



UNIWERSYTET GDAŃSKI



International Centre for Theory of Quantum Technologies
80-308 Gdańsk, ul. Jana Bażyńskiego 1a
prof. dr hab. Michał Horodecki, e-mail: michal.horodecki@ug.edu.pl

13.03.2023

Recenzja doktoratu W. Góreckiego pt. “Heisenberg Limit beyond Quantum Fisher Information”

Rozprawa Pana Wojciecha Góreckiego bazuje na trzech artykułach opublikowanych - dwa z nich opublikowane w Physical Review Letters, i jeden w Physical Review. Warto dodać, że Autor jest współautorem kilku innych prac z tematyki rozprawy, a także jeszcze większej ilości prac z zupełnie innej tematyki (m.in. kondensaty Bosego-Einstena). Jest to ogromny dorobek na tym etapie naukowej kariery.

Rozprawa liczy 102 strony, składa się z 6 rozdziałów oraz podsumowania. Jest pięknie napisana, czyta się ją lekko i przyjemnie. Ma duży walor pedagogiczny, i stanowi znakomite wprowadzenie do kwantowej metrologii, które w dodatku eksponuje bardzo istotne, a jakże często pomijane niuanse związane z interpretacją informacji Fishera. Przykładem polotu pedagogicznego może być wyjaśnienie ograniczeń w stosowaniu stanu NOON oraz informacji Fishera. Sposób omawiania stanu badań zdradza, że autor głęboko rozumie problematykę którą się zajmuje. Tutaj muszę uczynić dygresję dotyczącą pisania podręczników. Mianowicie, mamy na ogół dwie kategorie – albo podręcznik jest wyczerpujący, ale przez to długi i niestrawny, albo jest krótki i elegancki, ale za cenę uproszczeń, z którymi czytelnik nie wie co zrobić. Niewiele jest pozycji, gdzie udaje się utrzymać równowagę pomiędzy przekazaniem prawdy o temacie a rozsądną objętością i nie wchodzeniem w skomplikowane rozważania. Wydaje się, że autor rozprawy doskonale utrzymuje tę równowagę w tym względzie, stąd ogromna przyjemność czytania.

Oczywiście, głównym walorem rozprawy są rezultaty osiągnięte przez autora, także we współpracy z pionierem kwantowej metrologii – Howardem Wiesmanem. Rezultaty dotyczą tematu, który powoduje wiele nieporozumień zwłaszcza w społeczności, która korzysta z wyników teorii metrologii, lecz się w niej nie specjalizuje. Mianowicie, jest wiele prac, w których używa się informacji Fishera aby wskazać, że jakiś stan jest „lepszy” niż klasyczny, jednak bez zrozumienia, jaki jest operacyjny sens tej wielkości. Błąd estymacji jest ograniczony od góry przez odwrotność informacji Fishera (jest to nierówność Cramera-Rao). Jeżeli informacja Fishera skaluje się kwadratowo (lub ponad-liniowo) to autorzy przyjmują zwykle konkluzję, że występuje kwantowa korzyść (advantage). Jednak, co już jest najczęściej pomijane, informacja Fishera nie jest wielkością operacyjną. Aby osiągnąć ograniczenie, trzeba wykonać eksperyment wiele razy. I wówczas, błąd estymacji zanika jak odwrotność ilości powtórzeń, zatem nie mamy skalowania odwrotnego kwadratowego.

Innymi słowy kwadratowe skalowanie informacji Fishera nie mówi o skalowaniu Heisenberga dla błędu estymacji. Jest jeszcze drugi często pomijany niuans – otóż stany NOON, które pozwalają na skalowanie błędów

Heisenberga, pozwalają na estymację jedynie jeżeli wiemy, że parametr jest w okolicy jakiejś znanej nam wartości. W dodatku ze wzrostem ilości cząstek n , parametr ten musi być w odległości $1/n$ od owej wartości.

Powstaje więc zasadniczy problem – jaki jest minimalny błąd przy danej liczbie cząstek. Pytanie to można poszerzyć, ustalając średnią energię, zamiast ilości cząstek, lub ilość bramek, jeżeli optymalny protokół jest adaptatywny. Pytanie to jest motywem przewodnim rozprawy.

