

TEMATY PRAC LICENCJACKICH PRACOWNIKÓW KMMF

Wszystkie tematy dla studentów kierunku Fizyka

Jan Dereziński

Temat 1. Harmoniki sferyczne w 4 wymiarach i wielomiany Jacobiego

Opis: Uogólnienie formalizmu harmonik sferycznych z 3 wymiarów na 4 wymiary przy użyciu podwójnych współrzędnych sferycznych.

Temat 2. Renormalizacja polaryzacji próżni w kwantowej teorii pola z zewnętrznymi źródłami.

Opis: Naiwne podejście do polaryzacji próżni prowadzi do rozbieżnych wyników. Celem pracy będzie porównanie różnych podejść do renormalizacji tych wielkości.

Temat 3. Całki po trajektoriach ze ściślego punktu widzenia

Opis: Całkowanie po trajektoriach jako ściśle narzędzie matematyczne.

Temat 4. Przybliżenie semiklasyczne mechaniki kwantowej

Opis: Różne podejścia do klasycznej granicy mechaniki kwantowej, jej sens geometryczny, analityczny i fizyczny.

Temat 5. Delto-podobne potencjały w mechanice kwantowej

Opis: W mechanice kwantowej można używać potencjałów, których nośnik sprowadza się do jednego punktu. Są one bardzo użyteczne, gdyż różne problemy, w których one występują, są ściśle rozwiązalne

Piotr M. Hajac

Temat 1. Operatory na przestrzeni Hilberta jako funkcje na przestrzeniach kwantowych

Opis: W niezwykle i nadal tajemniczym przejściu od mechaniki klasycznej do mechaniki kwantowej

przestrzenie stanów fizycznych przekształcają się z rozmaitości symplektycznych czy Poissona w przestrzenie Hilberta, a wielkości fizyczne które chcemy przypisać tym stanom zmieniają się z funkcji na rozmaitości w operatory na przestrzeni Hilberta. Ten mechanizm, zwany kwantowaniem, był jedną z motywacji kopernikańskiej zmiany perspektywy w matematyce: algebra funkcji stała się pojęciem podstawowym a punkty przestrzeni wtórnym. Pozwala na to słynne twierdzenie Gelfanda–Naimarka ustalające równoważność kategorii lokalnie zwartych przestrzeni Hausdorffa i przemiennej C^* -algebr. Z tej perspektywy, kwantowanie jest przejściem od przemiennej algebry funkcji do nieprzemiennej algebry operatorów. Myśląc o punktach klasycznych jako o jendowymiarowych reprezentacjach algebry na przestrzeni Hilberta dostajemy pewien matematyczny wspólny mianownik dla mechaniki klasycznej i kwantowej. Myślenie zaś o topologii i geometrii w języku C^* -algebr doprowadziło do powstania topologiczno-geometrycznych pojęć i twierdzeń dla nieprzemiennej algebr.

Maciej Nieszporski

Temat 1. Równanie Riccatiego, jego linearyzacja, dyskretyzacja i uogólnienie na wiele pól

Opis: Równanie Riccatiego jest przykładem równania różniczkowego zwyczajnego nieliniowego, którego rozwiązywanie można sprowadzić do rozwiązywania równania liniowego (lub układu równań liniowych). Zadaniem licencjatu będzie, po pierwsze prześledzenie konsekwencji faktu "linearyzowalności" równania Riccatiego, po drugie wskazanie jego

zastosowań w teorii nieliniowych układów całkowalnych.

Temat 2. Układy równań różnicowych na zmienną wektorową dopuszczające istnienie wielu potencjałów skalarnych.

Opis: Nieliniowe równania różnicowe kryją wiele niespodzianek. Jedną z nich, zaanonsowaną w tytule, zajmiemy się w ramach niniejszej pracy licencjackiej.

Temat 3.

