

Warszawa, 19 maja 2016

prof. dr hab. Paweł Nurowski
Centrum Fizyki Teoretycznej PAN
Warszawa

RECENZJA PRACY DOKTORSKIEJ "ROZWIĄZANIA RÓWNAŃ EINSTEINA W
CZASOPRZESTRZENIACH O WYMIARZE WIĘKSZYM NIŻ 4" NAPISANEJ PRZEZ
PANIĄ MAGISTER MAŁGORZATĘ JAKIMOWICZ-BAZYLUK

1 Temat pracy

Praca doktorska pani magister Jakimowicz-Bazyluk dotyczy dwóch metod konstrukcji rozwiązań próżniowych równań Einsteina w wymiarach większych niż cztery.

Pierwsza z tych metod polega na redukcji wielowymiarowych równań Einsteina poprzez nałożenie warunku symetrii względem grupy obrotów na rozwiązania. Metoda ta, choć naturalna, nie była dotychczas rozważana i sformułowana w takiej ogólności jak w prezentowanej rozprawie doktorskiej. Druga metoda opisana i używana w pracy, jest znaną metodą generacji nowych rozwiązań, z rozwiązań posiadających dwa komutujące wektory Killinga.

Obydwie metody zostały użyte przez panią Jakimowicz-Bazyluk do otrzymania nowych ścisłych rozwiązań wielowymiarowych próżniowych równań Einsteina. Rozwiązania te są w jawnej postaci podane w omawianej pracy doktorskiej i stanowią jej główny wynik. Są one też podstawą trzech artykułów pani Jakimowicz-Bazyluk w *Classical and Quantum Gravity* i *International Journal of Theoretical Physics*. Współautorami tych artykułów są Jacek Tafel (wszystkich trzech) oraz Adam Szereszewski (jednego).

Rozwiązania wielowymiarowych równań Einsteina są istotne dla testowania teorii unifikujących oddziaływania, takich jak wielowymiarowa teoria Kaluzy-Kleina, czy teorie strun i bran. Większe wymiary pozwalają na więcej swobody i w związku z tym niektóre twierdzenia dotyczące sztywności próżniowych rozwiązań równań Einsteina z czterowymiarowej teorii względności, takie jak np. twierdzenie Birkhoffa, nie są w nich słuszne. Dlatego też opieranie się w teoriach wielowymiarowych tylko na wnioskach płynących z wielowymiarowego uogólnienia rozwiązania Schwarzschilda jest zawodne. W tym kontekście szczególnie istotne jest poznanie wszystkich próżniowych rozwiązań sferycznie symetrycznych. Było to jednym z celów omawianej tu pracy.

2 Opis wprowadzonych technik i rezultatów

Pierwszym ważnym wynikiem pracy jest zdefiniowanie sferycznej symetrii Lorentzowskich metryk w wymiarze $D = N + 1 + n$. Definicja ta mówi, że czasoprzestrzeń ma tę symetrię, gdy działa w niej grupa $SO(n+1)$, która jest grupą symetrii pól i materii, i której orbitami są n -wymiarowe sfery, utożsamiane z ostatnimi n -wymiarowymi w $D = N + 1 + n$. Ponieważ w rozdziale 2.1 pracy nie ma podanych założeń dotyczących tego jakie nierówności spełnia

liczba D , a pojawia się nierówność $N > 1$, taka definicja czasoprzestrzeni sferycznie symetrycznej, nie pozwala na nazwanie 'sferycznie symetryczną' 4-wymiarowej czasoprzestrzeni z grupą symetrii $\text{SO}(3)$, (tutaj $D = 4$, $n = 2$, $N = 1$ i grupa symetrii działa na sferach S^2), a sprawia, że w wymiarze 4, czasoprzestrzenia 'sferycznie symetryczną' jest czasoprzestrzeń z grupą symetrii $\text{SO}(2)$, (tutaj $D = 4$, $n = 1$, $N = 2$ i grupa symetrii działa na okręgach S^1). Nazwać można wszystko po swojemu, ale nazewnictwo wprowadzone na początku rozdziału 2.1, w wyniku braku początkowego założenia że $D > 4$, jest mocno niestandardowe. Jest faktem, że ta ostatnia możliwość jest wykluczona w tytule pracy, ale uważam, że warto było to, delikatnie mówiąc, 'przypomnieć' na samym początku rozdziału 2.1.