W rozprawie autor przedstawia szereg ważnych rezultatów na ten temat. Wiadomo, że o ile samo skalowanie Cramera-Rao można osiągnąć, jednak stała jest inna – powstaje czynnik π . Dzieje się tak dla dowolnie ustalonego przedziału wartości, w którym a priori wiemy, że znajduje się estymowany parametr. Oryginalnie rezultat ten był analizowany dla przesunięcia fazowego w interferometrze. W rozprawie rezultat ów jest rozszerzony do dowolnego Hamiltonianu o ograniczonym spektrum. Ponadto, co jest jeszcze ciekawsze, autor podał w twierdzeniu (niestety nie numerowanym) na stronie 46, ograniczenie na błąd dla skończonego N . Jest dalej pokazane, że ograniczenie to można asymptotycznie wysycić. Podoba mi się dowód tego twierdzenia, wykorzystujący techniki fourierowskie połączone z kontrolą ogonów funkcji. Rezultaty są osiągnięte w przypadku Bayesowskim (czyli gdy błąd jest uśredniany po rozkładzie a priori parametru) oraz minimax (gdy bierze się maximum błędu po całym przedziale).

Podobnie, autor analizuje przypadek, gdy zasobem nie jest liczba cząstek, lecz średnia energia. Również w tym przypadku podaje ograniczenie, które jest osiąganе, w przeciwieństwie do istniejących wcześniej ograniczeń.

Kolejne rezultaty dotyczą estymacji wieloparametrowej. Autor rozważa dwa podejścia: (1) pełna optymalizacja dla N bramek; (2) schemat, gdzie w jednym powtórzeniu doświadczenia można użyć tylko n bramek zaś ilość powtórzeń wynosi k (czyli podejściu (1) mamy $n=N$, $k=1$, zaś w podejściu drugim, n i k są dane, takie że $nk=N$). W tym drugim podejściu ograniczenie Cramera-Rao jest osiągalne, więc wystarczy liczyć informację Fishera. W podejściu (1) autor stosuje kryterium minmax.

Autor ogranicza się do przypadku asymptotycznego, żeby nie było konieczności wykonywania obliczeń dla skończonego przedziału. Przypadek ten nazywa się „lokalny asymptotyczny koszt minima”. Autor uogólnia rezultat Hayashiego dla estymowania pojedynczego parametru, pokazując, że jest on prawdziwy także dla wielu parametrów, w podejściu (1) – czyli pełnej optymalizacji. Mianowicie, w tym reżimie, optymalny jest schemat równoległy, tj. nie-adaptatywny.

W podejściach (1) i (2), można następnie porównywać sytuacje, gdzie parametry mierzy się łącznie (JNT) oraz gdy każdy parametr mierzy się osobno (SEP). To daje cztery scenariusze. Okazuje się, że w podejściu (1), w przypadku estymowania komutujących parametrów - faz w ramionach interferometru, jest ok. czterokrotny zysk pomiaru łącznego parametrów w stosunku do mierzenia każdego parametru z osobna. Dowód jest oparty o dość finezyjne obliczenia i oszacowania. Ograniczenie w jedną stronę korzysta z wcześniejszych obliczeń dotyczących scenariusza z ustaloną średnią energią. Aby znaleźć ograniczenie w drugą stronę, autor najpierw redukuje problem do problemu znalezienia stanu podstawowego cząstki w egzotycznym potencjale jakim jest sympleks, następnie podaje ansatz, dla którego można znaleźć energię analitycznie. Autor także omawia przypadek parametrów z niekomutującymi generatorami.

Wreszcie podaje ograniczenie, które na ogół nie jest ciasne, lecz pozwala odpowiedzieć przecząco na pytanie, czy różnice między łączną a osobną estymacją wynikają wyłącznie z komutatywności generatorów. Otóż okazuje się, że nawet gdy generatory komutują, można uzyskać różnicę. Ta różnica znika, gdy zmienimy parametryzację.

Powyższe rezultaty są ważne, ponieważ znacznie poszerzają naszą wiedzę o metrologii w obszarze w którym panuje wiele nieporozumień. Autor systematycznie bada operacyjne ograniczenia na błąd estymacji – tj. takie, które są wysycane, w przeciwieństwie do ograniczeń wynikających z informacji Fishera. Zwłaszcza podobają mi się poprawki do asymptotycznej formuły, wynikające z uwzględnienia skończonego przedziału. Dowody twierdzeń są nietrywialne, wymagają zastosowania różnych narzędzi matematycznych.