Od odwzorowań Yanga–Baxtera do dyskretnych równań Painlevé’

Opis: Rozwiązania równań Painlevé’ stanowią rozwinięcie teorii funkcji specjalnych szczególnie ważne dla rozmaitych nieliniowych zagadnień fizyki.

W pracy będziemy badać struktury związane z dyskretnymi (różnicowymi) równaniami Painlevé’.

Jerzy J. Wojtkiewicz

Temat 1. Stany podstawowe kwantowego modelu Isinga w poprzecznym polu magnetycznym

Opis: (Temat bardziej numeryczny) Początek pracy – to zapoznanie się z kwantowym modelem Isinga i zasadniczymi znanymi faktami na jego temat. Następnym krokiem będzie wypisanie jawnego wyrażenia na macierz hamiltonianu modelu oraz implementacja numeryczna tejże, a następnie liczenie numeryczne najniższych energii stanu podstawowego i odpowiadającego jej wektora własnego, a stąd – funkcji korelacji. Stąd byłby otrzymany diagram fazowy.

Badane byłyby układy do dwudziestu kilku węzłów.

W zależności od zaangażowania licencjanta, możliwa jest kontynuacja tematu – porównywanie z rozwiązaniem ścisłym (dla modelu jednowymiarowego), porównywanie z przewidywaniami konformnej teorii pola, badanie widma masowego E_8 (tajemniczy związek z wyjątkowymi algebrami Liego).

Techniki obliczeniowe dla takich układów są stosowane w nanotechnologii – w badaniu nanodrutów i kropek kwantowych.

Od licencjanta oczekuję znajomości podstaw mechaniki kwantowej oraz znajomości języka programowania C lub C++.

Temat 2. Własności krytyczne modelu Isinga i ich uniwersalność: metoda numerycznej diagonalizacji

Opis: (Temat bardziej numeryczny) Początek pracy – to poznanie ścisłego rozwiązania modelu Isinga (w 1 i 2 wymiarach) i otrzymanych na tej podstawie funkcji termodynamicznych.

Następnym

krokiem będzie odtworzenie tych wielkości przez numeryczną diagonalizację macierzy przejścia. Dalej planuję analogiczne zbadanie termodynamiki modeli Isinga, dla których nie jest znane ścisłe rozwiązanie (modele z dalszym oddziaływaniem, model o spinie 1). Badane byłyby głównie własności krytyczne pod kątem zgodności z (ciągle jeszcze) hipotezą uniwersalności.

Od licencjanta oczekuję znajomości podstaw mechaniki statystycznej oraz znajomości języka programowania C lub C++.

Temat 3. Stany podstawowe modelu Hubbarda pod kątem istnienia uporządkowań magnetycznych

Opis: (Temat bardziej numeryczny) Początek pracy – to poznanie modelu Hubbarda i zasadniczych faktów go dotyczących. Następny krok – to wypisanie jawnego wyrażenia na macierz hamiltonianu modelu i numeryczna implementacja tejże, a następnie numeryczna diagonalizacja macierzy i na tej podstawie liczenie wektorów własnych stanu podstawowego oraz ich własności: liczb kwantowych (w tym zwłaszcza magnetycznych) oraz funkcji korelacji funkcji termodynamicznych. W ten sposób planuję zbadanie układów do 10, może kilkunastu węzłów sieci.

Od licencjanta oczekuję znajomości podstaw mechaniki kwantowej i statystycznej oraz znajomości języka programowania C lub C++.

Techniki obliczeniowe dla takich układów są stosowane w nanotechnologii – w badaniu nanodrutów i kropek kwantowych.

Temat 4. Numeryczne testowanie nierówności Dysona–Lieba–Simona dla układów posiadających własność odbiciowej dodatniości i nie posiadających jej.

