

Prof. dr hab. Tadeusz Domański
Katedra Fizyki Teoretycznej
Instytut Fizyki
Uniwersytet M. Curie-Skłodowskiej
20-031 Lublin

Lublin, 5 lutego 2024 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej magistra Andrzeja Chlebickiego
pt. „ **$O(N)$ models and their anisotropic extensions**”

Przedłożona rozprawa doktorska dostarcza teoretycznej analizy uniwersalnych właściwości układów opisanych modelami N -składnikowych ortogonalnych grup, tzw. $O(N)$. Problematyka dotyczy klasycznych przejść fazowych w układach izotropowych wokół przypadku $(d, N) = (2, 2)$ [d oznacza wymiar], gdzie realizuje się przejście typu Kosterlitz-Thoulessa. W szczególności Doktorant przeprowadził konfrontację przewidywań analizy Cardy’ego i Hambera [Phys. Rev. Lett. **45**, 499 (1980)] ze swoimi wynikami uzyskanymi w podejściu niezaburzeniowym. Analizę rozszerzono również na układy anizotropowe w modelach $O(2)$ ze słabymi zaburzeniami kubicznymi. Na podkreślenie zasługuje użycie zaawansowanej metody badawczej opartej na podejściu funkcjonalnej grupy renormalizacyjnej, umożliwiającej wyjście poza ograniczenia rachunku zaburzeniowego. Badania przeprowadzone przez Doktoranta mogą mieć istotne znaczenie do zrozumienia uniwersalnych cech układów wielociałowych w zależności od ich wymiarowości oraz liczby składowych pól.

Pracę doktorską przygotowano w Instytucie Fizyki Teoretycznej na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego. Promotorem rozprawy jest dr hab. Paweł Jakubczyk, prof. UW. Na treść rozprawy składają się rozdziały wstępne 1 i 2 (w których sformułowano problem badawczy i opisano szczegóły metodologiczne) oraz dwa zasadnicze rozdziały, przedstawiające wyniki Doktoranta dla izotropowego modelu $O(N)$ [rozdział 3] i anizotropowego modelu $O(2)$ [rozdział 4]. W załącznikach przedstawiono postać równań grupy renormalizacyjnej dla izotropowego modelu $O(N)$ (dodatek A) i omówiono techniczne szczegóły dotyczące numerycznego rozwiązywania równań (dodatek B). Oryginalna część rozprawy bazuje w znacznym stopniu na materiale trzech artykułów opublikowanych ze współautorstwem Doktoranta w czasopismach: SciPost Physics **10**, 134 (2021); Phys. Rev. E **106**, 064135 (2022); Phys. Rev. E **107**, 014121 (2023). Mgr Andrzej Chlebicki jest również współautorem dwóch innych artykułów opublikowanych w Phys. Rev. E **100**, 052106 (2019); Phys. Rev. A **104**, 063317 (2021). Poniżej postaram się przedstawić ogólny przegląd pracy ze wróceniem uwagi na jej nowatorskie aspekty.

