

centrum fizyki teoretycznej

POLSKA AKADEMIA NAUK

Al. Lotników 32/46
02-668 Warszawa

Prof. dr JERZY KIJOWSKI
TEL: (48-22) 847-09-20
FAX: (48-22) 843-13-69
E-MAIL: kijowski@cft.edu.pl

21 Lipca 2021 roku

Przewodniczącego Rady Naukowej
Dyscypliny Nauki Fizyczne
Uniwersytetu Warszawskiego
prof. dr. hab. Wojciecha Satuła

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Marcina Zajęca

Rozprawa nosi obszerny, ale dobrze opisujący jej zawartość, tytuł: „Struktury geometryczne w klasycznej teorii pola z cechowaniem – redukcje, algebroidy Atiyaha, trójki Tulczyjewa” i jest bardzo kompetentnym opisem pewnego sformułowania struktury „kanonicznej” pojawiającej się naturalnie w klasycznych teoriach pola, których równania dynamiczne są wyprowadzane z zasady wariacyjnej.

Podobnie jak w mechanice klasycznej, bezpośrednio bazujące na zasadzie wariacyjnej sformułowanie teorii pola nazywa się „Lagranżowskim”, gdzie dynamikę opisuje się w języku równań różniczkowych drugiego rzędu (równań Eulera-Lagrange’a) spełnianych przez konfigurację opisywanego układu fizycznego, jednak dużo wygodniejsze w zastosowaniach jest sformułowanie „Hamiltonowskie”, gdzie dynamika jest opisywana przez równania pierwszego rzędu różniczkowego, nałożone na większą liczbę zmiennych: konfiguracje oraz „sprężone” z nimi pędy kanoniczne.

Mimo ogromnego zainteresowania matematyków dziewiętnastowiecznych strukturami „mechaniki analitycznej” – która stała się wtedy samodzielną dyscypliną naukową i przyciągnęła takie znakomitości jak J. L. Lagrange, A. Cayley, W. R. Hamilton, C. G. J. Jacobi, a później nawet nasz Stefan Banach – pojawiające się w niej naturalne struktury geometryczne zostały zidentyfikowane dość niedawno, podczas gdy cała inwencja tych wielkich ludzi szła w kierunku analitycznym. Jednym z „produktów” badania geometrycznej struktury mechaniki analitycznej jest tzw. „geometria symplektyczna”. Chociaż obecna *implicite* już w książce Lagrange’a, często w literaturze spotyka się opinię, że swoją obecną kodyfikację oraz nazwę zawdzięcza wydanej w 1968 roku książce francuskiego fizyka matematycznego Jean-Marie Souriau *Structure des systemes dynamiques*. Tymczasem na Wydziale Fizyki U.W., w pierwszej połowie lat sześćdziesiątych Włodzimierz Tulczyjew prowadził kilkuletnie seminarium poświęcone tym strukturom. Gdy przeczytaliśmy książkę Souriau to okazało się, że Tulczyjew już to wszystko wiedział, a nawet dużo więcej, i że to, czego nas nauczył stawia nas od razu w awangardzie tych badań.

W owym czasie główną motywacją tych badań ze strony fizyki było „kwantowanie”, a w szczególności kwantowanie układów z więzami. Dlatego też w literaturze prace z tej dziedziny występują często pod hasłem „kwantowanie geometryczne”. Zorganizowano wiele konferencji i sympozjów na temat tego geometrycznego kwantowania. Zaowocowały one ważnymi wynikami z teorii reprezentacji grup. Dlatego też nazwisko Souriau jest kojarzone z nazwiskami amerykańskiego matematyka B. Kostant’a oraz rosyjskiego A. A. Kirillow’a w postaci zbitki: „Kirillov-Kostant-Souriau Theorem” lub „Kostant-Souriau prequantization”.

