

2016 -10- 21

L. dz.

Biełkarske

centrum fizyki teoretycznej

POLSKA AKADEMIA NAUK

Al. Lotników 32/46
02-668 WarszawaProf. dr JERZY KIJOWSKI
TEL: (48-22) 847-09-20
FAX: (48-22) 843-13-69
E-MAIL: kijowski@cft.edu.pl

21 Października 2016 roku

Dziekan Wydziału Fizyki
Uniwersytetu Warszawskiego
ul. Hoża 69
00-681 WARSZAWA

Recenzja pracy doktorskiej mgr Jędrzeja Świeżewskiego

pt.

„Observer’s observables. Definition and applications”

Mgr Jędrzej Świeżewski przedstawił obszerną rozprawę doktorską na temat struktury kanonicznej (symplektycznej) przestrzeni danych początkowych dla równań Einsteina. Przestrzeń ta odgrywa rolę przestrzeni fazowej w hamiltonowskiej wersji teorii grawitacji.

Wielu teoretyków podziela zdanie, że najpilniejszym – a jednocześnie najtrudniejszym – zadaniem stojącym przed współczesną fizyką teoretyczną jest usunięcie istniejących obecnie sprzeczności pojęciowych między fizyką kwantową a teorią grawitacji. Często mówi się o *kwantowaniu grawitacji*, czyli o konstrukcji kwantowej wersji ogólnej teorii względności. Właśnie formalizm kanoniczny teorii pola mógłby – według wielu badaczy – być dobrym punktem wyjścia do realizacji tego programu.

Uniwersytet Warszawski jest jednym z ważniejszych centrów, w którym realizuje się ten program, a konkretnie jego wersję znaną jako „Loop Quantum Gravity”. Jest ona oparta na pracach Ashtekara i Lewandowskiego i jest uznanym w Świecie i bardzo popularnym kierunkiem badawczym. Recenzowana rozprawa wywodzi się właśnie z tej szkoły.

Trudności, jakie napotykamy przy hamiltonowskim „kwantowaniu” teorii Einsteina, wynikają z jej niezmienniczości względem dyfeomorfizmów czasoprzestrzennych. Zjawisko to jest równoważne występowaniu tzw. *więzów*, które muszą spełniać dane początkowe tej teorii. Często spotykamy się z poglądem, że taką teorię należy kwantować „przed nałożeniem więzów”, a potem starać się je „zaimplementować” na poziomie kwantowym. Taka implementacja polegałaby na sformułowaniu warunku wyróżniającego „podprzestrzeń stanów fizycznych” w przestrzeni Hilberta stanów „pełnej teorii”. Dużo bliższy jest mi punkt widzenia polegający na tym, że „nie-fizycznych” stopni swobody należy unikać jak złośliwych (*nieczystych*?) duchów a „kwantować” jedynie prawdziwe, fizyczne stopnie swobody. Recenzowana praca doktorska dotyczy podstaw takiej właśnie procedury: od początku akceptuje ona więzy i stara się opisać strukturę przestrzeni, którą w literaturze geometrycznej nazywa się *zredukowaną przestrzenią fazową*. Jest to po prostu zbiór klas danych początkowych równoważnych ze względu na degenerację struktury symplektycznej obciętej do przestrzeni więzów.

Bardzo dobrze rozumiemy na czym polegają te wybory w elektrodynamice. Forma symplektyczna jest tam opisywana wyrażeniem

