

Recenzja rozprawy doktorskiej pana magistra
Hélder David Larraguível Carrillo

*„A-polynomials, symmetries
and permutohedra for quivers and knots”*

Rozprawa doktorska Hóldera Larraguível poświęcona jest ciekawej konstrukcji odpowiedniości między węzłami i kołczanami oraz, w szczególności kwestii równoważności różnych kołczanów odpowiadających tym samym węzłom. Problem ten, mający zarówno motywację jak i zastosowania fizyczne można traktować również jako czysto matematyczny, stąd rozprawa zawiera zarówno rozdziały czysto matematyczne jak i z zakresu fizyki matematycznej i fizyki teoretycznej.

Pierwsze dwa rozdziały pracy zawierają stosunkowo obszerne wprowadzenie w zagadnienie węzłów i związku ich niezmienników z supersymetrycznymi teoriami pola. Zasadnicze wyniki rozprawy skoncentrowane są w rozdziale 3, opartym na pracy [42], (Jankowski, Kucharski, Larraguível, Noshchenko, Sułkowski, “Permutohedra for knots and quivers”. Phys. Rev. D 104.8 (2021), p. 086017) oraz w rozdziale 4, opartym na pracy [44] (Larraguível, Noshchenko, Panfil, Sułkowski “Nahm sums, quiver A-polynomials and topological recursion”, Journal of High Energy Physics 2020.7 (2020), p. 151). Te części rozprawy zawierają oryginalne wyniki naukowe, które zostały w części uzyskane przez autora w trakcie pracy nad doktoratem. W istocie, rozdział 3 jest praktycznie wiernie oparty na pracy [42]: struktura i zawartość rozdziału 3.2 rozprawy odpowiada rozdziałowi 3 artykułu, analogicznie 3.3 w części odpowiada 4, praktycznie identyczny jest zestaw przykładów. Podobnie, rozdział 4 pracy (z pewnymi wyjątkami) jest praktycznie częścią pracy [44].

Same wyniki (matematyczne) obu tych rozdziałów, a w szczególności zarówno Hipoteza 1 (strona 46) jak i Twierdzenie 2 (strona 47) są zarówno nietrywialne, ważne i oryginalne. Szkoda, iż rozprawa nie zawiera dokładnego opisu wkładu autora w obie te prace (na przykład opisu jak była jego rola w formułowaniu twierdzenia, dowodzie, obliczeniach, konstrukcji przykładów, czy niektóre przykłady są jego konstrukcji). Zakładając jednak równomierny wkład wszystkich autorów spokojnie można uznać, iż uzyskane w tych pracach i zaprezentowane w rozprawie wyniki mogą być uznane za przedstawienie oryginalnego rozwiązania problemu naukowego, spełniając wymagania rozprawy doktorskiej. Szczególnie podoba mi się rozdział 3.3.2, który dość precyzyjnie, z odpowiednio dobranymi przykładami pokazuje symetrie jakie prowadzą do równoważnych kołczanów i ich złożenia. Opis permutohedronów i ich wizualizacja jest również bardzo ciekawym kawałkiem rozprawy. Z kolei rozdział dotyczący „quantum derivations” i tzw. A-wielomianów stwarza potencjalnie wiele



UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Wydział

Fizyki

Astronomii

i Informatyki

Stosowanej

ul. prof. Stanisława

Łojasiewicza 11

PL 30-348 Kraków

tel. +48(12) 664-48-90

fax +48(12) 664-49-05

e-mail:

wydzial.fais@uj.edu.pl

ciekawych możliwości relacji z innymi dziedzinami matematyki (jako q-specjalne funkcje i wielomiany, przestrzenie kwantowe, grupy kwantowe).

Szkoda jednak, iż autor rozprawy w stosunkowo skromny sposób rozszerzył wyniki wyżej cytowanych prac. Bardzo ciekawe, na przykład, byłoby przedstawienie kilku nietrywialnych przykładów równoważnych kołczanów nie zawartych w tych pracach czy nieco bardziej precyzyjne i obszerniejsze opisanie algorytmu przedstawionego w pracy.