Jeżeli chodzi o stronę redakcyjną, można znaleźć nieco literówek, czy niejasnych sformułowań. Wymienię tu kilka, głównie po to, żeby udowodnić, że rozprawę przeczytałem (uwaga: może się zdarzyć, że w niniejszej recenzji jest więcej literówek).

Drobne usterki:

Str 5. „justifying that, in the limit of N going to infinity, this difference is independent of the size of the $[0, 2\pi]$ interval.” - rozmiar odcinka jest stały, natomiast autorowi chodzi o odcinek mniejszy, w którym będzie się zawierał estymowany parametr.

Str 16: w zdaniu “as well as its first derivative are satisfied” raczej chodziło o to że pochodna spełnia poniższą formułę, a nie że pochodna jest spełniona.

Str. 30: w zdaniu „Therefore, for a single usage of the channel, from Eq. (3.37)” chodziło o równanie (3.36).

Str. 58: w formule (5.15) brakuje nawiasów (minimalizacja po zbiorze)

Str. 68: we wzorze (6.2) powinno być n w mianowniku (nie n^2).

Str 69: W sformułowaniu „Consider the sequence of triples: initial states, N unitary controls and measurements” powinno chyba być measurement w liczbie pojedynczej – mamy jeden pomiar (który może zależeć od N).

Str. 74: we wzorze (6.20) powinno być N^2 w mianowniku (nie N^3)

Str. 84: “engaged” powinno być “entangled”

Str: 84: wprowadzony jest skrót „MM” który nie jest wyjaśniony. Sądzę, że chodzi o minimax.

Poniżej chciałbym przedstawić nieco niejasności.

Niejasności:

Str. 13: Autor pisze:

As for a single particle, angular momentum operator J_y is simply Pauli matrix multiplied by factor one-half $\frac{1}{2}\sigma_y$, the variance of such measurement's result is finite and equal $\Delta^2 J_y = \frac{1}{4}$, which leads to $\Delta^2 \tilde{\theta} = 1$ (in radians). If one repeats measurement on N independent atoms and then estimates

Jednak wariancja zależy od stanu (co później jest uwzględnione, gdyż wybierany jest stan ze zmniejszoną wariancją w jednym kierunku). Oczekiwałem tutaj jakiejś wzmianki o stanie.

Str. 15: W zakończeniu sekcji 2.1 Autor pisze tak:

The problem may be formulated more abstractly in the general form – for any unitary evolution $U_\theta = e^{i\theta H}$ governed by the hermitian generator of transformation H , where some peculiar state is used for sensing this parameter, the variance of the estimator will be bounded by the inverse of the variance of the H calculated on this state:

$$\Delta^2 \tilde{\theta} \geq \frac{1}{4\Delta^2 H}. \quad (2.5)$$

To zakończenie wydaje mi się dość nagłe. Oczekiwałem np. takiego stwierdzenia: „Oczekujemy, że wariancja estymatora będzie się skalować w ten sposób, i chcemy to potwierdzić, oraz oszacować stałe etc. etc.” Z obecnego sformułowania nie wiadomo jak właściwie jest sformułowany problem, choć początek zdania to obiecuje.

Str. 32: Po równaniu (3.44) Autor pisze: „However, a qualitative discussion of these results demands tools beyond QFI so that it will be performed later in Ch. 4.”. Czy rzeczywiście chodzi o jakościową dyskusję? Wydaje mi się, że chodzi o ilościową, np. jaka jest stała proporcjonalności. Chyba, że autor miał co innego na myśli.

Str. 39: Autor pisze: “This approach may be applied to the problem, when the parameter to be measured truly fluctuate according to known distribution (as, for example, the temperature in a given room); however, it may be also applied in measuring the parameter which is postulated to be constant (like, for example, transition frequency of an atom).”

Powinna być jakaś różnica w estymowaniu parametrów, który fluktuuje oraz który jest niezmienny ale ustalony... Jest w końcu spora różnica między błędem systematycznym i statystycznym. Jak to znajduje odzwierciedlenie w metrologii?

Str. 4: Autor pisze:

this context is worth noting. In the many repetitions scenario, in the limit of large k , for the ML estimator, the distribution of difference $\hat{\theta}_{\text{ML}} - \theta$ converges to the gaussian one with the variance k , so the probability of making gross error decreases exponentially with the number of resources.