$$\Omega = \int_V \delta \mathcal{D}^k \wedge \delta A_k$$

gdzie $A = (A_k)$, $k = 1, 2, 3$, oznacza potencjał wektorowy pola magnetycznego zaś $\mathcal{D} = (\mathcal{D}^k)$ – gęstość wektorową opisującą indukcję elektryczną. Degeneracja tej formy na przestrzeni więzów $\{\text{div} \mathcal{D} = \rho\}$ (na przykład $\rho = 0$ w teorii swobodnej) jest równoważna niezmienniczości teorii względem cechowania: $A \rightarrow A + d\phi$. „Redukcję” teorii można zrealizować na dwa sposoby: albo parametryzując przestrzeń zredukowaną niezmiennikami cechowania (w terminologii używanej w recenzowanej pracy: *obserwabli*) albo nakładając odpowiednie warunki cechowania. Typowym przykładem pierwszej strategii jest np. opis elektrodynamiki kwantowej w klasycznym podręczniku prof. I. Białynickiego-Biruli (lub jego znacznie rozbudowanej wersji, autorstwa I.B.B. oraz Z.B.B), gdzie przestrzeń fazowa jest opisywana przy pomocy pól $\mathcal{D}^k$ i $\mathcal{B}^k$ (wielkość $\mathcal{B} := dA$ jest indukcją magnetyczną). Trudnością pojawiającą się w takim opisie jest niediagonalna postać formy symplektycznej. Zjawisko to kwituje się często wielce mylącym określeniem: *nie-kanoniczne reguły komutacji* (reguły komutacji są kanoniczne, to zmienne wybrane do opisu tych reguł nie są kanoniczne!). Komplikuje ono w pewnym stopniu opis kwantowania. Natomiast druga strategia polega na nałożeniu warunku cechowania na potencjał A_k : np. cechowania *Coulomba* czy aksjalnego. Można to zilustrować kładąc właśnie $A_3 = 0$ w pewnym układzie współrzędnych, przez co forma symplektyczna Ω obcięta do podprzestrzeni danych spełniających ten warunek cechowania redukuje się do

$$\Omega = \int_V \delta \mathcal{D}^a \wedge \delta A_a$$

gdzie $a = 1, 2$. W ten sposób zmiennymi kanonicznymi pozostają jedynie $\mathcal{D}^a$ oraz δA_a . No dobrze: a co stało się ze składową $\mathcal{D}^3$ pola elektrycznego? Przedtem, w teorii bez uwzględnienia więzów, „komutowała” ona z nimi. Teraz, po ograniczeniu się do przestrzeni danych spełniających warunek cechowania, nie jest ona już zmienną niezależną, lecz funkcją nowych zmiennych kanonicznych (w tym przypadku jedynie $\mathcal{D}^a$) parametryzujących tę przestrzeń. Gdyby ktoś chciał obliczyć np. jej nawias Poissona z δA_a , to musi wpięrować znaleźć tę funkcję rozwiązując równanie więzów, a potem już używać zredukowanej formy symplektycznej.

Warto tutaj podkreślić, że w gruncie rzeczy obie te strategie – choć różnią się na poziomie technicznym – są całkowicie równoważne. Mogłoby wydawać się, że to jakiś paradoks, bo cóż to za „obserwablą” ze składowych A_1 czy A_2 potencjału! A tymczasem tak właśnie jest! Warto w tym celu zauważyć, że równoważność ta wynika z możliwości interpretowania transformacji cechowania na dwa różne sposoby: czynny i bierny. Redukując przestrzeń fazową według pierwszej z opisanych wyżej strategii, traktujemy transformację cechowania (np. $A \rightarrow A + d\phi$ w elektrodynamice) jako przejście między dwiema różnymi konfiguracjami pola w (niezredukowanej jeszcze) przestrzeni fazowej. Punkty te należą do jednej klasy równoważności. Obserwabłami nazywamy funkcje przybierające tę samą wartość na całej klasie. Natomiast drugą strategię – ustalanie warunku cechowania – można interpretować na dwa sposoby. Autor recenzowanej rozprawy przywiązuje wagę do *biernej* interpretacji cechowania: transformacja cechowania to zmiana opisu (w elektrodynamice to zmiana trywializacji odpowiedniej wiązki a w teorii względności – zmiana układu współrzędnych czasoprzestrzennych) pewnej ustalonej, nie podlegającej zmianie, konfiguracji pola („koneksji” w odpowiedniej wiązce dla elektrodynamiki czy metryki i pędu ADM dla teorii względności). W takiej interpretacji odpowiednia współrzędna pola A czy też metryki g , obliczona w taki sposób, by spełnić warunek cechowania **jest** niezmiennikiem i to bardzo skomplikowanie i nielokalnie (nawet w elektrodynamice!) zależnym od konfiguracji pola.