Redakcja rozprawy i jej organizacja nie jest wolna od rozmaitych usterek i nie do końca przemyślanej notacji. Przede wszystkim dotyczy to rozdziałów wprowadzających (rozdział 1 i rozdział 2), które dotyczą bardziej fizyki a nie matematyki. Oto wybór spostrzeżonych usterek:

- We wzorze 2.1.1 pojawiają się macierze Pauliego, σ^j , które dalej oznaczane są γ , a oznaczenie σ^i używane jest dla rzeczywistego pola wektorowego. We wzorze 2.1.5.c pojawia się zarówno D^j jak i D_μ^j . Nie jest chyba najlepszym wyborem użycie identycznej litery na oznaczenie pól jak i pochodnych kowariantnych.
- Na stronie 15 pojawia się stwierdzenie “gauge theories (...) have continuous global symmetries” - nie za bardzo wiadomo co rozumie się przez ciągłość w tym punkcie (zapewne chodzi o symetrie w postaci grup Liego).
- We wzorze 2.1.10 mamy $U(1)_{g,i}$ i index g nie jest wyjaśniony (podobnie jak niżej $U(1)_{t,i}$). Nie za bardzo zrozumiałe jest sformułowanie, iż symetrie globalne są topologiczne (strona 15).
- Wyprowadzenie Lagranżjanu (rozdział 2.1.3) wydaje się być ogólniejsze niż jedynie dla modelu na $\mathbb{R}^2 \times S^1$. Swoją drogą czy z fizycznego punktu widzenia oznacza to zwarty wymiar czasowy?
- Przeskakując do 2.1.4 we wzorze 2.1.20 otrzymujemy potencjał, gdzie pojawia się parametr ξ (którego pojawienie się nie jest wyjaśnione w 2.1.18) oraz, podobnie nieokreślone, $e_{0,i}$.
- We wzorze 2.1.22 z kolei zupełnie znikają indeksy pól, czy to oznacza, iż mamy do czynienia z pojedynczym $U(1)$?
- Z rozprawy nie jest do końca jasne czy wzór 2.1.30 jest dokładny (i udowodniony) czy jest to (jak zaznaczono przed jego przedstawieniem) hipoteza. W dalszej części przyjmowany jest jako “explicit form for the vortex partition function”.
- Wzór 2.1.34 jest kompletnie niezrozumiały: pisząc Tr wypada powiedzieć co to jest ten ślad i jak traktujemy wyrażenie pod śladem, zwłaszcza, iż pojawia się tam H oraz β , które nie są odpowiednio wprowadzone wcześniej.
- Autor używa w pracy określenia “fugacity”, które w żaden sposób nie jest pojęciem matematycznym i nie jest w żaden sposób wyjaśnione.
- We wzorze 2.1.39 f_{ij} użyte jest nieprawidłowo (mamy dwie różne reprezentacje kołczanu, więc potrzeba odrębnego oznaczenia).



UNIwersytet
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Wydział

Fizyki

Astronomii

i Informatyki

Stosowanej

ul. prof. Stanisława

Łojasiewicza 11

PL 30-348 Kraków

tel. +48(12) 664-48-90

fax +48(12) 664-49-05

e-mail:

wydzial.fais@uj.edu.pl



UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Wydział

Fizyki

Astronomii

i Informatyki

Stosowanej

- W rozdziale 2.2 sformułowanie "Chern-Simons term is not just gauge invariant but also invariant under arbitrary changes of coordinates. This is due to the fact that it is independent of the metric" nie jest prawdziwe: niezmienniczość względem zmiany współrzędnych nie ma nic wspólnego z niezależnością od metryki (człon Yanga-Millsa jest przecież zależny od metryki).
- Ciąg argumentów po przedstawieniu nieabelowej teorii Cherna-Simonsa nie jest najlepiej dobrany - przejście od jednej rozmaitości trójwymiarowej do innej to nie tylko kwestia zmiany metryki ale i topologii.
- Wzór 2.2.24 nie do końca odpowiada opisowi (brakuje w nim współczynników liczbowych, chyba że jest to wielomian M, L, q gdzie wszystkie współczynniki liczbowe są równe 1).
- Wzór 2.2.31 przedstawia dwie macierze, które ewidentnie nie komutują ze sobą (sprzeczność ze stwierdzeniem powyżej tego wzoru, która nie jest precyzyjnie wyjaśniona).
- Wzór 2.3.8 nie jest prawidłowy (brak kwadratu w pierwszym wyrażeniu).
- Przy wyprowadzaniu równoważności kołczanów na początku zakładamy, że nie ograniczamy się do „cienkich” węzłów $s = 0$, ale później warunek ten pojawia się po 3.2.12, nie jest jednak odpowiednio wyeksponowany, podobnie jak warunki 3.2.13. Czy warunki te są konieczne by kołczan zadawał funkcję wielomianu węzła (niezależnie od równoważności)?
- Przy warunku $1 \leq a, b, c, d, \leq m$ po 3.2.4 nie jest sprecyzowane czy wszystkie te indeksy mają być parami różne (co później pojawia się w hipotezie i twierdzeniu). Jeśli tak, dlaczego nie określić tego jako $1 \leq a < b < c < d \leq m$?
- Graficzne przedstawienie odpowiednich symetrii i relacji dla węzłów w podrozdziale 3.2.2 nie jest wystarczająco wyjaśnione - w szczególności diagramy 3.2 i 3.3 nie są w żaden sposób zrozumiałe dla czytelnika.
- Dowód twierdzenia 2 (local equivalence theorem) nie jest też do końca jasny. Wcześniej, warunki równoważności kołczanów wyprowadzane były w odpowiednich rzędach wielomianu w x : x^2 w 3.2.2 oraz x^3 w 3.2.7. Dla zupełności dowodu przydatny byłby rachunek, iż rzeczywiście zgodność jest w każdym rzędzie.
- Zdanie i wzór przed 3.4.18 są urwane.

