Katedra Metod Matematycznych Fizyki

1. **Własności stanów podstawowych kwantowego modelu Heisenberga**

   Opiekun: dr hab. Jacek Wojtkiewicz

Początek pracy - to zapoznanie sie z kwantowym modelem Heisenberga i zasadniczymi znanymi faktami na jego temat. Następnym krokiem będzie wypisanie jawnego wyrażenia na macierz hamiltonianu modelu oraz implementacja numeryczna tejże, a następnie liczenie numeryczne najniższych energii stanu podstawowego i odpowiadającego jej wektora własnego, a stąd - funkcji korelacji. Badane byłyby układy do dwudziestu kilku węzłów. W zależności od zaangażowania licencjata, możliwa jest kontynuacja tematu - badanie większych układów metodami wariacyjnymi (tzw. Metoda pokryć dimerowych i jej modyfikacje), po sprawdzeniu dokładności tych metod na małych układach. Techniki obliczeniowe dla takich układów są stosowane w nanotechnologii -- w badaniu nanodrutów i kropek kwantowych.

Od licencjata oczekuję znajomości podstaw mechaniki kwantowej oraz znajomości języka programowania C lub C++.

2. **Własności krytyczne modelu Isinga i ich uniwersalność: metoda numerycznej diagonalizacji**

   Opiekun: dr hab. Jacek Wojtkiewicz

Początek pracy - to poznanie ścisłego rozwiązania modelu Isinga (w 1 i 2 wymiarach) i otrzymanych na tej podstawie funkcji termodynamicznych. Następnym krokiem będzie odtworzenie tych wielkości przez numeryczną diagonalizację macierzy przejścia. Dalej planuje analogiczne zbadanie termodynamiki modeli Isinga, dla których nie jest znane ścisłe rozwiązanie (modele z dalszym oddziaływaniem, model o spinie 1). Badane byłyby głównie własności krytyczne pod katem zgodności z (ciągle jeszcze) hipoteza uniwersalności.

Od licencjata oczekuję znajomości podstaw mechaniki statystycznej oraz znajomości języka programowania C lub C++.

3. **Własności krytyczne dwuwymiarowego modelu Isinga i ich uniwersalnosc: metoda Monte Carlo**

   Opiekun: dr hab. Jacek Wojtkiewicz

Zakres problemów byłby podobny, jak powyżej, inna jednakże byłaby metoda badania, a mianowicie symulacja Monte Carlo (losowe próbkowanie przestrzeni stanów i na tej podstawie wnioskowanie o własnościach układu). Metoda Monte Carlo jest jedną z najbardziej uniwersalnych metod w mechanice statystycznej, mających szereg zastosowań także w innych gałęziach wiedzy (ekonofizyka, rynki finansowe). W przypadku dużego zaangażowania licencjata, można sie pokusić o przeniesienie kodu

numerycznego na karty graficzne z serii NVidia (tzw. oprogramowanie CUDA), co pozwoliłoby nawet na kilkudziesięciokrotne przyspieszenie symulacji, a efektem ubocznym byłoby poznanie architektury karty graficznej i praktyczne zaznajomienie sie z obliczeniami przy jej użyciu (do wykorzystania nie tylko w obliczeniach numerycznych, ale i w tworzeniu grafiki oraz gier komputerowych).

Od licencjata oczekuję znajomości podstaw mechaniki statystycznej oraz znajomości języka programowania C lub C++.

4. **Termodynamika modelu Hubbarda**

   Opiekun: dr hab. Jacek Wojtkiewicz

Początek pracy - to poznanie modelu Hubbarda i zasadniczych faktów go dotyczących. Następny krok - to wypisanie jawnego wyrażenia na macierz hamiltonianu modelu i numeryczna implementacja tejże, a następnie numeryczna diagonalizacja macierzy i na tej podstawie liczenie funkcji termodynamicznych. W ten sposób planuje zbadanie układów do 10, może kilkunastu węzłów sieci.W zależności od zaangażowania licencjata, możliwa jest kontynuacja tematu - badanie dokładności niedawno wyprowadzonych oszacowań na energie swobodna modelu Hubbarda przez funkcje termodynamiczne modelu Falicova-Kimballa, i w przypadku pozytywnym badanie w ten sposób większych układów.

Od licencjata oczekuje znajomości podstaw mechaniki kwantowej i statystycznej oraz znajomości języka programowania C lub C++.

5. **Zmienne grassmanowskie w dwuwymiarowym modelu Isinga**

   Opiekun: dr hab. Jacek Wojtkiewicz

Technika całkowania po zmiennych grassmanowskich jest jedna z fundamentalnych w (fermionowej) teorii pola; jest też bardzo użyteczna w przypadku sieciowych modeli spinowych. Celem pracy będzie zaznajomienie się z tą techniką i otrzymanie przy jej użyciu ścisłego rozwiązania dwuwymiarowego modelu Isinga. W przypadku dużego zaangażowania licencjata, możliwa jest kontynuacja tematyki: poznanie ścisłej metody grupy renormalizacyjnej dla modeli spinowych, gdzie całkowanie po zmiennych grassmanowskich jest podstawa.