Tymczasem dokładnie te same wyniki uzyskamy stosując mniej wyrafinowaną, mianowicie czynną interpretację warunku cechowania. Najpierw ustalamy pewną trywializację wiązki (czy pewien układ współrzędnych w teorii względności), zaś konfigurację pola identyfikujemy z jej opisem w tym właśnie układzie. A następnie dopuszczamy do konkurencji jedynie podprzestrzeń $\mathcal{G}$ przestrzeni więzów $\mathcal{C}$, złożoną z tych konfiguracji, które spełniają warunek cechowania. Jeśli każda klasa równoważności ma reprezentanta w $\mathcal{G}$, to ona właśnie stanowi przestrzeń „zredukowaną”. Jej struktura kanoniczna będzie opisana przez obcięcie formy symplektycznej do tej podprzestrzeni.

W pierwszej interpretacji wielkość $A_k(x)$ jest skomplikowaną, nielokalną funkcją stanu, otrzymaną poprzez rozwiązanie więzów. W drugiej natomiast: banalną wartością k -tej składowej potencjału, przy czym $A_3 \equiv 0$ jest po prostu definicją podprzestrzeni $\mathcal{G}$ i nie niesie żadnej informacji na temat stanu pola. Jednak wszystkie rachunki wykonane w obydwu tych podejściach są wzajemnie równoważne. Wynika to z niezmienniczości obu teorii (elektrodynamiki i teorii względności) względem transformacji cechowania: zarówno biernego jak i czynnego.

Jest imponujące, że autor recenzowanej rozprawy posłużył się trudniejszą, bierną interpretacją, co jeszcze bardziej podnosi wartość uzyskanych wyników i dowodzi dobrego opanowania przez doktoranta tego skomplikowanego rzemiosła.

Rozpisałem się na temat cechowania aksjalnego w elektrodynamice, bowiem proponowana w rozprawie konstrukcja jest doń wysoce analogiczna: w pierwszej, trójwymiarowej wersji ustala się trzy składowe metryki, mianowicie $g_{rr} = 1$ oraz $g_{rA} = 0$, gdzie $A = 1, 2$ numeruje współrzędne kątowe, natomiast w wersji czterowymiarowej dochodzi jeszcze warunek na składowe pędu ADM, mianowicie: $P^{rr} - P^{AB}g_{AB} = 0$. Warunki te mają ładną, naturalną interpretację geometryczną: linie radialne są geodezyjnymi (trój- lub cztero-wymiarowej geometrii) na których współrzędna r jest parametrem naturalnym. Takie warunki cechowania należą do obszernej klasy warunków „algebraicznych” w odróżnieniu od cechowań różniczkowych, jak np. zaproponowane przez J. Yorka tzw. cechowanie „traceless-transversal”. Niestety, cechowanie aksjalne nie jest globalne, bowiem linie geodezyjne mogą tworzyć kaustyki. Autor próbuje ominąć tę trudność

żądając spełnienia warunku cechowania jedynie w otoczeniu ustalonego punktu (zwanego „obserwatorem” – stąd „observable obserwatora”, użyte w tytule pracy), jednak i tak uzyskana parametryzacja nie obejmuje całej przestrzeni fazowej, bowiem dla każdego ustalonego punktu $x \neq 0$ istnieją konfiguracje, dla których wartości obserwabli $(g_{AB}(x), P^{AB}(x))$ nie są dobrze określone, bowiem kaustyka powstaje wcześniej, zanim linia geodezyjna zdoła dotrzeć od obserwatora do punktu x . Jeśli tak, to chyba można było ograniczyć się do „dostatecznie słabych pól”, dla których te współrzędne istnieją globalnie. Mam wrażenie, że z punktu widzenia kwantowania wyjdzie na to samo.

