

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Hélder David Larraguível Carrillo
„A-polynomials, symmetries and permutohedra for quivers and knots”

Przedstawiona do recenzji praca doktorska, napisana pod kierunkiem prof. dr hab. Piotra Sułkowskiego poświęcona jest badaniu obserwabli w pewnych teoriach określonych w $2+1$ wymiarowej czasoprzestrzeni, w których wysoki stopień symetrii pozwala na obliczenia wielu wielkości poza rachunkiem zaburzeń. Teorie o których mowa to supersymetryczne kwantowe teorie pola o ośmiu generatorach supersymetrii (tzw. $N=2$ supersymetria): teoria Yanga-Millsa i topologiczna teoria pola Cherna-Simonsa. Recenzowana praca bada obserwabli będące wartościami oczekiwanymi pętli Wilsona z perspektywy teorii węzłów, która jest naturalna w teorii Cherna-Simonsa. Z racji tego, że teoria ta nie wymaga określenia metryki czasoprzestrzennej, czyli geometrii czasoprzestrzeni, wartości oczekiwane pętli Wilsona zależą tylko od ich właściwości topologicznych i reprezentacji grupy cechowania, co prowadzi do ich związku niezmiennikami węzłów. Badania tego typu kontynuują program sformułowany przez Edwarda Wittena w latach 1980.

Recenzowana praca poświęcona jest stosunkowo nowej perspektywie, którą jest tzw. “Knot-Quiver Correspondence” (KQC), sformułowana w 2017 roku. Podstawowe spostrzeżenie polega na tym, że danemu węzłowi można przyporządkować kołczan (“quiver”), czyli zorientowany graf, w taki sposób że definiujące cechy węzła odpowiadają niezmiennikom tego kołczanu. Źródłem tej odpowiedniości jest porównanie funkcji generujących dla tych obiektów. Rozprawa poświęcona jest dwóm zagadnieniom związanym z KQC: pierwsze z nich to jednoznaczność samej odpowiedniości, a druga to badanie tzw. kwantowych wielomianów-A dla kołczanów.

Struktura kołczanu zakodowana jest w macierzy, która opisuje strukturę grafu. Odpowiedniość ta nie jest jednoznaczna, tzn. danemu kołczanowi może odpowiadać więcej niż jeden węzeł. Jednym z głównych wyników pierwszej części recenzowanej pracy jest sformułowanie warunków które spełniają różne kołczany odpowiadające temu samemu węzłowi. Wynik ten sformułowany jest jako twierdzenie 2, które precyzuje warunki, przy których dwie macierze kodujące strukturę kołczanu są równoważne. Poza dowodem tego twierdzenia, praca zawiera obszerne omówienie szeregu przykładów ilustrujących jego zastosowanie. Twierdzenie 2 zawiera implikację w jedną stronę; byłoby oczywiście ciekawe i ważne ustalić, czy można w pełni scharakteryzować implikację idącą w kierunku przeciwnym.

Druga część pracy poświęcona jest uogólnieniom klasycznych A -wielomianów, czyli krzywych algebraicznych będących niezmiennikami węzłów. Głównym wynikiem tej części jest systematyczne podejście do A -wielomianów związanych z kołczanami i ukazanie związku "kwantowej" wersji wielomianu A z wersją klasyczną. Pewien niedosyt pozostawia brak jasności co do fizycznego sensu teorii której odpowiada ów "kwantowy wielomian A ", choć samo zagadnienie z perspektywy czysto matematycznej jest dobrze określone.

Recenzowana praca składa się z pięciu rozdziałów, jednego dodatku o charakterze technicznym i bibliografii liczącą 86 pozycji. Poza ogólnym wstępem i rozdziałem wprowadzającym, praca przedstawia główne wyniki dotyczące korespondencji KQC w rozdziale trzecim, a materiał dotyczący kwantowych wielomianów- A w rozdziale czwartym. W rozdziale trzecim autor wyjaśnia szereg aspektów KQC, w tym pojawienie się permutohedrów. W rozdziale czwartym autor przedstawia obliczenia klasycznych wielomianów- A dla szeregu kołczanów i odpowiadające im wersje kwantowe. Rozdział 5 zawiera podsumowanie i uwagi dotyczące dalszych perspektyw badawczych.

Dysertacja oparta jest na dwóch obszernych artykułach naukowych opublikowanych w *Physical Review*, które jest jednym z wiodących czasopism w tej dziedzinie. Mocną stroną pracy jest duża liczba szczegółowo opisanych przykładów ilustrujących omawiane pojęcia i techniki. Jest to istotne dla uzasadnienia hipotez przedstawianych przez autora.

Dopatrzyłem się pewnych drobnych usterek o charakterze częściowo edytorskim, takich jak błędy pisowni (z których część można było wychwycić programem do sprawdzania ortografii). Jest też kilka przejęzyczeń; przykładem może być opis zawartości multipletu wektorowego (poniżej wzoru 2.1.4), lub dość zaskakujące wyjaśnienie terminu “probe brane”, który jest analogiem określenia “test particle” i oznacza zwykle obiekt dynamiczny w jakimś “tle”, które jest traktowane jako ustalone. Oddziaływanie obiektu próbnego (cząstki, struny lub brany) na owe tło jest z założenia zaniedbywalnie małe. Wspomniane wyżej niedociągnięcia nie mają jednak wpływu na istotę tego doktoratu.

Recenzowaną pracę doktorską uważam za ciekawą i wartościową. Dotyczy tematyki złożonej, która z jednej strony oddalona jest od bezpośrednich fizycznych zastosowań, a z drugiej ma potencjalnie ważne konsekwencje w wielu kontekstach – zarówno matematycznych jak i fizycznych. Poziom przedstawianych badań jest bardzo wysoki i z pewnością będą one odnotowane jako znaczące wśród badaczy tej gałęzi teorii strun i teorii pól cechowania.

Podsumowując stwierdzam, że recenzowana rozprawa spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane pracom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie mgr Larraguível Carrillo do dalszych etapów przewodu doktorskiego.



Prof. dr hab. Michał Spaliński