

Wrocław, dnia 5 listopada 2023

Prof. dr hab. Dariusz Grech

Instytut Fizyki Teoretycznej
Wydział Fizyki i Astronomii
Uniwersytet Wrocławski
Pl. Maksa Borna 9
50-204 Wrocław

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Jarosława Klamuta pt.:
„Badanie stochastycznych sprzężeń dynamicznych metodami fizyki statystycznej”

Przedstawiona do recenzji rozprawa doktorska napisana została w postaci mini – monografii w formie ustawowo dopuszczonej dla tego typu rozpraw. Jej tematem jest analiza własności statystycznych wysoce zróżnicowanych czasów między-transakcyjnych (tj. czasów między kolejnymi transakcjami kupna-sprzedaży różnego typu akcji) na przykładzie notowań z parkietu Warszawskiej Giełdy Papierów Wartościowych (GPW). Zasadniczym osiągnięciem rozprawy jest udana próba zamodelowania dynamiki tej zmienności z użyciem błędzenia losowego w czasie ciągłym (CTRW – ang. *Continuous Time Random Walk*). W tym podejściu zmienną losową procesu stochastycznego jest również sam czas, a ściślej jego upływ między poszczególnymi zdarzeniami stanowiącymi wartości pozostałych (standardowych) zmiennych losowych procesu.

Rozprawa doktorska składa się z siedmiu rozdziałów, w tym wprowadzenia i podsumowania, bardzo obszernego i wyczerpującego spisu literatury obejmującego 135 pozycji oraz dziesięciu dodatków (A-J) niezbędnych dla zrozumienia skomplikowanych przeliczeń ilościowych w głównej części pracy. Ich obecność w rozprawie należy bardzo docenić. Praca doktorska licząca bez appendixów nieco ponad sto stron, a wraz z nimi 150 stron napisana jest starannie, dobrym językiem, w większości wyczerpująco z adekwatną ilością wykresów dla zilustrowania bądź poparcia

prezentowanych wyników. W niektórych jednak wypadkach, zwłaszcza w końcowej części rozprawy poświęconej własnościom multifraktalnym czasów między-transakcyjnych, dobre dopasowanie proponowanych zależności funkcyjnych do danych empirycznych (zależność uogólnionego wykładnika Hursta od parametru deformacji fluktuacji q) nie jest poparte odpowiednimi testami, co należy uznać za pewien mankament w pracy, nie wpływający jednak decydująco na ostateczne główne wyniki uzyskane i prezentowane w pierwszej głównej części doktoratu. Osobiście uważam też, że sam tytuł rozprawy można było sformułować trochę zgrabniej i mniej eklektycznie, za to z naciskiem na użytą metodę badawczą, czyli CTRW - tak by czytelnik mógł lepiej zorientować się już po samym tytule w czym leży nowatorskie podejście do badania dynamiki cen transakcyjnych na rynku papierów wartościowych. Prezentowane podejście uważam za bardzo nowatorskie i dające w swojej warstwie analitycznych obliczeń możliwość zastosowania do innych procesów z niejednorodnym rozkładem czasów między zdarzeniami niekoniecznie związanych z transakcjami na giełdzie papierów wartościowych.

Rozprawa doktorska bazuje na trzech oryginalnych publikacjach, które ukazały się w bardzo dobrych czasopismach o międzynarodowym zasięgu (Entropy, Phys. Rev. E, European Physical Journal B) w latach 2019-2021 oraz jednym rozdziale w monografii wydanej przez wydawnictwo Springer jako wynik konferencji międzynarodowej. Doktorant we wszystkich powyższych publikacjach figuruje jako główny autor.

Zasadniczym celem rozprawy jest analiza teoretyczna i numeryczna rozkładów przerw czasowych (czasów wyczekiwania - ang. *waiting times*) w szeregach czasowych między kolejnymi transakcjami kupna-sprzedaży określonych akcji. Badania tych zjawisk nasiliły się i zyskały znaczne zainteresowanie po serii prac z lat 2008-2014 opublikowanych przez Mikhaila Bogacheva i Armina Bunde (2008, 2009) oraz później w latach 2011 i 2014 przez Josefa Ludeschera, Constantino Tsallisa i Armina Bunde. Niestety nie znalazłem o nich wzmianki w rozprawie.

