

Tematy prac licencjackich dla studentów indywidualnych

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Struktury Riemannowskie w równaniach różniczkowych

Opiekun dr J. de Lucas

Zbadamy układy równań różniczkowych nieautonomicznych za pomocą algebr Liego pól wektorowych Killinga względem pewnej metryki Riemannowskiej. W ten sposób skalar i tensor krzywizny Ricciego i tensor metryczny pozwalają nam obliczyć całki ruchu i symetrie tych układów. Zastosujemy nasze metody w równaniach różniczkowych pojawiających się w fizyce i matematyce, np. w równaniach Schrödingera i Riccatiego i wymyślimy nowe techniki aby przeanalizować właściwości równań różniczkowych.

Metody z geometrii symplektycznej w równaniach różniczkowych

Opiekun dr J. de Lucas

Pewne układy równań różniczkowych, np. oscylatory Winternitza–Smorodynkiego, można określić jako pola wektorowe Hamiltonowskie zależne od czasu na rozmaitościach symplektycznych. Pierwszym celem tej pracy jest zastosowanie znanych metod z geometrii symplektycznej, żeby zbadać równania różniczkowe pojawiające się w fizyce. Drugim celem jest znalezienie uogólnień pewnych wyników z geometrii symplektycznej dla układów zależnych od czasu. Ewentualnie, zastosujemy też inne uogólnienia struktur symplektycznych.

Metody rozwiązywania równań Schrodingera zależnych od czasu

Opiekun dr J. de Lucas

Geometryczne podejście do mechaniki kwantowej, tzn geometryczna mechanika kwantowa, pozwala nam określić równanie Schrödingera zależne od czasu jako równanie krzywych całkowalnych pewnego pola wektorowego zależnego od czasu. Badając geometryczne właściwości tego pola wektorowego można znaleźć metody całkowania równań Schrödingera, np. metodę Wei–Normana. W tej pracy mamy zamiar korzystać z tej i innych metod, aby znaleźć nowe rozwiązania i metody całkowania różnych równań Schrödingera.

Analiza i zastosowania układów Liego i ich uogólnień

Opiekun dr J. de Lucas

Układ Liego to układ równań różniczkowych. Te układy pojawiają się w wielu dziedzinach nauki, posiadają wiele geometrycznych właściwości i można przeanalizować je za pomocą wielu technik z geometrii symplektycznej, Poissona, Diraca, Riemannowskiej, itd. Ponadto, układy Liego mają zastosowania w geometrycznej mechanice kwantowej i klasycznej, teorii równań różniczkowych, itd. To nowe podejście do znanych i nowych tematów

często pozwala nam znaleźć nowe cechy znanych problemów oraz nowe wyniki. Celem pracy jest przeanalizowanie układów Liego lub ich uogólnień za pomocą technik z geometrii różniczkowej i zastosowanie naszych wyników w mechanice klasycznej, kwantowej i/lub teorii równań różniczkowych.

Właściwości równań różniczkowych

Opiekun dr J. de Lucas

Celem tej pracy jest badanie podstawowych właściwości geometrycznych równań różniczkowych, np. stabilność, środki, pary Laxa, symetrie Liego, czynniki całkowalności, itd. Te techniki zostaną wykorzystane, aby zbadać właściwości problemów fizycznych.

Geometryczna kwantyzacja

Opiekun dr J. de Lucas

Celem tej pracy jest badanie podstawowych właściwości geometrycznych i algebraicznych kilku podejść do geometrycznej kwantyzacji. W tym, mamy zamiar analizować geometryczne metody, żeby rozwiązać równania Schrödingera problemu kwantowego za pomocą rozwiązań ‘klasycznych’ tego samego problemu. To pozwoli nam podać bardziej geometryczny opis metody WKB. Dodatkowo, planujemy zbadać kwantyzację Diraca, tj. problem zbudowania morfizmu algebr Liego z zbioru funkcji gładkich na rozmaitości symplektycznej do algebry operatorów przestrzeni Hilberta.

