

# Bound states of heavy quarks in renormalization group procedure for QCD

Kamil Serafin

Uniwersytet Warszawski, Wydział Fizyki

## Abstract

The thesis presents a study of bound states of heavy quarks in heavy-flavor QCD (only quarks  $b$  and  $c$ , without light quarks). The theory is written in the front form of Hamiltonian dynamics, with the canonical Hamiltonian as a starting point that needs regularization and renormalization. It is renormalized using renormalization group procedure for effective particles (RGPEP). The RGPEP operates with the concept of effective particles whose size is a scale parameter of renormalization group transformation. The renormalized Hamiltonian, written in terms of creation and annihilation operators for effective particles, is finite when the regularization cutoff on transverse momenta is sent to infinity. Asymptotic freedom follows and allows one to compute the renormalized Hamiltonian in perturbation theory at hadronic scales. I limit the calculation to the terms that are of second order in the effective coupling constant. The renormalized Hamiltonian eigenvalue equation, written in the whole Fock space of effective particles, is replaced by the eigenvalue equation written in terms of only two sectors of the Fock space – one containing the minimal quark content ( $Q\bar{Q}$  for mesons and  $QQQ$  for baryons, where  $Q = b, c$ ), and the other one that in addition to the quarks contains also just one effective gluon. The replacement is made plausible by the additional step, which is the assumption that in the reduced eigenvalue equation the gluon has mass, which is allowed to be a function of the gluon momentum relative to the quarks. In contrast to sectors with gluons, sectors with extra quark-antiquark pairs may be safely omitted because the renormalized Hamiltonian does not allow interactions to change invariant masses of states by much more than the RGPEP scale parameter. The sector with one massive gluon is then eliminated using the perturbative procedure of Bloch. The resulting effective Hamiltonians for  $Q\bar{Q}$  and  $QQQ$  states contain the RGPEP form factors in interaction vertices and can be approximated by the form they take in the nonrelativistic limit. Finally, the effective approximate Hamiltonians turn out to contain the Coulomb potentials and harmonic oscillator potentials between quarks. Using the effective Hamiltonians, approximate masses and wave functions of heavy hadrons are found. I derived also formulas for their electromagnetic form factors in elastic scattering and their structure functions in the electron deep inelastic scattering off them.

To calculate the mass spectra of mesons and baryons, the masses of quarks at the corresponding RGPEP scale parameters were fitted to the masses of the three lightest spin-1 states (excluding  $1^{+-}$  states) in the meson families of bottomonia and in the meson family of charmonia. and charmonia. The coupling constant was evaluated using the leading asymptotic freedom formula for two flavors. The results for masses of ground states of  $bbb$  and  $ccc$  baryons contain no free parameters and they agree well with predictions of other theoretical approaches. The excitation spectrum is in a qualitative agreement with lattice QCD studies. Therefore, these results constitute a firm foothold for future studies of bound states in QCD with one flavor of heavy quarks using our method. The results for  $ccb$  and  $bbc$  baryons, as well as  $c\bar{b}$  and  $b\bar{c}$  mesons, bear some theoretical uncertainty due to the universal mass shift that appears because of significant scale difference between bottom and charm quark masses. Removal of this uncertainty requires studies in the fourth order of perturbation theory in the coupling constant. Present calculations predict that in  $ccb$  the two  $c$  quarks form a diquark, while in  $bbc$  the  $b$  quarks are bound with each other more loosely than with the quark  $c$ .

I calculated the form factors of the hadrons I found and I used them to compute the radii of these hadrons. My results for the radii agree well with results found in literature and especially good agreement is obtained with the lattice calculations wherever comparison is possible. I also calculated magnetic moments of baryons and vector quarkonia. Comparison with literature shows that for systems that involve only one flavor of quarks my results agree with other theoretical predictions, and for systems that involve both charm and bottom quarks the moments are larger than those predicted using other methods.

The hadron structure functions I computed in a simplified way. I neglected the huge difference between the scale of quark binding and the scale of the virtual photon in deep inelastic scattering (formally infinite). My calculations show interesting features, such as dependence of the structure function shape on the wave function nodes. However, my calculations of the structure functions can be considered merely a demonstration of potential utility of the method, because I approximated the transformation that connects effective particles at two different RGPEP scales, that of DIS and that of bound-state formation, by identity. Corrections due to scale evolution are not included.

