laws of human travel,” *Nature*, t. 439, s. 462–465, 2006.
- [79] R. Kutner i J. Masoliver, „The continuous time random walk, still trendy: fifty-year history, state of art and outlook,” *The European Physical Journal B*, t. 90, nr. 3, s. 50, 2017, ISSN: 1434-6036.
- [80] R. Metzler i J. Klafter, „The random walk’s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach,” *Physics Reports*, t. 339, nr. 1, s. 1–77, 2000.
- [81] J. K. E. Tunaley, „Theory of ac Conductivity Based on Random Walks,” *Phys. Rev. Lett.*, t. 33, s. 1037–1039, 17 1974. DOI: [10.1103/PhysRevLett.33.1037](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.33.1037).
- [82] J. K. E. Tunaley, „Asymptotic solutions of the continuous-time random walk model of diffusion,” *Journal of Statistical Physics*, t. 11, nr. 5, s. 397–408, 1974, ISSN: 1572-9613. DOI: [10.1007/BF01026731](https://doi.org/10.1007/BF01026731).
- [83] K. Kehr, R. Kutner i K. Binder, „Diffusion in concentrated lattice gases. Self-diffusion of noninteracting particles in three-dimensional lattices,” *Physical Review B*, t. 23, nr. 10, s. 4931–4945, 1981.
- [84] R. Kutner, „Correlated hopping in honeycomb lattice: tracer diffusion coefficient at arbitrary lattice gas concentration,” *Journal of Physics C: Solid State Physics*, t. 18, nr. 34, s. 6323, 1985.
- [85] J. W. Haus i K. W. Kehr, „Diffusion in regular and disordered lattices,” *Physics Reports*, t. 150, nr. 5-6, s. 263–406, 1987.
- [86] J. Masoliver, M. Montero, J. Perelló i G. H. Weiss, „The continuous time random walk formalism in financial markets,” *Journal of Economic Behavior & Organization*, t. 61, nr. 4, s. 577–598, 2006, ISSN: 0167-2681.
- [87] M. Montero i J. Masoliver, „Nonindependent continuous-time random walks,” *Physical Review E*, t. 76, nr. 6, s. 061 115, 2007.
- [88] M. Montero, „Parrondo-like behavior in continuous-time random walks with memory,” *Phys. Rev. E*, t. 84, s. 051 139, 5 2011. DOI: [10.1103/PhysRevE.84.051139](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.84.051139).
- [89] V. Tejedor i R. Metzler, „Anomalous diffusion in correlated continuous time random walks,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, t. 43, nr. 8, s. 082 002, 2010.
- [90] M. Magdziarz, R. Metzler, W. Szczotka i P. Zebrowski, „Correlated continuous-time random walks in external force fields,” *Phys. Rev. E*, t. 85, s. 051 103, 5 2012.

- [91] J.-H. Jeon, N. Leijnse, L. B. Oddershede i R. Metzler, „Anomalous diffusion and power-law relaxation of the time averaged mean squared displacement in worm-like micellar solutions,” *New Journal of Physics*, t. 15, nr. 4, s. 045 011, 2013.
- [92] A. V. Chechkin, M. Hofmann i I. M. Sokolov, „Continuous-time random walk with correlated waiting times,” *Phys. Rev. E*, t. 80, s. 031 112, 3 2009.
- [93] M. Montero i J. Masoliver, „Continuous Time Random Walks with memory and financial distributions,” *The European Physical Journal B*, t. 90, nr. 11, s. 207, 2017, ISSN: 1434-6036. DOI: [10.1140/epjb/e2017-80259-4](https://doi.org/10.1140/epjb/e2017-80259-4).
- [94] H.-H. Jo, „Analytically solvable autocorrelation function for weakly correlated interevent times,” *Phys. Rev. E*, t. 100, s. 012 306, 1 2019. DOI: [10.1103/PhysRevE.100.012306](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.012306).
- [95] T. Björk, „Marked Point Processes,” w *Point Processes and Jump Diffusions: An Introduction with Finance Applications*. Cambridge University Press, 2021, rozd. 7, 64–71. DOI: [10.1017/9781009002127.009](https://doi.org/10.1017/9781009002127.009).