Wszystkie rachunki w pracy autor wykonał w języku nawiasów Poissona a nie – równoważniej im – formy symplektycznej. To kwestia upodobania i wyboru. Zwracam uwagę, że struktura Poissonowska jest po prostu „tensorem odwrotnym” do formy symplektycznej, cokolwiek miałyby to oznaczać. Otóż w teorii pola, gdzie przestrzeń fazowa jest nieskończenie wielowymiarowa, trzeba się mocno namęczyć, by powiedzieć co to znaczy „odwrotny”. Na jakiej przestrzeni funkcyjnej? Przestrzeń funkcji klasy C^∞ ma niezwykle trudną (nie-Banachowską) topologię i wszelkie problemy funkcjonalno-analityczne są tu beznadziejnie trudne. Dlatego też rachunki takie są nieco zawieszone w *limbie* niedookreśloności, co prowadzi do wzorów takich jak (2.6), gdzie pojawia się szereg, który na pewno nie jest zbieżny, jeśli tylko funkcja f jest lokalna (np. znika poza pewnym otoczeniem punktu) – a więc nie jest analityczna. Również skomplikowane relacje między „nawiasem Poissona” a „nawiasem Diraca” stają się kompletnie trywialne we współczesnym języku geometrycznym: jest to po prostu ciągle ta sama struktura (forma) symplektyczna obcinana do coraz mniejszych podprzestrzeni. Myślę, że nie warto konserwować zgrzebnej techniki, którą Dirac posługiwał się do zapisu swoich genialnych intuicji w czasach, gdy adekwatny język matematyczny jeszcze nie istniał. Podkreślam jednak, że uzyskane przy pomocy tej techniki wyniki zawarte w rozprawie są absolutnie poprawne.

Należy więc stwierdzić, że zapowiadzana we wstępie do rozprawy konstrukcja „obserwabli operatora” została przeprowadzona bardzo sprawnie – *modulo* uwagi zamieszczone wyżej. Wyniki stanowią istotny wkład w badanie struktury kanonicznej Ogólnej Teorii Względności oraz konstrukcję zaplecza teoretycznego dla jej przyszłej, kwantowej wersji, jeśli taka kiedyś powstanie. Nie mam żadnych wątpliwości, iż praca spełnia wszystkie wymogi stawiane rozprawom doktorskim przez odpowiednią ustawę. Wnoszę o dopuszczenie mgr Jędrzeja Świeżewskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Na zakończenie chciałby jeszcze podzielić się z doktorantem dwiema uwagami dotyczącymi metodologii przyszłych badań w tej dziedzinie. Uwagi te proszę traktować jako głos w dyskusji naukowej, wywołanej prezentacją wyników rozprawy i nie mają związku z moją, wielce pozytywną, oceną pracy.

Pierwsza uwaga dotyczy układów „całkowicie związanych” (*totally constrained* – str. 15 rozprawy, rozdział 2.2.1). Otóż każdy klasyczny układ mechaniczny można przedstawić w ten sposób. Niech bowiem będzie dany układ hamiltonowski z przestrzenią fazową (p, x) (dla prostoty rozważam jeden stopień swobody), formą symplektyczną $\Omega = dp \wedge dx$ i jakimś hamiltonianem $H = H(p, x)$. Dodając do tej przestrzeni czas t oraz sprzężony z nim pęd $-E$ można ten sam problem zapisać w przestrzeni $(-E, t, p, x)$ z formą symplektyczną $\tilde{\Omega} = -dE \wedge dt + dp \wedge dx$ oraz z więzami $C := H(p, x) - E = 0$. Pole hamiltonowskie X_C prawidłowo generuje dynamikę. Jak teraz odzyskać pierwotną teorię i – przede wszystkim – Hamiltonian H , którego widmo będzie przecież zasadniczym obiektem teorii kwantowej, którą mamy właśnie konstruować. Jak słusznie zauważa doktorant, potrzebna jest w tym celu funkcja czasu. A więc niech będzie to właśnie *prawdziwy* czas t . Spróbujmy zatem odzyskać Hamiltonian z więzów jako