Pomimo tej uwagi, uważam definicję sferycznej symetrii za istotną część pracy, bo np. już w wymiarze $D=5$ pozwala uporządkować rozwiązania z grupą symetrii $\text{SO}(n+1)$ działającą na sferycznych orbitach i rozdzielić rozwiązanie nazywane rozwiązaniem Tangherliniego ($D = 5$, $N = 1$, $n = 3$, grupa symetrii $\text{SO}(4)$ działająca na sferach S^3) od rozwiązania Grossa-Perry'ego ($D = 5$, $N = 2$, $n = 2$, grupa symetrii $\text{SO}(3)$ działająca na sferach S^2). Tutaj zgadzam się, że obydwie sytuacje zasługują na nazwanie ich 'sferycznie symetrycznymi'.

Jednym z głównych wyników rozważanej pracy doktorskiej jest redukcja próżniowych równań Einsteina ze stałą kosmologiczną w wymiarze $D = N + 1 + n$, do równań na $N + 1$ -wymiarowych przestrzeniach transwersalnych do orbit założonej grupy sferycznej symetrii. Redukcja ta polega na wprowadzeniu układu współrzędnych na czasoprzestrzeni $D = N + 1 + n$ wymiarowej, w którym współrzędne na orbitach są oznaczane przez x^a , i technicznym założeniu że $N > 1$. Dalej, standardowa procedura prowadzi do zredukowanych równań. Można je zinterpretować jako równania Einsteina dla nowej metryki Lorentzowskiej, tym razem w wymiarze $N + 1$, którą jest odpowiednio przeskalowane obcięcie metryki czasoprzestrzeni D -wymiarowej do podrozmierności $x^a = \text{const}$. Te indukowane na $x^a = \text{const}$ równania Einsteina nie są już równaniami próżniowymi; ich tensor energii-pędu pochodzi od pola skalarowego ϕ związanego z pewną składową metryki D -wymiarowej. Jako konsekwencja próżniowych równań Einsteina D -wymiarowych, pole ϕ spełnia równanie falowe ze źródłem pochodzącym od potencjału, który nieliniowo zależy od ϕ .

W dalszej części pracy pani Jakimowicz-Bazyluk wprowadza pewne techniczne założenia, przy których można znaleźć przykłady jawnych rozwiązań zredukowanych równań. Przy tych założeniach trudna część równań staje się równaniami algebraicznymi, i jedynymi równaniami różniczkowymi do rozwiązania pozostają trzy równania różniczkowe zwyczajne na trzy niewiadome funkcje rzeczywiste. Dla małych $N = 2, 3$ zostają podane wszystkie rozwiązania równań algebraicznych; są one przy tym elegancko doprowadzone do postaci normalnych, tak aby uniknąć później nieistotnych parametrów w odpowiadającym tym rozwiązaniom meterykom.

Pozostały do rozwiązania układ trzech równań różniczkowych zwyczajnych jest dalej rozwiązywany przy różnych dodatkowych założeniach. Z podziwu godną systematycznością znajdowane są przypadki szczególne, w których daje się wypisać jawne rozwiązania. Powstaje całe ZOO metryk w wymiarze $N + 1$, które spełniają równania zredukowane, a co za tym idzie, także metryk D -wymiarowych, które spełniają próżniowe równania Einsteina ze stałą kosmologiczną.

Każda z otrzymanych metryk jest dokładnie przebadana: określony jest jej typ algebraiczny, jej symetrie, asymptotyka oraz struktura osobliwości (jeśli takie występują).

Ze wszystkich otrzymanych metryk Einsteina na szczególną uwagę zasługuje kilka klas metryk opisanych w rozdziale 3.3, najpierw dla $N = 2$, a później dla dowolnego $N > 2$, które bardzo nietrywialnie uogólniają pięciowymiarowe $\text{SO}(3)$ -symetryczne metryki Grossa-Perry'ego. W przypadku $N = 2$ i $n = 2$, za Grossem i Perrym, otrzymane analogi metryk Grossa-Perry'ego, są także zinterpretowane jako metryki pięciowymiarowej teorii Kaluzy-

Kleina, które definiują odpowiednią asymptotycznie płaską czasoprzestrzeń czterowymiarową z polem skalarnym i nietrywialnym potencjałem elektromagnetycznym.