Tutaj czegoś nie rozumiem. Zdaje się, że autor nie podaje nigdzie ilościowej postaci zbieżności do gaussiana. (Znane mi tempo przykładowe tempo zbieżności jest dane przez szacowanie typu Berry-Essen, gdzie różnica jest nie zanika eksponencjalnie, lecz wielomianowo w ilości prób.) Wydaje mi się, że to co zanika eksponencjalnie to jest ogon rozkładu prawdopodobieństwa. Używając przykładu sumy zmiennych niezależnych, ogon takiej sumy zanika eksponencjalnie i wynika to z nierówności typu Hoeffdinga, lecz tempo zbieżności do gaussiana nie jest eksponencjalne. Może problem wynika z tego, że nie wiem co oznacza „gross error”, gdyż autor nie definiuje tego pojęcia, z wyjątkiem, tego, że w pierwszej linijce omawianego paragrafu Autor używa pojęcia „coarse error”. Czym są te dwa błędy?

Lepiej rozumiem podobny fragment ze str. 70

Having in total N gates, at first, I perform $\sqrt{N}$ independent single-gate experiments to find an approximated value g_{est} (for example, by using ML estimator). From the central limit theorem, the probability that the true value does not belong to δ -size neighborhood of the indication of estimator $g \notin g_{\text{est}}G_\delta$ (where $g_{\text{est}}G_\delta$ is the set G_δ shifted by the action of g_{est}), decreases exponentially with a

i z niego wnioskuję, że gross error to właśnie zanik „ogona” – chodzi to, że z prawdopodobieństwem wykładniczo małym parametr może się znaleźć poza otoczeniem g_{est} . Jednak wciąż mam wrażenie, że to nie wynika z twierdzenia granicznego, tylko z oszacowań typu Hoeffdinga. Mogę jednak czegoś tu nie rozumieć.

Str 59: Autor pisze: “This observation was made in [Yuan [2016]] with a formal proof of optimality only for a specific case of estimation of the magnetic field sensed by spin-1/2 particle; the proof was based on the connection of QFI with Bures metric. Below I present an alternative and fully general proof (which, best to my knowledge, does not exist in literature).”

Przy tym w poprzednim paragrafie jest mowa o tym, że estymacja adaptatywna może być lepsza od równoległej. Nie widzę, w jaki sposób twierdzenie (niestety bez numeru) się do tego odnosi.

Inne

Jedna rzecz jest irytująca - mianowicie – brak numerowania referencji. Autor odnosi się poprzez nazwisko i rok. Po pierwsze jest dość trudno wyszukiwać rok w referencjach. Po drugie, sam Autor ma dwie prace w roku 2020, w związku z czym na przykład nie wiedziałem do jakiej pracy się odnosi gdy pisze „These results have already been published in [Górecki et al. [2020]]” na stronie 10. Autor także nie numeruje twierdzeń. Natomiast cieszę się, że wszystkie formuły, gdyż spotykam się nieraz z nieco egocentryczną manierą numerowania tylko tych równań, do których jest w tekście odniesienie. Zawsze mnie wówczas ciekawi, że autor nie pomyślał, że może ktoś będzie czytał jego pracę (np. recenzent) i będzie chciał się odnieść do jakiegoś innego równania. Tutaj nie mamy takiego problemu.

Podsumowując stwierdzam, że niniejsza praca doktorska stanowi bardzo istotny wkład do metrologii kwantowej. Osiągnięte rezultaty są nietrywialne, w sposób systematyczny ujmują kwestię operacyjności ograniczeń na błąd estymacji oraz ilościowej analizy tegoż błędu w reżimie, w którym nie można stosować informacji Fishera. Rozprawa porządkuje i pięknie syntetyzuje dział metrologii, który prowadzi do wielu nieporozumień, wyjaśnionych wcześniej raczej na przykładach i tylko w wąskim kręgu specjalistów. Rozprawa jest także gotową pracą przeglądową i może odegrać dużą rolę w uświadamianiu szerokiej społeczności, która na ogół bezrefleksyjnie używa informacji Fishera jako wielkości operacyjnej (mnie się to niestety również zdarzyło). Omawiane powyżej drobne usterki w niczym nie wpływają na moją wysoką ocenę pracy, w której piękno rezultatów i dowodów konkuruje z elegancją narracji. Z przyjemnością stwierdzam, że rozprawa spełnia z naddatkiem zwyczajowe i ustawowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o przyznanie Panu Wojciechowi Góreckiemu stopnia doktora. Wnoszę także o wyróżnienie rozprawy.