Niestety, domagający się podania „uniwersalnej metody kwantowania” fizycy byli szczerze rozczarowani dowiedziawszy się, że takiej uniwersalnej metody nie ma i być nie może. Natomiast w poszczególnych przypadkach, gdy wchodzi w grę jakaś grupa symetrii, żądanie niezmienniczości względem tej grupy może prowadzić do pewnego rodzaju jednoznaczności procedury kwantowania. Z punktu widzenia fizyków traktujących matematykę jako „ancilla physicae” i oczekujących jej interwencji wszędzie tam, gdzie „coś się nie zgadza” był to wynik jednoznacznie negatywny, nie wartý całej tej „mistrze” polegającej na nauczaniu się kilku podstaw geometrii różniczkowej.

Nieco lepiej powiodła się współpraca pomiędzy fizyką a matematyką w zakresie opisu i klasyfikacji więzów. Tradycyjnie, podążając za wykładami P. A. M. Diraca z 1955 roku, fizycy opisywali więzy w języku „nawiasów Poissona”, czyli ω^{-1} , gdzie ω jest formą symplektyczną. Tymczasem okazało się, że opis symplektyczny, w języku formy ω jest nieporównanie prostszy i sprowadza się do obcięcia formy ω do podrozmaitości więzów i (jeśli trzeba) odpowiedniej redukcji symplektycznej, a wtedy klasyfikacja na więzy „1-go” lub „2-go” rodzaju staje się banalnie prosta (w odróżnieniu od niezwykle nieporęcznej i mało skutecznej metody Diraca, jednego z największych fizyków XX wieku, który jednak pisząc tę książkę w 1955 roku dopiero uczył się odpowiednich narzędzi matematycznych potrzebnych do opisu więzów).

W przypadku teorii pola, gdzie dynamika jest opisywana równaniami cząstkowymi, w fizyce często próbuje się przetłumaczyć je na „równania zwyczajne” ale dziejące się w nieskończenie-wielo-wymiarowej przestrzeni fazowej opisującej dane Cauchy’ego dla tych równań cząstkowych. Byłaby to zatem taka sama „mechanika analityczna” ale odbywająca się w nieskończenie-wielo-wymiarowej przestrzeni symplektycznej. Z takim podejściem wiążą się trudne problemy funkcjonalno-analityczne (jaka przestrzeń funkcjonalna, silna czy mocna struktura symplektyczna, nieciągłość operatora ewolucji itp.), które dopiero od niedawna znajdują właściwe rozwiązanie. Jednak było intuicyjnie dość oczywiste, że te nieskończenie-wielo-wymiarowe struktury biorą się z „całkowania” naturalnych struktur skończenie-wielo-wymiarowych i że rozważania funkcjonalno-analityczne musi poprzedzać rzetelna analiza geometryczna tych struktur. Inspirowany geometrycznymi strukturami jakie do rachunku wariacyjnego wniósł Constantin Caratheodory oraz tzw. szkoła belgijska (T. De Donder, P. Dedecker) zaproponowałem taki „skończenie-wielo-wymiarowy” formalizm kanoniczny w teorii pola jeszcze w latach 60’ pod nazwą „Geometria multi-symplektyczna”. Jest on do dziś przedmiotem zainteresowania wielu grup badawczych. I właśnie do tego nurtu należy recenzowana tu praca doktorska pana mgr M. Zająca.

I rzeczywiście: pędy p_b^j oraz „hamiltonian” h jednoznacznie wyznaczają n -formę „multipresymplektyczną”, znaną z literatury również pod nazwą „forma Poincaré-Cartana”:

$$\Theta = p_b^j dy^b \wedge \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \rfloor (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) \right\} + h (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)$$

gdzie n jest wymiarem (czaso-)przestrzeni, na której rozgrywa się opisywana teoria pola (w fizyce typowo $n=4$), oraz odpowiadającą jej $(n+1)$ -formę „multisymplektyczną”:

$$\Omega = d\Theta = dp_b^j \wedge dy^b \wedge \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \lrcorner (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) \right\} + dh \wedge (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n),$$

które są określone na „multisymplektycznej” wiązce fazowej, parametryzowanej zmiennymi (x^i, y^a, p_b^j) , i zdefiniowanej więzem $h = h(x^i, y^a, p_b^j)$ wynikającym z poprawnie opisanej przez Autora transformacji Legendre’a, podczas której informację o *wszystkich* „prędkościach” y_i^a kodujemy właśnie w postaci informacji o *wszystkich* pędach p_b^j .