Opis: Jedną z nielicznych ścisłych metod w dowodzie istnienia przejść fazowych w układach sieciowych z symetrią ciągłą (modele XY lub Heisenberga) jest tzn. odbiciowa dodatniość (Reflection Positivity). Aby ją zastosować, trzeba nałożyć istotne ograniczenia na wartości stałych oddziaływania pomiędzy spinami. Tylko w tych przypadkach udaje się udowodnić nierówność DLS, z której wynika uporządkowanie dalekiego zasięgu (w wymiarze większym od 2 i w niskich temperaturach). Tymczasem spodziewamy się, że nierówność ta (i wynikający z niej dowód istnienia uporządkowań) jest prawdziwa dla szerszej klasy sytuacji. Celem pracy będzie numeryczne sprawdzenie tego przypuszczenia.

Od licencjanta oczekuję znajomości podstaw mechaniki kwantowej i statystycznej oraz znajomości języka programowania C lub C++.

Temat 5.. Zmienne grassmanowskie w dwuwymiarowym modelu Isinga.

Opis: (Temat bardziej teoretyczny) Technika całkowania po zmiennych grassmanowskich jest jedną z fundamentalnych w (fermionowej) teorii pola; jest też bardzo użyteczna w przypadku sieciowych

modeli spinowych. Celem pracy będzie zaznajomienie się z tą techniką i otrzymanie przy jej użyciu

ściśłego rozwiązania dwuwymiarowego modelu Isinga na różnych sieciach.

W przypadku dużego zaangażowania licencjanta, możliwa jest kontynuacja tematyki: poznanie ścisłej metody grupy renormalizacyjnej dla modeli spinowych, gdzie całkowanie po zmiennych grassmanowskich jest podstawą, i uzupełnienie dowodu Spencera uniwersalności wykładników krytycznych dla modelu Isinga – rzecz mająca ciągle od ponad 40 lat status hipotezy, znakomicie umotywowanej i sprawdzonej, ale nie udowodnionej do końca.

Oczekiwane umiejętności: Dobre opanowanie kursów algebry i analizy oraz elementów mechaniki statystycznej.

Temat 6. Technika odbiciowej dodatniości w wersji spinowej ("spin reflection positivity") w zastosowaniu do modeli Hubbarda.

Temat 7. Relacja pomiędzy kwantowymi układami d -wymiarowymi a $(d+1)$ -wymiarowymi układami klasycznymi poprzez związek Lie–Trottera–Suzukiego.

Opis: Model Hubbarda i równoważny mu model Isinga, z użyciem transformacji

Hubbarda–Stratonowicza, a la Hirsch. W przypadku dużego zaangażowania licencjanta, możliwe będzie podjęcie próby dowodu istnienia przejścia metal–izolator w stanie podstawowym w modelu 2d na sieci heksagonalnej (rzecz znaleziona numerycznie, lecz niepotwierdzona ściśle).
Oczekiwane umiejętności: Dobre opanowanie kursów algebry i analizy oraz elementów mechaniki statystycznej i mechaniki kwantowej.

Jacek Jezierski

Temat 1. Kerr–NUT–AdS i CYK tensory

Temat 2. Cechowanie niezmiennika podłużnego i jego peeling

Temat 3. Uogólnic niezmienniki Regge–Wheeler–Zerilli na dowolną metrykę sferycznie symetryczną.

Temat 4. Własności geometryczne horyzontu ekstremalnego Kerra.

Temat 5. Zlinearyzowane pole grawitacyjne w czasoprzestrzeniach ze stałą kosmologiczną.

Katarzyna Grabowska i Paweł Urbański

Temat 1. Układy jednorodny i zasada Jacobiego.

Lagranżowski układ jednorodny opisuje jednowymiarowe podrozmaitości. Dla dowolnego układu lagranżowskiego, opisującego ruch można zdefiniować układ jednorodny, opisujący trajektorie. Praca polega na opisie geometrycznym tego procesu z wykorzystaniem transformacji Legendre’a układów nieregularnych.

Temat 2. Transformacja Legendre’a dla układów nieregularnych.