Uogólnienia redukcji Marsdena-Weinsteina

Opiekun dr J. de Lucas

Celem tej pracy jest badanie uogólnień teorii redukcji Marsdena-Weinsteina dla różnych typów geometrii: k -symplektycznej, multisymplektycznej, (twisted) Diraca, Jacobiego, itp. Planuję zbudować nową teorię redukcji, aby uogólnić i uprościć poprzednie prace w tym temacie. Na przykład, istniejąca redukcja k -symplektyczna jest oparta na założeniu, że obcięcia do pewnej podrozmaitości wszystkich form presymplektycznych struktury k -symplektycznej mają przecięcie jąder równe zeru. Poszukamy jak stworzyć teorię redukcji bez tego założenia.

Struktury k -symplektyczne, multisymplektyczne i równania różniczkowe zwyczajne

Opiekun dr J. de Lucas

Zamiast zbadać układy równań różniczkowych cząstkowych, mamy zamiar skorzystać ze struktur k -symplektycznych, żeby zbadać równania różniczkowe zwyczajne nieautonomiczne. To podejście jest bardziej naturalne niż badanie układów równań różniczkowych cząstkowych, które nie zawsze można zbadać strukturami multisymplektycznymi i k symplektycznymi. Mamy zamiar zastosować nasze metody do układów równań różniczkowych pojawiających się w fizyce i matematyce, np. w hydrodynamice.

Własności krytyczne modeli: Isinga, XY i Heisenberga: metoda Monte Carlo”

Opiekun: dr hab. Jacek Wojtkiewicz

Zastosowana byaby metoda Monte Carlo, tzn. (losowe próbkowanie przestrzeni stanów i na tej podstawie wnioskowanie o własnościach układu). Metoda Monte Carlo jest jedną z najbardziej uniwersalnych metod w mechanice statystycznej, mających szereg zastosowań także w innych gałęziach wiedzy (ekonofizyka, rynki finansowe). Od kandydata oczekuję znajomości podstaw mechaniki statystycznej oraz znajomości języka programowania C lub C++.

Model XY przez transformację Jordana-Wignera, i eksploracja termodynamiki tegoż modelu

Opiekun dr hab. Jacek Wojtkiewicz

Kwantowy łańcuch XY jest ściśle rozwiązywalny przez transformację Jordana-Wignera, pozwalającą na zapisanie hamiltonianu w języku nieoddziaływujących fermionów. Celem kandydata jest zreprodukowanie znanych faktów oraz przystąpienie do rozwiązania otwartych problemów: Hamiltonian w języku nieoddz. fermionów, widmo, diagram fazowy, funkcje korelacji (znane), funkcje skalujące (znane częściowo).

Termodynamika modelu Hubbarda

Opiekun: dr hab. Jacek Wojtkiewicz

Początek pracy to poznanie modelu Hubbarda i zasadniczych faktów go dotyczących. Następny krok to wypisanie jawnego wyrażenia na macierz hamiltonianu modelu i numeryczna implementacja tejże, a następnie numeryczna diagonalizacja macierzy i na tej podstawie liczenie funkcji termodynamicznych. W ten sposób planuje zbadać układy do 10, może kilkunastu węzłów sieci. W zależności od zaangażowania kandydata, możliwa jest kontynuacja tematu badanie dokładności niedawno wyprowadzonych oszacowań na energię swobodną modelu Hubbarda przez funkcje termodynamiczne modelu Falicova-Kimballa, i w przypadku pozytywnym badanie w ten sposób większych układów. Od kandydata oczekuję znajomości podstaw mechaniki kwantowej i statystycznej oraz znajomości języka programowania C lub C++.