W rozdziale pierwszym Doktorant przedstawił ogólny zarys problematyki badawczej. Wyjaśnił istotę modeli $O(N)$ charakteryzujących klasy uniwersalności układów fizycznych w powiązaniu z ich wymiarem przestrzennym. Podał konkretne przykłady modeli $O(N)$ związane z przejściami fazowymi do uporządkowania magnetycznego, zero-wymiarowym problemem polimerów, przejściem typu ciecz-para, przejściem fazowym do stanu nadciężkości i chiralnymi przejściami w chromodynamice kwantowej. Klasy uniwersalności krytycznych przejść w układach oddziaływań krótkozasięgowych są parametryzowane wymiarem przestrzennym d i liczbą komponentów N parametru porządku. W teoretycznej analizie zjawisk krytycznych oba parametry traktowane są często jako ciągłe parametry. Jest to szczególnie popularne w perturbacyjnym podejściu do zagadnień fizycznych. Doktorant przedstawił powszechnie stosowane zaburzeniowe metody grupy renormalizacyjnej: rozwinięcie $4 - \epsilon$, rozwinięcie $2 + \epsilon$ oraz rozwinięcie względem dużego N . Alternatywnym schematem są metody niezaburzeniowe, np. sformułowanie Kadanoffa-Wilsona czy podejście efektywnego działania uśrednionego. W ogólności nie są one ściśle rozwiązywalne i zachodzi konieczność stosowania pewnych przybliżeń. Doktorant wyróżnił trzy typy faz w modelach $O(N)$: nieuporządkowane (z eksponencjalnym zanikiem funkcji korelacyjnej), uporządkowane dalekozasięgowo oraz uporządkowane kwazi-dalekozasięgowo (charakteryzujące się potęgowym zanikiem funkcji korelacyjnej). Omówił następnie przejście typu Kosterlitz-Thoulessa w układach dwuwymiarowych, podkreślając topologiczną naturę wzbudzeń. Przedyskutował uogólnienie równań na przypadek $d = 2 + \epsilon$ oraz przedstawił konstrukcję Cardy'ego-Hambera (CH) zunifikowanych równań funkcji β dla modeli $O(N)$. Jednym z celów pracy doktorskiej było zrozumienie scenariusza CH i określenie wyznaczników krytycznych jako funkcji (d, N) oraz zbadanie funkcji korelacyjnej dla fazy kwazi-dalekozasięgowego uporządkowania. Kolejnym celem rozprawy doktorskiej było zbadanie anizotropowych rozszerzeń modeli $O(N)$. Przedmiotem zainteresowania były modele $O(2)$ z kubicznymi zaburzeniami, charakteryzujące się typem niezmienniczości przedstawionym w równaniu (1.16). W trójwymiarowych układach tego rodzaju modele można zbadać podejściem zaburzeniowym w schemacie rozwinięcia $4 - \epsilon$. Celem Doktoranta była analiza skalowania, w ciągły sposób przechodząc od przypadku trójwymiarowego do dwuwymiarowego i analizowanie wpływu zaburzenia kubicznego.

Rozdział drugi ma charakter metodologiczny i przedstawia szczegóły formalizmu niezaburzeniowej grupy renormalizacyjnej użytej przez Doktoranta do postawionych zadań badawczych. Istota metody bazuje na podejściu tzw. efektywnego uśrednionego działania. Algorytm procedury wyjaśniono na przykładzie zagadnienia pojedynczego pola skalarnego. Włączając do sumy statystycznej wyraz regularyzacji podczerwieni wyprowadzono równanie (*flow equation*) Morrisa-Wettericha (MW), startując z różniczkowania energii swobodnej względem modułu pędu $k = |\mathbf{k}|$. Doktorant podał następnie uogólnienie równania MW na przypadek N -komponentowego pola skalarnego i przedyskutował schematy przybliżeń o charakterze niezaburzeniowym stosowane w literaturze specjalistycznej. Szczególną

uwagę poświęcił podejściu rozwinięcia różniczkowego (*derivative expansion*), poprzez parametryzację efektywnego działania umożliwiające rozwiązanie równania MW w ograniczonej przestrzeni funkcjonalnej. W dyskusji poświęconej procedurze niezaburzeniowej grupy renormalizacyjnej Doktorant podkreślił ważne znaczenie punktów stałych, na podstawie których można określić wyznaczniki krytyczne. W sformułowaniach przybliżonych jest to jednak zadanie trudne do realizacji. Doktorant podał dwie różne ścieżki poszukiwania punktów stałych do wyznaczenia uniwersalnych właściwości badanych układów. Kolejnym istotnym elementem procedury może być odpowiedni dobór regularyzacji podczerwieni. Z formalnego punktu widzenia rozwiązanie zagadnienia nie powinno zależeć od konkretnej wersji regulatora, ale stosowane przybliżenia nie gwarantują takiej sytuacji. W podrozdziale 2.3 przedstawiono najbardziej popularne warianty wyboru regulatorów podczerwieni i przedyskutowano problem zbieżności rozwinięcia różniczkowego oraz metody oszacowania uzyskiwanych błędów. Metodologię rozwinięcia różniczkowego skonfrontowano następnie z zagadnieniem przejścia Kosterlitz-Thoulessa, podkreślając trudności badań w granicy niskotemperaturowej. W podrozdziale 2.4 przedyskutowano pewne dodatkowe subtelności, dotyczące odpowiedniego doboru parametryzacji (*Ansätze*) dla anizotropowych modeli.