Ostatnia grupa rezultatów zawartych w pracy powstaje w wyniku zastosowania w rozdziale 4 techniki zwanej 'transformacją symetrii' i użycia jej do generacji nowych rozwiązań równań Einsteina z otrzymanych wcześniej uogólnień metryk Grossa-Perry'ego w wymiarze 5. Te nowe rozwiązania mają znacznie bogatszą strukturę w ramach teorii Kaluzy-Kleina, niż uogólnione rozwiązania sprzed transformacji. Rozdział ten zawiera też bardzo użyteczny wynik eliminujący zbędne parametry w ogólnej transformacji symetrii z grupą $SL(3, \mathbb{R})$.

3 Ocena

Stwierdzam, że recenzowana praca jest bardzo dobrą pracą doktorską, która zawiera dwa ważne i oryginalne rezultaty natury ogólnej (redukcja równań przez symetrię $SO(n+1)$ oraz eliminacja nieistotnych parametrów w transformacji symetrii z grupą $SL(3, \mathbb{R})$), oraz obfitość rezultatów szczegółowych, którymi są nowe jawne ściśle rozwiązania próżniowych równań Einsteina w wymiarze większym niż 4.

W pracy widoczna jest wybitna biegłość doktorantki w używaniu wyrafinowanych technik geometrii różniczkowej i zastosowania ich do rozwiązywania nieliniowych układów równań różniczkowych cząstkowych. Widać także dobrą znajomość literatury. Moim niewielkim zastrzeżeniem w tym względzie, jest brak odniesień do algebraicznej klasyfikacji metryk wielowymiarowych podanej w serii prac przez Armana Taghavi-Chaberta, którego klasyfikacja mogłaby być przetestowana na przykładach metryk znalezionych w pracy. Poruszam tę kwestię w ramach własnych zainteresowań: wśród części specjalistów panuje opinia, że klasyfikacja A. Taghavi-Chaberta jest ogólniejsza niż ta rozważana w pracy. Ciekawi mnie czy jest bardziej dokładna i czy daje się ją efektywnie stosować tak jak klasyfikację używaną tutaj.

W pracy jest pewna liczba literówek, np. takie jak tajemnicze 'black statur' na str. 7, czy 'grupi' na str. 8, oraz brak kropki po '3', a przed 'O' na końcu strony 42. Jest też trochę kolokwializmów, takich jak np. używana fraza: 'niezależna od piątego wymiaru'.

Choć praca jest dość dobrze napisana i w zasadzie 'łatwo się ją czyta', co jest jej wielkim plusem, to wydaje mi się, że można było poświęcić trochę więcej czasu na uświadomieniu czytelnikowi znaczeń liczb N , n i D , zwłaszcza, że czasami praca odwołuje się do grupy $SO(n)$ (jak na str. 8), a czasami (jak w przeważającej części pracy) do grupy $SO(n+1)$. Występują też dwa różne symbole d (w równaniu (1.1)) i D (w całej pracy), które wydają się być tym samym D . Ostatnim niewielkim mankamentem pracy, o którym chciałbym wspomnieć jest fakt, że bardzo późno, bo dopiero na stronie 15, czytelnik dowiaduje się o jakich równaniach Einsteina pisano w pracy do tej pory. Według mnie równanie (2.1) powinno pojawić się już na stronie 4, np. w zdaniu otwierającym akapit opisujący rozdział 2.

Te moje niewielkie zastrzeżenia w niczym nie umniejszają merytorycznej zawartości pracy. Z pełnym przekonaniem uważam, że praca doktorska pani Małgorzaty Jakimowicz-Bazyluk zasługuje na ocenę bardzo dobrą.

4 Wniosek formalny

Wnoszę o dopuszczenie pracy do obrony.

Paweł Nurowski