Transformacja Legendre’a jest przejściem od opisu lagranżowskiego do hamiltonowskiego dynamiki układu, czyli równania (na ogół uwikłanego) pierwszego rzędu na trajektorie fazowe. Praca polega na opisie struktur geometrycznych związanych z transformacją Legendre’a oraz jej interpretacji jako składanie obiektów tworzących w geometrii symplektycznej.

Temat 3. Zasady wariacyjne i kontrola dysypatywnych układów statycznych.

Podstawową zasadą wariacyjną jest zasada prac wirtualnych. Celem pracy jest dyskusja opisu układów statycznych, wynikającego z zasady prac wirtualnych.

Temat 4. Równanie Hamiltona–Jacobiego i metoda Jacobiego jako część mechaniki lagranżowskiej.

Często równanie Hamiltona–Jacobiego i metoda Jacobiego są przedstawiane jako część mechaniki hamiltonowskiej. Celem pracy jest geometryczna (symplektyczna) interpretacja równania i metody oraz jej interpretacja jako części mechaniki lagranżowskiej układów jednorodnych.

Temat 5. Formy i gęstości w elektrodynamice.

Chodzi o zapisanie równań elektrodynamiki (wersja infinitezymalna i całkowa) oraz układu mechanicznego z nią sprzężonego, w języku współczesnej geometrii różniczkowej.

Temat 6. Porównanie więzów wakonomicznych i nieholonomicznych.

Dyskusja dwóch sposobów otrzymywania równań ruchu układów z więzami. Jest ściśle

związana z dyskusją pojęcia więzów.

Temat 7. Zadania i problemy z Analizy 1.

Chodzi o opracowanie zbioru zadań (z rozwiązaniami !) na podstawie notatek Grzegorza Cieciury.

Piotr Sołtan

Temat 1. Moduły hilbertowskie, rozszerzenie teorii przestrzeni Hilberta

Opis: Przedstawienie teorii modułów hilbertowskich nad C^* -algebrami i wskazanie podobieństw i istotnych różnic między modułami hilbertowskimi, a przestrzeniami Hilberta. Uogólnienie pewnych faktów z teorii operatorów na przypadek modułów hilbertowskich.

Temat 2. Kwantowe przestrzenie odwzorowań i kwantowe grupy permutacji

Opis: Przestrzenie kwantowe to obiekty, których geometrie opisują nieprzemienne algebry. Wiele ciekawych przykładów takich przestrzeni powstaje jako tak zwane kwantowe przestrzenie odwzorowań. Praca powinna przedstawić kilka przykładów takich obiektów i zbadać ich niektóre własności.

Temat 3. Proste przykłady trojek spektralnych

Opis: Trójki spektralne są nieprzemiennymi uogólnieniami rozkładu riemannowskich. Dzięki bardzo ogólnemu językowi opisu takich obiektów, ciekawe przykłady można otrzymać już w bardzo prostych (np. skończenie wymiarowych) przypadkach. Praca ma na celu przedstawienie kilku takich przykładów i ich elementarną analizę.

Temat 4. Algebra operatorów Toeplitza

Opis: Teoria operatorów Toeplitza jest standardowym elementem teorii operatorów nadprzestrzeni

Hilberta i teorii funkcji. Celem pracy jest opis algebry tych operatorów i jej własności.

Paweł Kasprzak

Temat 1. Warunki Vaesa dla grup klasycznych

Opis: Warunki Vaesa podają charakteryzację algebry funkcji ciągłych znikających w nieskończoności na kwantowej przestrzeni jednorodnej. Odzwierciedlają one zachowanie się tej algebry ze względu na branie iloczynu krzyżowego działania kwantowej grupy. Celem pracy jest bezpośrednie sprawdzenie tych warunków dla klasycznych przestrzeni jednorodnych.