Warto tu jeszcze dodać, że z punktu widzenia tamtej „geometrii multisymplektycznej” powyższa forma Θ pojawia się tutaj w bardzo szczególnej postaci, określanej często jako „cechowanie De Dondera - Weyla” albo też „cechowanie jedno-pionowe” (w odróżnieniu od tzw. cechowania Caratheodory’ego, z którym wielu wybitnych fizyków teoretycznych – np. Hans Kastrup – wiązało wielkie nadzieje na przezwycięzenie różnych trudności kwantowej teorii pola).

Podoba mi się ładne wprowadzenie tej struktury, choć jest ono w dużej mierze oparte na wcześniejszych pracach promotorki tego Przewodu Doktorskiego. Natomiast oryginalny wkład Doktoranta polega na zastosowaniu całej tej „maszyny” do opisu pól z cechowaniem nieabelowym (jak pola Yanga-Millsa, występujące w modelu standardowym cząstek elementarnych), czyli uwzględnienie struktury grupy cechowania $SU(2) \times U(1)$ w opisie oddziaływań elektro-słabych a następnie efektywne przeprowadzenie redukcji całej „kanonicznej” struktury teorii względem cechowania. Uważam to za elegancki i pożyteczny wynik, świadczący o dojrzałości naukowej autora, który dobrze opanował skomplikowany aparat geometrii różniczkowej i potrafi go użyć do opisu ważnych teorii fizycznych.

Mam również kilka uwag krytycznych, które jednak w żadnym stopniu nie podważają powyższej, pozytywnej opinii o rozprawie. Zresztą większość tych uwag wynika zapewne z moich upodobań i odmienności języka, jakiego przyzwyczailem się używać w tej dziedzinie. Uważam jednak, że w moim wieku pewna doza konserwatyzmu powinna mi zostać wybaczona.

Otóż mimo, że w latach 60’ sam wprowadziłem pojęcie opisu „multi-symplektycznego” do teorii pola a potem go rozpropagowałem (zachęcany przez ówczesnego redaktora naczelnego Communications on Mathematical Physics – Rudolpha Haaga), to jednak dość szybko zrozumiałem, że opisuje on jedynie bardzo szczególny aspekt techniczny dużo ważniejszej struktury *symplektycznej* jaka pojawia się naturalnie w teorii pola. Ta struktura występuje w przestrzeni (uogólnionych) „jetów” cięć odpowiedniej wiązki fazowej, a „jety rozwiązań równań pola” stanowią jej podprzestrzeń Lagranżowską. Tę strukturę (wraz z implikacjami „multi-symplektycznymi”) opisaliśmy wraz z W. M. Tulczyjewem w wydanej przez Springer’a w 1969 roku książce pt. „Symplectic Framework for Field Theories”. Język ten jest dużo prostszy matematycznie oraz dużo „poręczniejszy” w zastosowaniach (szczególnie w Ogólnej Teorii Względności). Myślę, że ten język zasługiwałby na jakiś odnośnik oraz wyjaśnienie dlaczego jednak wybrano inny opis.