Oczekiwane umiejętności: Dobre opanowanie kursów algebry i analizy oraz elementów mechaniki statystycznej.

6. **Technika odbiciowej dodatniosci w wersji spinowej ("spin reflection positivity") w zastosowaniu do modeli Hubbarda**

   Opiekun: dr hab. Jacek Wojtkiewicz

7. **Relacja pomiedzy kwantowymi układami d-wymiarowymi a (d+1) wymiarowymi układami klasycznymi poprzez związek Lie-Trottera-Suzukiego**

   Opiekun: dr hab. Jacek Wojtkiewicz

8. **Transformacja fundamentalna dla równań różniczkowych i różnicowych**

   Opiekun: dr Maciej Nieszporski

W 1915 Hans Jonas podał transformację, która znajduje dziś szerokie zastosowanie w rozwiązywaniu pewnych nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych. Zapoznanie się z tą transformacją, poznanie jej pewnych uogólnień i/lub konstrukcja tej transformacji dla pewnej klasy równań różnicowych będą celami tej pracy licencjackiej. Zachęcam szczególniestudentów zainteresowanych nieliniowymi aspektami modeli fizycznych.

9. **Unitarność w teorii rozpraszania**

   Opiekun: prof.dr hab. Jan Dereziński

Podstawowe pojęcia i rezultaty w teorii rozpraszania wielu ciał w mechanice kwantowej (temat wstępnie zarezerwowany)

10. **Harmoniki sferyczne w 4 wymiarach i wielomiany Jacobiego**

    Opiekun: prof.dr hab. Jan Dereziński

Uogólnienie formalizmu harmonik sferycznych z 3 wymiarów na 4 wymiary przy użyciu podwójnych współrzędnych sferycznych.

11. **Funkcje subaddytywne**

    Opiekun: prof.dr hab. Jan Dereziński

Analiza pojęcia powłoki subaddytywnej, motywowanego przez własności spektrum wzbudzeń układów nadciekłych. Napisanie programu do obliczania powłoki subaddytywnej dla danej funkcji.

12. **Konforemne tensory Yano-Killinga:**

    a) Kerr-NUT-AdS i CYK tensory (np. licencjat: CYK-i dla AdS w wyższych

    wymiarach 3-formy dla D=5 i 6)

b) Strong asymptotic flatness -- warunki dostateczne na istnienie ACYK tensorów dla metryk stacjonarnych.

ad. CYK tensory są uogólnieniem pól Killinga i mają wiele zastosowań. Opiekun: dr hab. Jacek Jezierski, prof. UW

13. **Matematyczne aspekty fal grawitacyjnych w zlinearyzowanej teorii Einsteina**

a) Cechowanie niezmiennika podłużnego i jego peeling

b) Uogólnić niezmienniki Regge-Wheeler-Zerilli na dowolną metrykę sferycznie symetryczną.

ad. Badania nad opisem fal grawitacyjnych w sposób niezależny od cechowania wciąż się rozwijają.

Opiekun: dr hab. Jacek Jezierski, prof. UW

14. **Własności geometryczne horyzontu ekstremalnego Kerra.**

ad. Ekstremalne czarne dziury (ze zdegenerowanymi horyzontami) wciąż są niezbadane do końca.

Opiekun: dr hab. Jacek Jezierski, prof. UW

15. **Twierdzenie o dodatniości energii (dowód przy pomocy 2-par. rodziny krzywych)**

ad. Nowy dowód ważnego twierdzenia w OTW. Opiekun: dr hab. Jacek Jezierski, prof. UW

16. **Xact software zastosować do obliczeń symbolicznych i sprawdzić pewne wzory, a potem zastosować do uogólnień.**

ad. Pakiet do znanego programu Mathematica umożliwiający wydajniejsze obliczenia tensorowe.

Opiekun: dr hab. Jacek Jezierski, prof. UW

17. **Układy jednorodne i zasada Jacobiego.**

Opiekun. prof.dr hab. Paweł Urbański

18. **Transformacja Legendre'a dla układów nieregularnych.**

Opiekun. prof.dr hab. Paweł Urbański

19. **Zasady wariacyjne i kontrola dysypatywnych układów statycznych.**

Opiekun. prof.dr hab. Paweł Urbański

20. **Równanie Hamiltona-Jacobiego i metoda Jacobiego jako cześć mechaniki lagranżowskiej.**

Opiekun. prof.dr hab. Paweł Urbański

21. **Formy i gęstości w elektrodynamice.**

Opiekun. prof.dr hab. Paweł Urbański

22. **Unitarne formy reprezentacji nieprzywiedlnych kwantowej grupy SU(2)**

Opiekun: dr Piotr Sołtan

23. **Niezmienniki ergodycznych działań SqU(2) na skończenie wymiarowych algebrach**