Zmiennne grassmanowskie w dwuwymiarowym modelu Isinga

Opiekun: dr hab. Jacek Wojtkiewicz

Technika całkowania po zmiennych grassmanowskich jest jedną z fundamentalnych w (fermionowej) teorii pola; jest też bardzo użyteczna w przypadku sieciowych modeli spinowych. Celem pracy będzie zaznajomienie się z tą techniką i otrzymanie przy jej życiu ciekawego rozwiązania dwuwymiarowego modelu Isinga. W przypadku dużego zaangażowania kandydata, możliwa jest kontynuacja tematyki: poznanie ciekawej metody grupy renormalizacyjnej dla modeli spinowych, gdzie całkowanie po zmiennych grassmanowskich jest podstawą. Oczekiwane umiejętności: Dobre opanowanie kursów algebry i analizy oraz elementów mechaniki statystycznej.

Technika odbiciowej dodatniości w wersji spinowej ("spin reflection positivity") w zastosowaniu do modeli Hubbarda

Opiekun: dr hab. Jacek Wojtkiewicz

Relacja pomiędzy kwantowymi układami dwymiarowymi a $(d+1)$ wymiarowymi układami klasycznymi poprzez zwizek Lie-Trottera-Suzukiego

Opiekun: dr hab. Jacek Wojtkiewicz

Transformacja fundamentalna dla równań różniczkowych i różnicowych

Opiekun: dr hab. Maciej Nieszporski

W 1915 Hans Jonas poda transformację, która znajduje dziś szerokie zastosowanie w rozwiązywaniu pewnych nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych. Zapoznanie się z tą transformacją, poznanie jej pewnych uogólnień i/lub konstrukcja tej transformacji dla pewnej klasy równań różnicowych będą celami tej pracy licencjackiej. Zachęcam szczególnie studentów zainteresowanych nieliniowymi aspektami modeli fizycznych.

Unitarność w teorii rozpraszania

Opiekun: prof.dr hab. Jan Dereziński

**Podstawowe pojęcia i rezultaty w teorii rozpraszania wielu ciał w mechanice kwantowej
Harmoniki sferyczne w 4 wymiarach i wielomiany Jacobiego**

Opiekun: prof.dr hab. Jan Dereziński

Uogólnienie formalizmu harmonik sferycznych z 3 wymiarów na 4 wymiary przy użyciu podwójnych współrzędnych sferycznych.

Konforemne tensory Yano-Killinga

Opiekun: prof. dr hab. Jacek Jezierski

a) KerrNUTAdS i CYK tensory (np. licencjat: CYKi dla AdS w wyższych wymiarach 3-formy dla $D=5$ i 6) b) Strong asymptotic flatness warunki dostateczne na istnienie ACYK tensorów dla metryk stacjonarnych. ad. CYK tensory są uogólnieniem pól Killinga i mają wiele zastosowań.

Matematyczne aspekty fal grawitacyjnych w zlinearyzowanej teorii Einsteina

Opiekun: prof. dr hab. Jacek Jezierski

a) Cechowanie niezmiennika podłużnego i jego peeling b) Uogólnić niezmienniki Regge-Wheeler-Zerilli na dowolną metrykę sferycznie symetryczną. ad. Badania nad opisem fal grawitacyjnych w sposób niezależny od cechowania wciąż się rozwijają.

Własności geometryczne horyzontu ekstremalnego Kerra.

Opiekun: prof. dr hab. Jacek Jezierski

Ekstremalne czarne dziury (ze zdegenerowanymi horyzontami) wciąż są niezbadane do końca.

Twierdzenie o dodatniości energii (dowód przy pomocy 2-par. rodziny krzywych)

Opiekun: prof. dr hab. Jacek Jezierski

Nowy dowód ważnego twierdzenia w OTW.

Układy jednorodne i zasada Jacobiego.

Opiekuni: dr hab. K. Grabowska i prof.dr hab. Paweł Urbański

Transformacja Legendre’a dla układów nieregularnych

Opiekuni: dr hab. K. Grabowska i prof.dr hab. Paweł Urbański

Zasady wariacyjne i kontrola dysypatywnych układów statycznych.