Oryginalne wyniki pracy doktorskiej są opisane w rozdziałach trzecim i czwartym. Rozdział 3 dostarcza nowego spojrzenia na scenariusz Cardy’ego-Hambersa. Doktorant przedstawił diagram modelu $O(N)$ względem współrzędnych (d, N) . W przypadku $N = 2$ przejście fazowe typu Kosterlitz-Thoulessa realizuje się dla $d = 2$, gdzie występuje pojedynczy punkt stały (wokół którego wzbudzenia wirowe są marginalne). Dla $N > 2$, $d > 2$ możliwe jest przejście fazowe drugiego rodzaju między stanem nieuporządkowanym i uporządkowanym dalekozasięgowo, gdzie przewidziano linię nieanalityczności na diagramie modelu. Natomiast dla $N < 2$, $d < 2$ układ wykazuje przejście fazowe między stanem nieuporządkowanym i uporządkowanym kwazidalekozasięgowo. Linia graniczna tego przejścia wyznacza dolny wymiar krytyczny $d_c(N)$. Pozostałe obszary diagramu nie odgrywają istotnego znaczenia, ponieważ twierdzenie Mermin-Wagnera wyklucza istnienie uporządkowania dalekozasięgowego w układach o wymiarowości poniżej $d = 2$.

W pierwszym kroku przeprowadzono test wiarygodności metody rozwinięcia różniczkowego, wyznaczając eksponent krytyczny ν^{-1} (odwrotności długości korelacji) i anomalny wymiar η dla układu dwuwymiarowego w zakresie $0 \leq N \leq 2$. Wyniki przedstawiono na rysunku 3.6 i porównano z wartościami ścisłymi (Ref. [135]), wykazując w pełni satysfakcjonującą zgodność dla ν^{-1} oraz pewne przeszacowanie anomalnego wymiaru η . Doktorant wskazał, że przyczyną liczbowej rozbieżności mógł być stosunkowo niski rząd $[O(\partial^2)]$ rozwinięcia różniczkowego. W dalszej kolejności przeprowadzono systematyczną analizę zależności $\nu^{-1}(d, N)$, $\eta(d, N)$ oraz wartości własnej $e_2(d, N)$ i profilu punktów stałych w prawym górnym rogu diagramu fazowego, tzn. dla $N > 2$, $d > 2$. Zasadniczym celem było poszukiwanie nieanalityczności wzdłuż linii krytyczności przewidzianej

w perturbacyjnym scenariuszu Cardy’ego-Hambera (CH). Zależność ν^{-1} i η od wymiaru d dla wybranych wartości N (rysunek 3.7) nie wskazała wyraźnych punktów nieanalityczności (poza dwuwymiarowym przypadkiem). Stwierdzono natomiast jakościową zmianę przebiegu obu wielkości w pobliżu $\tilde{d}_c(N)$, gdzie zależność typowa dla $N = 2$ przechodzi w charakterystykę układu $N = \infty$. Taka ewolucja odbywa się w sposób ciągły (*crossover*). Podobny wniosek wyciągnięto z przebiegu zależności ν^{-1} i η od N dla wybranych d (rysunek 3.8). W tym przypadku wykazano jakościową zmianę przebiegu wymiarowej zależności w charakterystycznych punktach $N_c(d)$. Ich położenie znajduje się nieco powyżej linii krytyczności CH (rysunek 3.10). Dodatkowym argumentem sugerującym brak wyraźnego przejścia fazowego przewidzianego w perturbacyjnym scenariuszu CH jest niezerowa wartość tzw. *subdominant eigenvalue* e_2 , którą przedstawiono na rysunku 3.11 w funkcji N dla wybranych wartości d . Kolejnego potwierdzenia tego wniosku dostarczyła ewolucja struktury punktów stałych, wskazując na ciągłą ewolucję od wyników uzyskanych perturbacyjnie na podstawie rozwinięć $2 + \epsilon$ oraz $4 - \tilde{\epsilon}$. W podsumowaniu wskazano, że ewentualne nieanalityczności mogą jedynie występować w granicy $(d, N) \rightarrow (2, 2)$.