Opiekun: dr Piotr Sołtan

24. **Skończenie wymiarowe koreprezentacje warkoczowych algebr Hopfa**

Opiekun: dr Piotr Sołtan

25. **Struktura kanoniczna Ogólnej Teorii Względności**

Opiekun: prof. dr hab. Jacek Jezierski

26. **Konforemne tensory Yano-Killinga w zastosowaniu do grawitacji i elektrodynamiki**

Opiekun: prof. dr hab. Jacek Jezierski

27. **Struktura asymptotyczna czasoprzestrzeni**

Opiekun: prof. dr hab. Jacek Jezierski

28. **Czarne dziury, własności geometryczne, "near horizon geometry",Ricci soliton**

Opiekun: prof. dr hab. Jacek Jezierski

29. **Całki po trajektoriach**

Opiekun: prof. dr hab. Jan Dereziński

Tematem pracy będzie ścisłe ujęcie zagadnienia, które najczęściej jest prezentowane w literaturze fizycznej w sposób tajemniczy i nieporządny -- tematu całek po trajektoriach.

30. **Grupy krystalograficzne w 2 wymiarach**

Opiekun: prof. dr hab. Jan Dereziński

Celem pracy będzie analiza własności tzw. grup tapetowych (wallpaper groups).

31. Struktury Riemmannowskie w równaniach różniczkowych

Opiekun: J. De Lucas

Zbadamy układy równań różniczkowych nieautonomicznych za pomocą algebr Liego pol wektorowych Killinga względem pewnej metryki Riemmanowskiej. W ten sposób, skalar i tensor krzywizny Ricciego i tensor metryczny pozwalają nam obliczyć całki ruchu i symetrie tych układów. Zastosujemy nasze metody w równaniach różniczkowych pojawiających sie w fizyce i matematyce, np. w równaniach Schrodingera i Riccatiego i wymyślimy nowe techniki aby przeanalizowa

właściwości równań różniczkowych.

32. Metody z geometrii symplektycznej w równaniach różniczkowych

Opiekun: J. De Lucas

Pewne układy rownan rozniczkowych, np. oscylatory Winternitza-Smorodynkiego, mozna okreslic jako pola wektorowe Hamiltonowskie zależne od czasu na rozmaitosciach symplek- tycznych. Pierwszym celem tej pracy jest zastosowac znane metody z geometrii symplektycznej, zeby zbadac rownania rozniczkowe pojawiajace sie w fizyce. Drugim celem jest znalezienia uogólnien pewnych wynikow z geometrii symplektycznej dla ukladow zależnych od czasu. Ewentualnie, zastosujemy tez inne uogolnienia struktur symplektycznych.

33. Metody rozwiązania równań Schrodingera zależnych od czasu

Opiekun: J. De Lucas

Geometryczne podejscie do mechaniki kwantowej, tzn geometryczna mechanika kwantowa, pozwala nam okreslic rownanie Schrodingera zależne od czasu jako rownanie krzywych całkowalnych pewnego pola wektorowego zależnego od czasu. Badajac geometryczne wlasciwosci tego pola wektorowego mozna znalezc metody calkowania rownan Schrodingera, np. metode Wei-Normana. W tej pracy mamy zamiar korzystac z tej i innych metod, aby znalezc nowe rozwiazania i metody calkowania rodnych rownaó Schrodingera.

33. Analiza i zastosowania ukladów Liego i ich uogólnień

Opiekun: J. De Lucas

Uklad Liego to uklad rownan rozniczkowych. Te układy pojawiaja się w wielu dziedzinach nauki, posiadaja wiele geometrycznych własciwosci i mozna przeanalizowac je za pomoca wielu technik z geometrii symplektycznej, Poissona, Diraca, Riemmanowskiej, itd. Ponadto, uklady Liego maja zastosowania w geometrycznej mechanice kwantowej i klasycznej, teorii rownan rozniczkowych, itd. To nowe podejscie do znanych i nowych tematow czesto pozwala nam znalezc nowe cechy znanych problemow oraz nowe wyniki. Celem pracy jest przeanalizowanie ukladow Liego lub ich uogolnien za pomoca technik z geometrii rozniczkowej i zastosowanie naszych wynikow w mechanice klasycznej, kwantowej i/lub teorii rownan rozniczkowych.

34. Właściwości równań różniczkowych

Opiekun: J. De Lucas

Celem tej pracy jest badanie podstawowych wlasciwosci geometrycznych rownan rozniczkowych, np. stabilnosc, srodki, pary Laxa, symetrie Liego, czynniki calkowalnosci, itd. Te techniki beda korzystane, aby zbadac wlasciwosci problemow fizycznych.