$$H(p, x) = C + E.$$

Niestety, „wiąz” C nie jest dobrą wielkością, bowiem pomnożony przez dowolną funkcję też wyznacza tę samą powierzchnię więzów. No to nałożmy jeszcze dodatkowy warunek, żeby nawias Poissona C z t był równy jedności. Niestety, znów nie jest dobrze, bowiem przy pomocy transformacji kanonicznych można taki Hamiltonian przekształcić w *dowolny* inny Hamiltonian. Zilustruję to prostym przykładem. Rozważmy oscylator harmoniczny:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2,$$

gdzie $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Transformacja kanoniczna dana wzorami:

$$x = \tilde{x} \cos \omega t + \frac{1}{\sqrt{km}} \tilde{p} \sin \omega t,$$

$$p = -\sqrt{km} \tilde{x} \sin \omega t + \tilde{p} \cos \omega t,$$

$$E = H(\tilde{p}, \tilde{x}) - \tilde{E},$$

przy nie zmienionym czasie ($\tilde{t} = t$) daje:

$$\tilde{\Omega} = -dE \wedge dt + dp \wedge dx = -d\tilde{E} \wedge dt + d\tilde{p} \wedge d\tilde{x}$$

natomiast więzy mają teraz postać $\tilde{E} = 0$ (czy też raczej: $-\tilde{E} = 0$, jeśli nawias Poissona z t ma być ciągle równy jedności a nie „minus jedności”). Próba odzyskania stąd Hamiltonianu da nam $H \equiv 0$. Co gorsza, można zastosować teraz odwrotną transformację kanoniczną z innymi parametrami (np. (μ, κ) zamiast (m, k)) i przekształcić ten układ znów w oscylator harmoniczny, ale o zupełnie innej częstotliwości drgań. Użyłem oscylatora harmonicznego jako najprostszego przykładu, ale można w ten sposób przekształcić *dowolny* Hamiltonian w *dowolny* inny, o zupełnie odmiennych własnościach fizycznych.

Widać, że sama struktura układu „całkowicie związanego” jest zbyt słaba i do prawidłowego opisu własności fizycznych układu potrzebujemy czegoś więcej.

Moja druga uwaga wiąże się właśnie z tym „czymś więcej”. Otóż wielkości zachowane, jak energia, pęd, moment pędu, moment statyczny, są generatorami „grupy asymptotycznych transformacji Poincaré”. Jeśli zredukować teorię również względem tych transformacji, traktując je jako cechowanie, to pozostaniemy z pustymi rękami: otrzymamy teorię, w której powyższe wielkości muszą być ustalone. Na przykład elektrodynamika klasyczna jest niezmiennicza względem grupy Poincaré, ale broń nas Boże przed redukcją względem tych symetrii bo zgubimy wszystko co ciekawe! Dlatego też nie podoba mi się pomysł redukcji względem „residualnego cechowania”. Mam wrażenie, że to residualne cechowanie powinno być raczej użyte do „zorientowania” rozważanego w pracy obserwatora względem wybranego układu obserwatorów w nieskończoności. Dopiero takie „zorientowanie” pozwoli (takie mam wrażenie) na jednoznaczne zdefiniowanie wartości energii (Hamiltonianu) rozważanego układu fizycznego. Ale, jak powiedziałem, to wychodzi już poza rozprawę.

Z poważaniem



Jerzy Kijowski