# Stany związane ciężkich kwarków w procedurze grupy renormalizacji dla QCD

Kamil Serafin

Uniwersytet Warszawski, Wydział Fizyki

## Streszczenie

Dysertacja przedstawia dociekania dotyczące stanów związanych w QCD ciężkich kwarków (tylko kwarki  $b$  i  $c$ , bez uwzględnienia lekkich kwarków). Teoria ta jest napisana we frontowej formie dynamiki Hamiltonowskiej z kanonicznym Hamiltonianem jako punktem startowym, który wymaga regularyzacji i renormalizacji. Renormalizacja jest przeprowadzona przy użyciu procedury grupy renormalizacji dla cząstek efektywnych (w skrócie RGPEP od ang. renormalization group procedure for effective particles). RGPEP używa koncepcji cząstek efektywnych, których rozmiar jest parametrem skali w procedurze renormalizacji. Zrenormalizowany Hamiltonian, zapisany przy użyciu operatorów kreacji i anihilacji cząstek efektywnych, jest skończony w granicy usuwania obciążenia na poprzeczne pędy do nieskończoności. Asymptotyczna swoboda charakteryzuje zrenormalizowany Hamiltonian i pozwala na obliczenie go w rachunku zaburzeń dla skali hadronowej. Moje rachunki ograniczam do wyrazów drugiego rzędu w efektywnej stałej sprzężenia. Równanie własne zrenormalizowanego Hamiltonianu, zapisane w całej przestrzeni Focka cząstek efektywnych, jest zastąpione równaniem własnym zapisanym w dwóch sektorach przestrzeni Focka – jednym, zawierającym minimalny zestaw kwarków ( $QQ$  dla mezonów i  $QQQ$  dla barionów, gdzie  $Q = b, c$ ), oraz drugim, który w dodatku do kwarków zawiera jeszcze tylko jeden efektywny gluon. Żeby uwiarygodnić to zastąpienie, poczynione jest dodatkowe założenie, że w zredukowanym problemie własnym gluon ma masę, która może być funkcją pędu gluonu względem kwarków. W przeciwieństwie do sektorów z gluonami, sektory z dodatkowymi parami kwark-antykwarck mogą być bezpiecznie pominięte, ponieważ zrenormalizowany Hamiltonian nie dopuszcza, żeby oddziaływania zmieniały masę inwariantną o dużo więcej niż parametr skali RGPEP. Sektor z jednym masywnym gluonem jest później wyeliminowany przy użyciu zaburzeniowej metody Blocha. W wyniku otrzymuje się efektywne Hamiltoniany dla stanów  $Q\bar{Q}$  oraz  $QQQ$  zawierające czynniki kształtu RGPEP w wierzchołkach oddziaływania i można je przybliżyć ich postacią jaką przyjmują w granicy nierelatywistycznej. Efektywne i przybliżone Hamiltoniany zawierają potencjały Coulomba oraz potencjały oscylatora harmonicznego pomiędzy kwarkami. Korzystając z efektywnych Hamiltonianów, przybliżone masy i funkcje falowe ciężkich hadronów zostały znalezione. Wyprowadziłem także wzory na elektromagnetyczne czynniki kształtu w zderzeniach elastycznych z elektronami oraz na funkcje struktury w głęboko nieelastycznym rozpraszaniu elektronów na tych hadronach.

Do obliczenia widm masowych mezonów i barionów, masy kwarków dla odpowiednich parametrów skali RGPEP zostały dopasowane do mas trzech najbliższych cząstek o spinie jeden (pomijając stany  $1^{+-}$ ) z rodziny bottomonium ( $b\bar{b}$ ) oraz z rodziny czarmonium ( $c\bar{c}$ ). Stała sprzężenia została obliczona, korzystając z wiodącego przybliżenia asymptotycznej swobody dla dwóch zapachów kwarków. Wyniki dla mas stanów podstawowych barionów złożonych z trzech kwarków  $b$  lub trzech kwarków  $c$ , czyli  $bbb$  oraz  $ccc$  nie zawierają żadnych swobodnych parametrów i zgadzają się z przewidywaniami innych teoretycznych metod ich liczenia. Widma masowe stanów wzbudzonych są w jakościowej zgodności z obliczeniami na sieci (Lattice QCD). Dlatego wyniki te stanowią mocne oparcie dla przyszłych badań stanów związanych w QCD z jednym zapachem kwarków przy użyciu naszej metody. Wyniki dla barionów  $ccb$  i  $bbc$  oraz dla mezonów  $c\bar{b}$  i  $b\bar{c}$  obarczone są teoretyczną niepewnością związaną z uniwersalnym przesunięciem mas, które pojawia się z powodu znacznej różnicy skal masowych kwarków  $b$  i  $c$ . Usunięcie tej niepewności wymaga rozszerzenia rachunku do czwartego rzędu w stałej sprzężenia. Obecne wyniki sugerują, że w  $ccb$  dwa kwarki  $c$  tworzą dikwark, podczas gdy w  $bbc$  kwarki  $b$  są słabiej związane ze sobą niż z kwarkiem  $c$ .

Obliczyłem czynniki kształtu hadronów, które rozważałem, i użyłem ich do obliczenia promieni tych hadronów. Moje wyniki na promienie zgadzają się z wynikami znalezionymi w literaturze, przy czym zgodność z wynikami Lattice QCD jest szczególnie dobra (w tych przypadkach gdzie porównanie jest możliwe). Obliczyłem także momenty magnetyczne barionów i wektorowych kwarkoniów. Porównanie z literaturą przedstawia zgodność z innymi metodami rachunkowymi dla cząstek złożonych z jednego rodzaju kwarków. Dla cząstek zawierających dwa rodzaje kwarków, momenty, które znalazłem, są większe niż momenty uzyskane przy użyciu innych metod.

Funkcje struktury obliczyłem w uproszczony sposób, pomijając wielką różnicę pomiędzy skalą wiązania kwarków i skalą wirtualnego fotonu w rozpraszaniu głęboko nieelastycznym (która jest formalnie nieskończona). Moje rachunki ujawniają ciekawe cechy funkcji struktury, jak zależność ich kształtu od zer funkcji falowej. Jednakże, moje rachunki funkcji struktury można uznać jedynie za demonstrację potencjalnej użyteczności metody, ponieważ transformację, która łączy cząstki efektywne dla dwóch różnych skal RGPEP, przybliżyłem identycznością. Poprawki związane z ewolucją ze skalą nie są uwzględnione.