Podrozdział 3.4 dotyczy przypadku $d < 2$, $N < 2$ i koncentruje się na zbadaniu uniwersalnych właściwości w pobliżu przejścia do fazy uporządkowania kwazidalekozasięgowego. Główne obliczenia zostały przeprowadzone za pomocą przybliżenia lokalnego potencjału. Analiza wymiarowej zależności $\eta(d)$ oraz $\nu^{-1}(d)$ dla przykładowych wartości N (z zakresu $1 < N < 2$) wykazała jakościową zgodność z przewidywaniami perturbacyjnego scenariusza CH. Pewne ilościowe różnice dostrzeżono w asymptotyce $\nu^{-1}(d) \rightarrow 0$, stwierdzając bardziej gwałtowny zanik ze zmniejszaniem N (rysunek 3.15). Doktorant przedyskutował strategię przezwyciężenia numerycznego problemu wyznaczania punktów stałych niskotemperaturowej fazy uporządkowania kwazidalekozasięgowego. Wyznaczony dolny wymiar krytyczny $d_c(N)$ porównał z wynikami CH oraz z obliczeniami grupy renormalizacyjnej w przestrzeni rzeczywistej. Rezultaty wymienionych metod były konsistentne. Wykazano też, że niskowymiarowa linia krytyczna $N_c(d)$ przechodzi w punkt Kosterlitz-Thoulessa $(d, N) = (2, 2)$.

Rozdział czwarty analizuje rolę słabych zaburzeń kubicznych w ramach modelu $O(2)$. W tym celu zastosowano nieperturbacyjne podejście grupy renormalizacyjnej w schemacie rozwinięcia różniczkowego do rzędu $O(\partial^2)$. W ramach tego formalizmu wykorzystano dwa sposoby uwzględnienia anizotropii bazujące na: a) wyrażeniu pełnego funkcjonału we współrzędnych biegunowych (ρ, θ) oraz b) rozwinięciu funkcji parametryzujących względem niezmiennika anizotropii τ (do wyrazów liniowych). Pierwszym krokiem przeprowadzonej analizy było sprawdzenie stabilności rozwiązań przy użyciu obu schematów na przykładzie układu trójwymiarowego. Wyniki numeryczne zilustrowano, przedstawiając energie własne e_i układu izotropowego i anizotropowego (gdzie $i = 1, 2, 3, 4$) względem parametru α regulatora Wettericha. Wpływ parametru α okazał się praktycznie nieistotny (rysunek 4.1). Pewne rozbieżności dostrzeżono natomiast pomiędzy wynikami rozwinięcia do rzędu $O(\partial^2)$

oraz przybliżenia lokalnego potencjału (LPA), co zilustrowano na przykładzie zależności e_1 układu anizotropowego (rysunek 4.2). Zestawienie wartości liczbowych e_1 z wynikami innych technik obliczeniowych (tabela 4.1) sugeruje, że wiarygodną metodą jest rozwinięcie do rzędu $O(\partial^2)$.

W podrozdziale 4.2 przedstawiono ewolucję wartości własnych $e_i(d)$ na ciągłą zmianę wymiaru $d \in \langle 2, 3 \rangle$ dla układów izotropowego i anizotropowego uzyskanych dwoma metodami (rozwinięcia we współrzędnych biegunowych i rozwinięcia względem niezmiennika anizotropii τ). Obie metody wykazały zgodne zachowanie $e_i(d)$ w zakresie $d \geq 2,5$. Poważne różnice pojawiły się przy zbliżaniu do przypadku dwuwymiarowego, począwszy od $d \sim 2,4$. Na przykład wartość własna e_1 układu anizotropowego wykazała niemonotoniczność w granicy $d \rightarrow 2^+$ oraz istotne różnice jakościowe w przewidywaniach obu metod obliczeniowych. Po przeanalizowaniu wartości e_i układu anizotropowego względem parametru regularyzacji Wettericha (rysunek 4.4) stwierdzono, że wyniki nie są zbieżne na poziomie zastosowanego rozwinięcia względem niezmiennika anizotropii τ . Obie metody wskazały jednak subtelne oznaki marginalnych operatorów przy zbliżaniu się do granicy dwuwymiarowej, świadczące o przejściu Kosterlitz-Thoulessa.