Niektóre sformułowania użyte w rozprawie nie są do końca zrozumiałe językowo, np. "Thus, making normalizations just conventions" (str. 28), "Whose formal definition is a mouthful of category theory" (str. 29), "we can derive recursion relations to compute the hold sequence of them based..." (str. 30). "Which basically the t-deformation of (2.2.39) (str. 33), „Altogether yields the following system of equations" (str. 45). Niektóre dalsze błędy (jak tytuł sekcji "3.1.1 Unliking" zamiast "Unlinking") potwierdzają wrażenie, iż rozprawa na pewno nie została skrupulatnie sprawdzona i przygotowana przez autora.

ul. prof. Stanisława

Łojasiewicza 11

PL 30-348 Kraków

tel. +48(12) 664-48-90

fax +48(12) 664-49-05

e-mail:

wydzial.fais@uj.edu.pl



UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Wydział

Fizyki

Astronomii

i Informatyki

Stosowanej

Wprawdzie wybrany schemat i kolejność przedstawiania zagadnień są jak najbardziej poprawne, jednak rozłożenie materiału nie zawsze jest spójne i logiczne (w wielu przypadkach wymaga wracania do wcześniejszych rozdziałów by tam odszukać wzór, który znacznie lepiej pasowałby w danym miejscu). Na przykład definicja „quiver generating series” powinna jednak być podana tam gdzie jest wykorzystywana (jawnie, a niekoniecznie w odwołaniu do funkcji rozdziału).

Podsumowując, praca pokazuje całkiem spore rozeznanie autora w tematyce i opanowanie w wystarczającym stopniu naprawdę trudnego działu fizyki matematycznej (a tak naprawdę matematyki). Jednak zdecydowanie brakuje w niej odpowiedniej przejrzystości i systematyczności. Oczywiście zasadnicza część naukowa, przedstawiająca zarówno nowe jak i znane wyniki (rozdziały 3 i 4) jest opracowana rzetelnie i zawiera znaczące rezultaty naukowe z dziedziny fizyki matematycznej a przedstawione powyżej uwagi krytyczne nie umniejszają w żaden istotny tych wyników (których współtwórcą jest autor rozprawy). Zdecydowanie najsłabszą stroną pracy są rozdziały wstępne, które jednak nie są fundamentalną częścią rozprawy (nawet tytuł sugeruje, iż wyniki matematyczne są jej podstawą) oraz prezentacja wyników (która mogła nieco bardziej odbiegać od ich prezentacji w opublikowanych pracach).

Konkluzją niniejszej recenzji jest, iż przedstawiona rozprawa doktorska spełnia stawiane wymagania ustawowe oraz wymagania Uniwersytetu Warszawskiego określone w uchwale 157 Senatu UW. W szczególności prezentuje ona w sposób zadowalający ogólną wiedzę kandydata w zakresie fizyki (teoretycznej i matematycznej) oraz przedstawia oryginalne rozwiązanie problemu naukowego, którego mgr. Hélder David Larraguível Carrillo jest współautorem.

prof. dr hab. Andrzej Sitarz
Instytut Fizyki Teoretycznej
Uniwersytet Jagielloński

ul. prof. Stanisława

Łojasiewicza 11

PL 30-348 Kraków

tel. +48(12) 664-48-90

fax +48(12) 664-49-05

e-mail:

wydzial.fais@uj.edu.pl