Temat 2. Deformacja Rieffela jako funktor

Opis: Deformacja Rieffela jest procedurą pozwalającą deformować przestrzenie z działaniem grupy

klasycznej. Celem pracy jest opisanie tej procedury w języku teorii kategorii.

Temat 3. Kwantowe przestrzenie jednorodne otrzymane metodą deformacji Rieffela

Opis: Celem tej pracy jest zastosowanie deformacji Rieffela do przestrzeni jednorodnych pojawiających się w fizyce takich jak stożek świetlny czy hiperboloida masowa.

Temat 4. Deformacja Rieffela ko-działań grup klasycznych

Opis: Deformacja Rieffela jest procedurą pozwalającą deformować przestrzenie z działaniem grupy

klasycznej. Celem pracy jest rozszerzenie procedury do kategorii $G - C^*$ -algebr gdzie G jest grupą kwantową.

Tomasz Pawłowski:

Temat 1: Atraktory inflacyjne w pętlowej kosmologii kwantowej.

Opis: Dyskretna natura czasoprzestrzeni w skali Plancka znacząco wpływa na ewolucję wczesnego wszechświata. Osobliwości wielkiego wybuchu zastąpione zostają przez zjawisko wielkiego odbicia, które łączy obecny rozszerzający się wszechświat z poprzednim kurczącym się. W efekcie wszechświaty zamknięte - zaczynające istnienie wielkim wybuchem i kończące wielkim zgnieceniem stają się tylko pojedynczymi ogniwami w nieskończonym łańcuchu ewolucji. Rodzi to pytanie, jak obraz ten wpływa na rozwiązanie problemów współczesnej kosmologii. Jednym z ciekawszych jest ocena prawdopodobieństwa kosmologicznej inflacji wystarczająco długiej aby wygenerować obserwowaną strukturę promieniowania relikтового. Celem projektu jest zbadanie długoterminowej (wiele cykli) ewolucji wszechświatów zamkniętych z polem skalarnym generującym inflację w celu ewentualnego określenia punktów skupienia (atraktorów) tej ewolucji. Pozwolą one określić najbardziej prawdopodobne scenariusze w tej ewolucji.

Wymagania: znajomość podstaw kosmologii, umiejętność programowania w C++, biegłość w programowaniu obiektowym.

Temat 2: Kwantowa inflacja w kosmologii pętlowej.

Opis: Postęp w dziedzinie tzw pętlowej grawitacji kwantowej w ostatnich latach pozwolił na skonstruowanie kompletnych i działających modeli kwantowania grawitacji, gdzie czas jest mierzony zegarami fizycznymi (polami materii). Zastosowanie tych metod w kosmologii (tzw kosmologia pętlowa) pozwoliło opisywać bezpośrednio w sposób kwantowy systemy, które dotychczas można było analizować jedynie za pomocą heurystycznych przybliżeń. Celem projektu jest wykorzystanie w/w metod do opisu modelu jednorodnego wszechświata zawierającego materię generującą inflację kosmologiczną (tzw pole skalare z potencjałem inflatonowym).

Wymagania: znajomość podstaw kosmologii, znajomość podstaw mechaniki kwantowej, umiejętność programowania w C++, biegłość w programowaniu obiektowym, znajomość metod numerycznych.

Temat 3: Metody dynamiki sieci spinorowych w kwantowej grawitacji pętlowej.

Opis: W pętlowym opisie kwantowej grawitacji przestrzeń reprezentowana jest przez jednowymiarowe struktury - tzw. sieci spinorowe. Ewolucja czasowa układu fizycznego opisywana jest poprzez zmianę tych sieci generowaną przez hamiltonian. Celem projektu jest skonstruowanie (adaptacja już istniejących) i przetestowanie numerycznych narzędzi analizy tej ewolucji czasowej.

Wymagania: znajomość podstaw mechaniki kwantowej, umiejętność programowania w C++, biegłość w programowaniu obiektowym, znajomość metod numerycznych.