Druga uwaga krytyczna: autor prawomocnie używa terminu „opis Hamiltonowski” za wybitnymi fizykami matematycznymi, którzy używali tej nazwy w tym samym kontekście (np. w znanych mi pracach Caratheodory’ego oraz – przede wszystkim – Paula Dedekera). Nie jest to jednak „Hamiltonian pola” w sensie używanym przez fizyków, którzy identyfikują go z energią niesioną przez pole. Otóż „Hamiltonian” Caratheodory’ego i Dedekera bierze się z transformacji Legendre’a polegającej – jak już napisałem wcześniej – na zastąpieniu *wszystkich* „prędkości” y^a_i przez *wszystkie* pędy p^j_b . W ten sposób ten „Hamiltonian” jest gęstością skalarną podczas gdy „Hamiltonian pola” opisujący energię jest składową jakiegoś większego obiektu opisującego zarówno pęd i energię i nie może być skalarą, bowiem zależy *explicité* od wyboru „układu odniesienia” (czyli po prostu $(3+1)$ -rozwłóknienia czasoprzestrzeni na „czas” i „przestrzeń”). Na przykład: energia pola elektro-magnetycznego dana jest wyrażeniem „ $\frac{D^2+B^2}{2}$ ”, natomiast odpowiedni „Hamiltonian” w sensie Caratheodory’ego-Dedekera jest inny. Hamiltonian-energia bierze się z takiej transformacji Legendre’a, w której tylko jedna prędkość – mianowicie ta w kierunku czasu – zostaje zastąpiona tylko jednym pędem, natomiast wszystkie inne prędkości (tzn. odpowiadające kierunkom „przestrzennym”) pozostają jako „parametry kontroli” – tak jak w opisie Lagranżowskim. Uważam, że zabrakło w rozprawie odniesienia się do tej rozbieżności terminologicznej.

Tutaj „aż się prosi” by zrobić następującą uwagę. Cały wysilek szkoły Caratheodory’ego-De Dondera-Dedekera był motywowany analizą „prawdziwych” zasad wariacyjnych, gdzie chodziło o znalezienie *minium* jakiegoś funkcjonału (np. funkcjonału energii) a wynikające z zasady wariacyjnej równania były *eliptyczne*. Ci wielcy uczeni próbowali np. zdefiniować „pola geodezyjne” dla takich problemów, jako sposób na sformułowanie warunku dostatecznego na przybieranie minimum, analogicznego do podobnych twierdzeń w rachunku wariacyjnym całek jednokrotnych. Niestety, poszukiwania te nie powiodły się! Ale tzw. „zasada najmniejszego działania” w fizycznych teoriach pola, których równania są hiperboliczne, jest czymś zupełnie innym. Od R. Feynmanna fizycy już nauczyli się, że nie ma tam żadnego „najmniejszego działania” a jedynie punkt siodłowy i stosują tzw. „metodę fazy stacjonarnej” przy kwantowaniu metodą „całek Feynmanna”. Jednak bardzo często nie zdają sobie sprawy z faktu, że jest jeszcze gorzej: w takich teoriach podejście „najpierw ustalamy warunki brzegowe a potem szukamy punktu siodłowego dla funkcjonału działania” jest zupełnie bezsensowne, bowiem problem brzegowy dla równań hiperbolicznych jest **zupełnie** źle postawiony i szansa, że przy zadanych warunkach brzegowych istnieje *jakiegokolwiek* rozwiązanie równań pola wynosi dokładnie zero. Sam termin „zasada najmniejszego działania” jest typowym zabiegiem propagandowym, przy pomocy którego Pierre Louis Maupertuis (skądinąd wybitny fizyk, ale akurat tutaj bardzo się mylił) chciał propagować filozofię Leibnitza „najlepszego ze Światów”.

Ostatnia uwaga krytyczna odnosi się do zbyt – moim zdaniem – oszczędnego używania notacji współrzędniowej. Co prawda, podstawowe struktury zostały poglądowo opisane również na współrzędnych (stąd te wszystkie oznaczenia jak y^a_i czy p^j_b , które *bardzo* ułatwiają czytanie najbardziej „abstrakcyjnych” stron tekstu) jednak, gdy przychodzi do opisu pól z cechowaniem, ta narracja ustaje całkowicie i język współrzędniowy zostaje zupełnie porzucony. Przez to standartowy fizyk, który nawet wykonał wiele rachunków na polach Yanga-Millsa, może mieć poważne kłopoty z „rozszyfrowaniem” wyników Autora, zakodowanych w zupełnie innym języku.

Jak już jednak napisałem wyżej, te usterki nie podważają mojej wysokiej oceny jakości recenzowanej rozprawy. Wnoszę zatem o dopuszczenie Doktoranta do dalszych etapów Przewodu Doktorskiego a w szczególności do publicznej OBRONY.

Z poważaniem



Jerzy Kijowski