W dalszej części rozdziału czwartego porównano dwie implementacje rozwinięcia różniczkowego oparte na wariancie: a) podstawienia oraz b) obciążenia. Różnice wyników przedstawiono dla izotropowego i anizotropowego modelu $O(2)$ w zależności od wymiaru w zakresie $2 < d \leq 3$. W układzie trójwymiarowym różne podejścia wykazały zgodne przewidywania i stosunkowo niewielki zakres błędu. Analizując zależność anomalnego wymiaru $\eta(d)$, eksponentu odwrotnej długości korelacji $\nu^{-1}(d)$ (który odpowiada e_1 izotropowego układu) oraz dyskretnej anizotropii $y_4(d)$ (odpowiadającej wartości e_1 anizotropowego układu) stwierdzono systematycznie pogłębiającą się rozbieżność wyników i silny wzrost zakresu niepewności (błędu oszacowania) przy zbliżaniu się do przypadku dwuwymiarowego. Doktorant przedyskutował potencjalny wpływ uwzględnienia wyrazów wyższego rzędu, np. $O(\partial^4)$. Stwierdził, że implementacja z wariantem podstawienia powinna być bardziej adekwatna do opisu fizyki przejścia Kosterlitz-Thoulessa w dwuwymiarowych układach.

Podsumowując, mgr Andrzej Chlebicki przeprowadził cenną analizę uniwersalnych właściwości układów opisanych rodziną modeli $O(N)$. Stosując niezburzeniowy formalizm grupy renormalizacyjnej wykazał, że przejście do fazy uporządkowanej dalekozasięgowo w izotropowych układach $N > 2$ o wymiarowości powyżej $d = 2$ jest realizowane na sposób ciągły (*crossover*). Wynik ten weryfikuje (negatywnie) scenariusz nieanalityczności eksponentów krytycznych przewidziany rachunkiem perturbacyjnym uzyskanym przez Cardy'ego i Harpera. Natomiast w przypadku $N < 2$, $d < 2$ analiza wymiarowej zależności $\eta(d)$ oraz $\nu^{-1}(d)$ potwierdziła jakościową zgodność wyników Doktoranta z przewidywaniami CH oraz innymi nieperturbacyjnymi obliczeniami dostępnymi w literaturze, dotyczących natury przejścia do fazy uporządkowania kwazidalekozasięgowego. Zastosowano

również niezburzeniowy formalizm do zbadania roli słabych perturbacji kubicznych w modelu $O(2)$, wyznaczając wiodący wykładnik skalowania pola anizotropowego w zakresie od wymiaru $d = 3$ do $d = 2^+$. Rozprawa doktorska została przygotowana starannie w języku angielskim. Strona redakcyjna nie budzi najmniejszych zastrzeżeń. Mam jedynie zapytanie ogólnej natury. Zaintrygowany informacją podaną na stronie 60 obecnej rozprawy, gdzie podano ujemny zakres wartości N (tzw. modelu gaussowskiego), chciałbym prosić Doktoranta o skomentowanie fizycznego znaczenia takiego przypadku.

Rozprawa doktorska magistra Andrzeja Chlebickiego wnosi istotny wkład w głębsze rozumienie natury klasycznych przejść fazowych w układach o zmiennej wymiarowości i uwzględnienie efektów anizotropowych. Doktorant wykazał się imponującą znajomością zaawansowanych metod fizyki teoretycznej, zwłaszcza różnych wariantów grupy renormalizacyjnej. Przedłożona rozprawa spełnia zwyczajowe i prawne wymagania określone w Ustawie *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce* (Dz. U. z 2020 r. poz. 85 z późniejszymi zmianami) do nadania stopnia doktora w dyscyplinie *nauki fizyczne*. Wnioskuje więc do Rady Naukowej Dyscypliny Nauki Fizyczne Uniwersytetu Warszawskiego o dopuszczenie magistra Andrzeja Chlebickiego do publicznej obrony oraz dalszych etapów Jego przewodu doktorskiego. Ze względu na sprawne zastosowanie przez Doktoranta wyrafinowanej metody badawczej nieperturbacyjnego podejścia metody grupy renormalizacyjnej oraz spektakularne obalenie przewidywań klasycznego scenariusza Cardy'ego-Harpera dotyczącego przejścia do stanu uporządkowania dalekozasięgowego w układach $N > 2$, $d > 2$ (które mogą mieć dalsze odniesienie do innych modeli teoretycznych) sugeruję rozważenie wniosku o wyróżnienie niniejszej pracy doktorskiej.

Jacek Domański