Rozprawa składa się z dwóch w zasadzie rozdzielnych części. W znacznie obszerniejszej części pierwszej (rozdziały 2 - 5), która sama w sobie wystarczałaby na rozprawę doktorską prezentowany jest teoretyczny opis CTRW czyli procesów stochastycznych, w których zmiennymi losowymi są zarówno zmiany wartości standardowych zmiennych losowych procesu w poszczególnych krokach, jak też odstępy czasu pomiędzy tymi zmianami. Następnie Autor proponuje własny wariant takiego błędzenia losowego w czasie ciągłym z odpowiednio dobranymi sprzężeniami (autokorelacjami) czasów między-zdarzeniowych i porównuje wyniki takiego modelu z empirycznymi danymi finansowymi głównych akcji notowanych na GPW w Warszawie. Porównanie pozwala Autorowi na wyznaczenia wykładników skalowania dla praw potęgowego zaniku funkcji autokorelacji czasów między-transakcyjnych jak i wykładników potęgowego zaniku autokorelacji bezwzględnych zwrotów.

Znalezione w ten sposób związki empiryczne pomiędzy tymi wykładnikami porównywane są z sukcesem z ich odpowiednikami wyprowadzonymi teoretycznie z modelu. Stanowi to główne osiągnięcie rozprawy.

W krótszej części drugiej stanowiącej materiał luźno związany z częścią pierwszą Autor analizuje multifraktalną strukturę czasów wyczekiwania z wykorzystaniem techniki MFDFA (ang. *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis*), która stała się już standardem w tego typu opracowaniach najprzeróżniejszych danych z układów złożonych od fizyki, astronomii, ekonomii po fizjologię, meteorologię czy lingwistykę. Podejście Autora różni się od stosowanych dotąd w ten sposób, że analizie multifraktalnej poddawane nie są „gołe” czasy między-transakcyjne, ale ich specyficznym zdefiniowane wartości uśrednione. Doktorant określa to jako podejście „gruboziarniste” co dość trafnie odzwierciedla przyjętą technikę badawczą. Końcowe wyniki tej analizy nie są jednak dla mnie przekonujące o czym w końcowej części recenzji.

Szczegółowa analiza rozprawy

Rozdziały 2 - 4 mają głównie charakter przeglądowy i stanowią wprowadzenie do głównego dla rozprawy koncepcyjnie i rachunkowo rozdziału 5.

W rozdziale 2 przedstawiona jest charakterystyka danych empirycznych wykorzystywanych w rozprawie doktorskiej oraz sposób ich pozyskiwania. Autor wyjaśnia, że dane te są kluczowe dla osiągnięcia celów pracy i wskazuje, że konkretne własności tych danych były inspiracją do opracowania formalizmu związanego z pamięcią między-zdarzeniową. W szczególności opisany jest mechanizm funkcjonowania giełdy, wskazana zostaje definicja czasu między-transakcyjnego stosowana przez Autora w rozprawie. Czas ten jest definiowany w rozprawie dość specyficznym, bo bez uwzględniania aktywnych zleceń, czyli zakłada się, że zarówno kupujący jak i sprzedający agent uznają wystawioną cenę za sprawiedliwą i w związku z tym dokonują transakcji natychmiast po wystawieniu. Innymi słowy sama giełda nie ingeruje w cenę. Rodzi się pytanie czy tak to wygląda na większości giełd na świecie? Myślę, że w trakcie obrony będzie okazja do zgłębienia tego problemu. Przyznam bowiem, że zawsze sądziłem, iż ostateczna cena waloru w danym momencie kształtuje się jako wynik maksymalizacji obrotu w zadanym oknie czasowym co prowadzi do chwilowego notowania (fixing). Autor pokazuje też potęgowy charakter rozkładu czasów między-transakcyjnych (dokładniej do danych dopasowywany jest wykładniczy rozkład Weibulla przechodzący granicznie w rozkład potęgowy) oraz potęgowy charakter zaniku autokorelacji między czasami między-transakcyjnymi (rys. 2.7, 2.10). Nie znalazłem niestety w tekście dla jakich (przykładowych?) walorów jest to zrobione.

Następne dwa rozdziały omawiają rozmaite modele błędzenia losowego w czasie ciągłym, również w zastosowaniu do modelowania finansowych szeregów czasowych. Większość z tego materiału jest jednak luźniej związana z głównymi wynikami rozdziału 5. Moją uwagę przykuł wykres (rys. 4.2) przedstawiający w skali podwójnie logarytmicznej funkcję autokorelacji czasowej modułów względnych zmian cen w czterech wariantach – wyjściowym oraz z przemieszaniem losowo wartościami zmian cen bez zmiany odstępów czasowych między transakcjami i na odwrót oraz z przemieszaniem wszystkimi wartościami (ceny i odstępy czasu). Z wykresu wyraźnie widać wpływ pamięci długiej w czasach między- transakcyjnych na wielkość i charakter (wykładnik prawa potęgowego) czasowej funkcji autokorelacyjnej bezwzględnych zwrotów. Wynik ten stał się, jak twierdzi Autor, inspiracją do konkretnego modelowania tego zjawiska w rozdziale 5 rozprawy. Niestety, znowu nie znalazłem w podpisie jakiego typu danych empirycznych te wykresy dotyczą.

