

Kraków, 16. 06. 2017

Recenzja pracy dokorskiej magistra Piotra Kucharskiego

Knots and BPS invariants

Klasyfikacja węzłów — klas równoważności gładkich odwzorowań $S^1 \rightarrow S^3$ — stanowi klasyczny, nie w pełni rozwiązany problem matematyczny. Użytecznym narzędziem takiej klasyfikacji są niezmienniki węzłów, takie jak wielomian Jonesa czy jego uogólnienie, wielomian HOMFLY-PT $P(a, q)$ (od nazwisk pracujących w pięciu niezależnych grupach autorów, którzy zaproponowali jego konstrukcję: J. Hoste, A. Ocneanu, K. Milletta, P. J. Freyda, W. B. R. Lickorisha, D. N. Yettera J. Przytyckiego i P. Traczyka).

Wielomiany te stanowią jedną ze stron ciekawego związku między teorią węzłów i kwantową teorią pola. Jak pokazał Edward Witten, wielomian Jonesa dla danego węzła może być uzyskany poprzez obliczenie, w trójwymiarowej teorii Cherna-Simonsa z grupą cechowania $SU(2)$, kwantowej wartości oczekiwanej pokrywającej się z węzłem pętli Wilsona. Uogólnienie tego rachunku na teorię z grupą cechowania $SU(N)$ (dla reprezentacji fundamentalnej) pozwala odtworzyć wielomiany HOMFLY-PT węzłów, zaś dopuszczenie dowolnej reprezentacji R grupy cechowania prowadzi do tak zwanych “kolorowych” wielomianów HOMFLY-PT $P_R(a, q)$.

Pod koniec ubiegłego oraz na początku obecnego wieku pojawił się szereg prac z dalszymi uogólnieniami powyższych konstrukcji, wykorzystujących język topologicznej teorii strun oraz symetrię zwierciadlaną pomiędzy parami rozmaitości Calabi-Yau. Wyniki tych prac pozwalają powiązać oznaczane symbolem $\mathcal{H}_{ijk}^R$ przestrzenie stanów BPS, konstruowanych jako punktowa granica strun rozpiętych między zestawem D2 i D4 bran w geometrii szczególnej, niezwartej rozmaitości Calabi-Yau z nowymi, wielomianowymi niezmiennikami węzłów, tak zwanymi kolorowymi superwielomianami,

$$P_R(a, q, t) = \sum_{i,j,k} a^i q^j t^k \dim \mathcal{H}_{ijk}^R.$$

Fizyczne rozumowanie przedstawione w wymienionych powyżej pracach pozwala utożsamić (dla szczególnych, symetrycznych reprezentacji grupy cechowania) zdefiniowane tym związkiem kolorowe superwielomiany z kolorowymi wielomianami HOMFLY-PT.

Fakt, że $\dim \mathcal{H}_{ijk}^R$ są liczbami naturalnymi prowadzi do wniosku — nazywanego w recenzowanej pracy doktorskiej hipotezą LMOV — iż pewne niezmienniki topologiczne węzłów, definiowane poprzez kolorowe wielomiany HOMFLY-PT, są liczbami całkowitymi. Częściowy, matematyczny dowód tej hipotezy stanowi jeden z głównych wyników pracy doktorskiej pana magistra Piotra Kucharskiego.

Recenzowana praca doktorska składa się z pięciu rozdziałów.

Rozdział pierwszy zawiera szkic rozumowania, które doprowadziło do sformułowania hipotezy LMOV oraz definicje pojęć i struktur, używanych w dalszej części pracy.

W rozdziale drugim Autor wprowadza pojęcie dualnego A-wielomianu, będącego wielomianowym (w zmiennych spełniających algebrę Weyla) operatorem anihilującym funkcję generującą dla wielomianów HOMFLY-PT kolorowanych symetrycznymi reprezentacjami grupy $U(N)$. Następnie Autor dyskutuje jego granicę klasyczną, definiującą krzywą algebraiczną zawierającą informację o niezmiennikach BPS węzła zadającego wielomian. Istotnym dla dalszej dyskusji jest także istnienie szczególnej klasy węzłów, dla której współczynniki kolorowego wielomianu $P_{Sr}(a, q)$ przy, odpowiednio, minimalnej i maksymalnej potędze argumentu a , spełniają niezależnie równania o operatorach nazywanych ekstremalnymi A-wielomianami.

Badanie w rozdziale trzecim klasycznej granicy ekstremalnych A-wielomianów dla kilku przykładowych węzłów pozwala na, jak pisze Autor, „eksperymentalne” sformułowanie „poprawionej hipotezy całkowitości” (improved integrality conjecture). Ma ona status matematycznego twierdzenia (dowodzonego tylko w szczególnym przypadku) które, jeśli okaże się prawdziwe, daje w szczególności konstrukcję nowego niezmiennika topologicznego węzłów (jak sam Autor przyznaje, jego fizyczna interpretacja nie jest jednak jasna).