- [96] G. Last i A. Brandt, w *Marked point processes on the real line: The dynamic approach*. Springer-Verlag, 1995, ISBN: 0-387-94547-4.
- [97] B. Dybiec i E. Gudowska-Nowak, „Discriminating between normal and anomalous random walks,” *Phys. Rev. E*, t. 80, s. 061 122, 6 2009. DOI: [10.1103/PhysRevE.80.061122](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.80.061122).
- [98] G. M. Viswanathan, V. Afanasyev, S. V. Buldyrev, E. J. Murphy, P. A. Prince i H. E. Stanley, „Lévy flight search patterns of wandering albatrosses,” *Nature*, t. 381, nr. 6581, s. 413–415, 1996, ISSN: 1476-4687. DOI: [10.1038/381413a0](https://doi.org/10.1038/381413a0).
- [99] A. M. Edwards, R. A. Phillips, N. W. Watkins i in., „Revisiting Lévy flight search patterns of wandering albatrosses, bumblebees and deer,” *Nature*, t. 449, nr. 7165, s. 1044–1048, 2007, ISSN: 1476-4687. DOI: [10.1038/nature06199](https://doi.org/10.1038/nature06199).
- [100] B. Dybiec, E. Gudowska-Nowak, E. Barkai i A. A. Dubkov, „Lévy flights versus Lévy walks in bounded domains,” *Phys. Rev. E*, t. 95, s. 052 102, 5 2017. DOI: [10.1103/PhysRevE.95.052102](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.95.052102).
- [101] R. Kutner i F. Świtała, „Stochastic simulations of time series within Weierstrass–Mandelbrot walks,” *Quantitative Finance*, t. 3, nr. 3, s. 201–211, 2003. DOI: [10.1088/1469-7688/3/3/306](https://doi.org/10.1088/1469-7688/3/3/306).
- [102] R. Kutner i M. Regulski, „Bose–Einstein condensation shown by Monte Carlo simulation,” *Computer Physics Communications*, t. 121-122, s. 586–590, 1999, Proceedings of the Europhysics Conference on Computational Physics CCP 1998, ISSN: 0010-4655. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0010-4655\(99\)00412-9](https://doi.org/10.1016/S0010-4655(99)00412-9).

- [103] R. Kutner, „Hierarchical spatio-temporal coupling in fractional wanderings. (I) Continuous-time Weierstrass flights,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, t. 264, nr. 1, s. 84–106, 1999, ISSN: 0378-4371. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(98\)00348-3](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(98)00348-3).
- [104] R. Kutner, M. Ausloos, D. Grech, T. Di Matteo, C. Schinckus i H. Eugene Stanley, „Econophysics and sociophysics: Their milestones & challenges,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, t. 516, s. 240–253, 2019, ISSN: 0378-4371. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.10.019>.
- [105] F. Mainardi, „On the Advent of Fractional Calculus in Econophysics via Continuous-Time Random Walk,” *Mathematics*, t. 8, nr. 4, 2020, ISSN: 2227-7390. DOI: [10.3390/math8040641](https://doi.org/10.3390/math8040641).
- [106] P. Oświęcimka, J. Kwapień i S. Drożdż, „Multifractality in the stock market: price increments versus waiting times,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, t. 347, s. 626–638, 2005, ISSN: 0378-4371. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.08.025>.
- [107] M. Montero, J. Perelló, J. Masoliver, F. Lillo, S. Micciché i R. N. Mantegna, „Scaling and data collapse for the mean exit time of asset prices,” *Phys. Rev. E*, t. 72, s. 056 101, 5 2005. DOI: [10.1103/PhysRevE.72.056101](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.056101).
- [108] T. M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*. Germany: Springer: Berlin/Heidelberg, 1976, 12–338.
- [109] M. Denys, T. Gubiec, R. Kutner, M. Jagielski i H. E. Stanley, „Universality of market superstatistics,” *Phys. Rev. E*, t. 94, s. 042 305, 4 2016. DOI: [10.1103/PhysRevE.94.042305](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.042305).
- [110] J. Ludescher i A. Bunde, „Universal behavior of the interoccurrence times between losses in financial markets: Independence of the time resolution,” *Phys. Rev. E*, t. 90, s. 062 809, 6 2014. DOI: [10.1103/PhysRevE.90.062809](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.90.062809).