Opiekuni: dr hab. K. Grabowska i prof.dr hab. Paweł Urbański

Równanie Hamiltona-Jacobiego i metoda Jacobiego jako część mechaniki lagranżowskiej.

Opiekuni: dr hab. K. Grabowska i prof.dr hab. Paweł Urbański

Formy i gestosci w elektrodynamice.

Opiekuni: dr hab. K. Grabowska i prof.dr hab. Paweł Urbański

Unitarne formy reprezentacji nieprzywiedlnych kwantowej grupy $SU(2)$

Opiekun: dr hab. Piotr Sołtan

Niezmienniki ergodycznych działań $SqU(2)$ na skończenie wymiarowych algebrach

Opiekun: dr hab. Piotr Sołtan

Skończenie wymiarowe koreprezentacje warkoczowych algebr Hopfa

Opiekun: dr hab. Piotr Sołtan

Składowa spójna jedności grupy kwantowej.

Opiekun: dr P. Kasprzak.

Podgrupy paraboliczne grup Liego i separacja równań typu Weia-Normana

Opiekun dr Szymon Charzyński

Istnieje klasa równań różniczkowych zwyczajnych, dla których można szukać rozwiązania w postaci Weia-Normana. Są to równania na krzywą na grupie Liego. Przykładem równania, które należy do tej klasy jest równanie Schrödingera (z hamiltonianem zależnym od czasu). Okazuje się, że dla pewnego szczególnego wyboru współrzędnych na grupie równania Weia-Normana istotnie się upraszczają i separują - otrzymuje się hierarchię równań Riccatiego i całek. Wynik ten można również uzasadnić korzystając z własności pewnej klasy podgrup parabolicznych. Celem pracy będzie porównanie tych dwóch podejść do problemu, analiza konkretnych przykładów i zastosowań fizycznych.

Układy równań różniczkowych z nieliniową zasadą superpozycji i ich zastosowania

Opiekun dr Szymon Charzyński

Badanie własności równań i układów równań posiadających nieliniową zasadę superpozycji, czyli posiadających tę własność, że ogólne rozwiązanie równania daje się przedstawić

jako funkcjonal od pewnej skończonej liczby rozwiązań szczególnych. Zastosowanie metod geometrycznych i algebraicznych. Wykorzystanie metody Weia-Normana. Zastosowania fizyczne, takie jak np. znajdowanie rozwiązań równania Schrödingera zależnego od czasu.

Modelowanie numeryczne w teorii względności

Opiekun dr Szymon Charzyński

Ostatnie kilka lat to intensywny rozwój metod numerycznych w OTW. Istnieje ogólnodostępne oprogramowanie pozwalające na numeryczne rozwiązywanie równań Einsteina. Celem pracy jest wykorzystanie istniejącego oprogramowania do wykonania nowych interesujących z fizycznego punktu widzenia symulacji oraz ewentualny wkład w rozwijanie istniejącego oprogramowania. Przykładem takiej symulacji to zlewanie się dwóch czarnych dziur dla różnych konfiguracji mas i momentów pędu elementów zlewającego się układu podwójnego i analiza pochodzącego z takiego procesu promieniowania grawitacyjnego. Analiza stabilności numerycznej i różne sposoby wizualizacji otrzymanych rozwiązań będą również istotnym elementem pracy.

Modele akrecji na czarną dziurę

Opiekun dr Szymon Charzyński

Celem pracy będzie wykonanie porównania znanych analitycznych (przybliżonych lub ścisłych) modeli akrecji na czarną dziurę, takich jak na przykład akrecja Bondiego, z wynikami symulacji numerycznych. Drugim ewentualnie celem będzie modelowanie akrecji nie mających swojego odpowiednika analitycznego. Ważnym elementem będzie analiza własności otrzymanych rozwiązań i ich wizualizacja.