Rozdział czwarty zawiera konstrukcję formalnego języka, który pozwala w zdefiniowanym w drugim rozdziale przypadku „ekstremalnym” otrzymać relację rekurencyjną spełniana przez niezmienniki BPS oraz podać dowód hipotezy LMOV dla pewnej szczególnej klasy węzłów. Rozdział piąty wreszcie zawiera hipotezę mającą postać równości, której jedną stronę tworzy funkcja generująca wielomianów HOMFLY-PT kolorowanych reprezentacją symetryczną, druga zaś jest wyrażona poprzez wielkości związane z grafem „kołczanowym” (quiver diagram). Hipoteza ta — nazwana przez Autora “knots-quivers correspondence” pozwala w szczególności powiązać niezmienniki BPS dla węzłów z niezmiennikami Donaldsona-Thomasa dla grafu (dokładniej z “integer

motivic Donaldson-Thomas invariants”). Jeśli związek grafów kołczanowych i węzłów okaże się być prawdziwy, to hipoteza LMOV będzie jego konsekwencją.

Wyniki zawarte w rozdziałach drugim, trzecim i czwartym ukazały się jako publikacje w bardzo dobrych czasopismach naukowych (Communications in Mathematical Physics i Journal of High Energy Physics) co daje dodatkową rękojmię ich rzetelności. Prace te zostały dostrzeżone w środowisku naukowym i były już wielokrotnie cytowane. Wyniki zawarte w rozdziale piątym pan magister Piotr Kucharski anonsuje jako mające się ukazać. Wartym podkreślenia jest również fakt, że pan magister Piotr Kucharski jest współautorem dwóch innych prac, których wyniki nie wchodzą w skład rozprawy doktorskiej, i z których jedna została już opublikowana w Nuclear Physics B.

Pozwolę sobie teraz sformułować kilka, częściowo krytycznych uwag.

Wszystkie prace tworzące materiał rozprawy doktorskiej pana magistra Piotra Kucharskiego powstały we współpracy z innymi, bardziej doświadczonymi badaczami (w szczególności z promotorem pracy doktorskiej, dr hab. Piotrem Sułkowskim). Rozdziały drugi, trzeci i czwarty nie stanowią niestety istotnej „wartości dodanej” w stosunku do samych publikacji. Nie jestem w stanie porównać zawartości rozdziału piątego z niedostępną jeszcze (nawet w formie preprintu na serwerze ArXiv) publikacją.

Wstępny rozdział pierwszy — który w zamierzeniu jest wprowadzeniem do tematyki pracy — jest nieco rozczarowujący. Pan magister Kucharski dosyć wiernie trzyma się sformułowań z prac oryginalnych, na których opiera kolejne fragmenty i w efekcie ta część pracy jest raczej kompilacją prac innych autorów a nie samodzielny, syntetyczny opracowaniem. W wielu miejscach widoczny jest także — jak sądzę — pośpiech towarzyszący Autorowi podczas pracy nad rozprawą doktorską, co przejawia się w występujących w pracy „misprintach”. Pozwolę sobie wymienić kilka z nich:

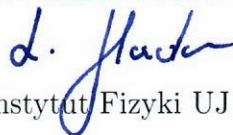
- w definicji topologicznego modelu sigma w podrozdziale 1.1.2 jedna z grassmannowskich jednoform jest elementem cofnięcia wiązki form anty-holomorficznych (w pracy obie formy zostały zapisane jako cofnięcia elementów wiązki form holomorficznych);
- pierwszy wyraz w działaniu (1.1.10) wydaje mi się podejrzany: według mojej wiedzy jeden z indeksów metryki oraz odpowiadający mu indeks pola bozonowego powinien być indeksem anty-holomorficznym (zapewniłoby to rzeczywistość działania);

- pojawiający się we wzorze (1.1.14) cykl β jest elementem grupy homologii, a nie kohomologii;
- w drugiej linijce wzoru (2.2.1) sumowanie po indeksie n powinno być już nieobecne;
- w opisie rysunku 3.1.2 niepotrzebnie powtarza się słowo "węzeł".

Nieco razi także częste używanie w rozdziale pierwszym, w sytuacji gdy przedstawiane tam rozumowania i konstrukcje prezentowane są z konieczności w sposób skrócony, a nawet szkicowy, wyrażen typu "udowodniliśmy". Wreszcie, w niektórych podrozdziałach rozdziału pierwszego znajdują się stwierdzenia nieprecyzyjne: nie jest na przykład jasnym — na początku podrozdziału w którym Autor pisze o otwartych strunach topologicznych — na jakie pola należy nałożyć warunek brzegowy Dirichleta a parametr t występujący w akapicie pod wzorem 1.1.19 nie został tam zdefiniowany.

Powyższe uwagi krytyczne nie wpływają jednak w istotny sposób na moją ogólną, pozytywną ocenę pracy doktorskiej pana magistra Piotra Kucharskiego. Omawiane w niej zagadnienia są ważne i interesujące, a uzyskane wyniki głęboko nietrywialne. Już samo przyswojenie tak obszernej klasy fizycznych i matematycznych pojęć wystawia bardzo dobre świadectwo wiedzy pana magistra Kucharskiego, a umiejętność twórczego zastosowania tych pojęć, o której z całą dobitnością świadczą uzyskane wyniki pozwala na stwierdzenie, iż osiągnął on poziom rozwoju naukowego z naddatkiem wystarczający do ubiegania się o stopień naukowy doktora. Na tej podstawie wnoszę o dopuszczenie go do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Dr hab. Leszek Hadasz


Instytut Fizyki UJ