- [111] J. W. Kantelhardt, S. A. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde, S. Havlin, A. Bunde i H. Stanley, „Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, t. 316, nr. 1, s. 87–114, 2002, ISSN: 0378-4371. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)01383-3](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)01383-3).
- [112] Z.-Q. Jiang, W.-J. Xie, W.-X. Zhou i D. Sornette, „Multifractal analysis of financial markets: a review,” *Reports on Progress in Physics*, t. 82, nr. 12, s. 125 901, 2019. DOI: [10.1088/1361-6633/ab42fb](https://doi.org/10.1088/1361-6633/ab42fb).
- [113] H. A. Makse, S. Havlin, M. Schwartz i H. E. Stanley, „Method for generating long-range correlations for large systems,” *Phys. Rev. E*, t. 53, s. 5445–5449, 5 1996. DOI: [10.1103/PhysRevE.53.5445](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.53.5445).
- [114] P. Oświęcimka, J. Kwapień i S. Drożdż, „Wavelet versus detrended fluctuation analysis of multifractal structures,” *Phys. Rev. E*, t. 74, s. 016 103, 1 2006. DOI: [10.1103/PhysRevE.74.016103](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.74.016103).

- [115] J. Kwapień i S. Drożdż, „Physical approach to complex systems,” *Physics Reports*, t. 515, nr. 3, s. 115–226, 2012, Physical approach to complex systems, ISSN: 0370-1573. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2012.01.007>.
- [116] J. Ludescher, M. I. Bogachev, J. W. Kantelhardt, A. Y. Schumann i A. Bunde, „On spurious and corrupted multifractality: The effects of additive noise, short-term memory and periodic trends,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, t. 390, nr. 13, s. 2480–2490, 2011, ISSN: 0378-4371. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2011.03.008>.
- [117] R. Rak i D. Grech, „Quantitative approach to multifractality induced by correlations and broad distribution of data,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, t. 508, s. 48–66, 2018, ISSN: 0378-4371. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.05.059>.
- [118] R. Lopes i N. Betrouni, „Fractal and multifractal analysis: A review,” *Medical Image Analysis*, t. 13, nr. 4, s. 634–649, 2009, ISSN: 1361-8415. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.media.2009.05.003>.
- [119] D. Fetterhoff, R. Kraft, R. Sandler i in., „Distinguishing cognitive state with multifractal complexity of hippocampal interspike interval sequences,” *Frontiers in Systems Neuroscience*, t. 9, s. 130, 2015, ISSN: 1662-5137. DOI: [10.3389/fnsys.2015.00130](https://doi.org/10.3389/fnsys.2015.00130).
- [120] P. C. Ivanov, L. A. Nunes Amaral, A. L. Goldberger i in., „From 1/f noise to multifractal cascades in heartbeat dynamics,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, t. 11, nr. 3, s. 641–652, 2001. DOI: [10.1063/1.1395631](https://doi.org/10.1063/1.1395631).
- [121] Z. Struzik, J. Hayano, R. Soma, S. Kwak i Y. Yamamoto, „Aging of complex heart rate dynamics,” *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, t. 53, nr. 1, s. 89–94, 2006. DOI: [10.1109/TBME.2005.859801](https://doi.org/10.1109/TBME.2005.859801).
- [122] L. G. S. França, J. G. V. Miranda, M. Leite i in., „Fractal and Multifractal Properties of Electrographic Recordings of Human Brain Activity: Toward Its Use as a Signal Feature for Machine Learning in Clinical Applications,” *Frontiers in Physiology*, t. 9, s. 1767, 2018, ISSN: 1664-042X. DOI: [10.3389/fphys.2018.01767](https://doi.org/10.3389/fphys.2018.01767).
- [123] B. Enescu, K. Ito i Z. R. Struzik, „Wavelet-based multiscale resolution analysis of real and simulated time-series of earthquakes,” *Geophysical Journal International*, t. 164, nr. 1, s. 63–74, sty. 2006, ISSN: 0956-540X. DOI: [10.1111/j.1365-246X.2005.02810.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2005.02810.x).
- [124] D. Sornette i G. Ouillon, „Multifractal Scaling of Thermally Activated Rupture Processes,” *Phys. Rev. Lett.*, t. 94, s. 038 501, 3 2005. DOI: [10.1103/PhysRevLett.94.038501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.038501).
- [125] X. Jing-Jing i H. Fei, „Multifractal Characteristics of Intermittent Turbulence in the Urban Canopy Layer,” *Atmospheric and Oceanic Science Letters*, t. 8, nr. 2, s. 72–77, 2015. DOI: [10.3878/AOSL20140080](https://doi.org/10.3878/AOSL20140080).

- [126] Y. Long i Y. Chen, „Multifractal scaling analyses of urban street network structure: The cases of twelve megacities in China,” *PLOS ONE*, t. 16, nr. 2, s. 1–23, lut. 2021. DOI: [10.1371/journal.pone.0246925](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0246925).
- [127] S. Drożdż, L. Minati i M. Wątopek, „Bitcoin market route to maturity? Evidence from return fluctuations, temporal correlations and multi-scaling effects,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, t. 28, nr. 7, s. 071 101, 2018. DOI: [10.1063/1.5036517](https://doi.org/10.1063/1.5036517).
- [128] M. Wątopek, S. Drożdż, J. Kwapien, L. Minati, P. Oświęcimka i M. Stanuszek, „Multiscale characteristics of the emerging global cryptocurrency market,” *Physics Reports*, t. 901, nr. 7, s. 1–82, 2021, ISSN: 0370-1573. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2020.10.005>.
- [129] D. Grech i Z. Mazur, „Can one make any crash prediction in finance using the local Hurst exponent idea?” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, t. 336, nr. 1, s. 133–145, 2004, Proceedings of the XVIII Max Born Symposium "Statistical Physics outside Physics", ISSN: 0378-4371. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.01.018>.
- [130] J. A. Hołyst i M. Żebrowska, „Recurrence Plots And Hurst Exponents For Financial Markets And Foreign-Exchange Data,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, t. 03, nr. 03, s. 419–419, 2000. DOI: [10.1142/S0219024900000310](https://doi.org/10.1142/S0219024900000310). eprint: <https://doi.org/10.1142/S0219024900000310>.
- [131] Y.-P. Ruan i W.-X. Zhou, „Long-term correlations and multifractal nature in the intertrade durations of a liquid Chinese stock and its warrant,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, t. 390, nr. 9, s. 1646–1654, 2011, ISSN: 0378-4371. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2011.01.001>.
- [132] F. Chen, F. X. Diebold i F. Schorfheide, „A Markov-switching multifractal inter-trade duration model, with application to US equities,” *Journal of Econometrics*, t. 177, nr. 2, s. 320–342, 2013, Dynamic Econometric Modeling and Forecasting, ISSN: 0304-4076. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2013.04.016>.
- [133] L. Czarnecki i D. Grech, „Multifractal Dynamics of Stock Markets,” *ACTA PHYSICA POLONICA A*, t. 117, nr. 7, s. 623, 2010, Proceedings of the 4th Polish Symposium on Econo- and Sociophysics. DOI: [10.1063/1.5036517](https://doi.org/10.1063/1.5036517).
- [134] D. Grech i G. Pamuła, „Multifractality of Nonlinear Transformations with Application in Finances,” *Acta Physica Polonica A*, t. 123, nr. 3, 529–537, 2013. DOI: [10.1063/1.5036517](https://doi.org/10.1063/1.5036517).
- [135] A. Kasprzak, R. Kutner, J. Perelló i J. Masoliver, „Higher-order phase transitions on financial markets,” *European Physical Journal B*, t. 76, nr. 4, s. 513–527, sierp. 2010. DOI: [10.1140/epjb/e2010-00064-y](https://doi.org/10.1140/epjb/e2010-00064-y).

- [136] G. Jaeger, „The Ehrenfest Classification of Phase Transitions: Introduction and Evolution,” *Archive for History of Exact Sciences*, t. 53, nr. 1, s. 51–81, 1998, ISSN: 00039519, 14320657. DOI: [10.1063/1.5036517](https://doi.org/10.1063/1.5036517).