W kluczowym rozdziale 5 stanowiącym główny i najważniejszy filar rozprawy Autor przechodzi do opracowania modelu procesu stochastycznego dla znalezionej wcześniej faktu empirycznego wpływu autokorelacji w czasach wyczekiwania na autokorelację bezwzględnych zmian cen. Dokonuje tego z sukcesem w oparciu o własny model CTRW i to zarówno jakościowo (wyprowadzenie potęgowego charakteru zaniku autokorelacji) jak i ilościowo (porównanie wykładników zaniku obu typów autokorelacji ze sobą).

Doktorant najpierw pokazuje jak można zamodelować autokorelacje czasów między-zdarzeniowych. Dokonuje tego poprzez kilkukrotne powtórzenie, jedna za drugą w ciągu czasu, przerw czasowych o identycznej długości, przy czym liczba powtórzeń losowana jest osobno dla każdego czasu wyczekiwania z dyskretnego rozkładu potęgowego zeta. Okazuje się, że takie założenie prowadzi po kilku nietrywialnych przekształceniach analitycznych do asymptotycznej postaci krokowej funkcji autokorelacji czasów między-zdarzeniowych $COV_{\Delta t}(n)$ dla dużej ilości kroków n , która ma również postać prawa potęgowego dla n . Jest to wynik analityczny zgodny z danymi empirycznymi. Wykładnik prawa potęgowego zaniku autokorelacji czasów wyczekiwania jest przy tym o dwa mniejszy niż wykładnik rozkładu potęgowego, z którego losowano ilość powtórzeń jednakowych kroków czasowych. Same powtórzenia w odpowiedniej ilości prowadzą zatem do pojawienia się potęgowego zaniku autokorelacji. Powtórzenia te są też istotne w dalszym ciągu wyprowadzeń przy przejściu do formuły na autokorelację przyrostów procesu. Prezentowany model może według mnie być też wykorzystany jako nowa metoda generowania sztucznych danych (szeregów czasowych, procesów) z nieskończoną pamięcią modulowaną potęgowym zanikiem. Pojawia się pytanie – co by się stało gdybyśmy zamodelowali autokorelację czasów wyczekiwania innym sposobem np. przez modulację amplitud w transformacie Fouriera kroków czasowych (metoda FFM – ang. *Fourier Filtering Method*), co wydaje się być bardziej naturalne dla CTRW?

Czy odtworzylibyśmy wtedy również autokorelację samych zmian procesu $COV_{\Delta x(t)}$ i jej asymptotycznie potęgowy zanik?

W tym miejscu drobna uwaga redakcyjna. Muszę przyznać, że podrozdział 5.1.3 następujący zaraz po uzyskaniu jednego z kluczowych wyników rozprawy (równanie 5.10) nie jest związany bezpośrednio z dalszym prowadzeniem obliczeń zmierzających do wyliczenia funkcji autokorelacyjnej zmian procesu $COV_{\Delta x(t)}$, gdyż dotyczy autokorelacji czasów pomiędzy zdarzeniami ekstremalnymi. Pojawienie się tego podrozdziału w tym miejscu zakłóca istotnie tok myślenia przy czytaniu pracy. Chyba lepiej byłoby gdyby znalazł się on w innym miejscu pracy - najlepiej w postaci Appendixu.

Dalsza część rozdziału 5, która wzbudza mój szacunek, to prawdziwy majstersztyk obliczeń analitycznych prowadzący do znalezienia momentów procesu CTRW z założoną (wyliczoną wcześniej z modelu powtórzeń czasów) autokorelacją czasów wyczekiwania (równania 5.58, 5.60). W oparciu o te formuły Autor otrzymuje ostatecznie końcowy wzór (5.63) będący zwieńczeniem skomplikowanych rachunków tego rozdziału i całej rozprawy, wyrażający jawnie autokorelację przyrostów modelowanego procesu. Rezultat nie tylko odtwarza potęgowy zanik funkcji autokorelacji przyrostów procesu z czasem, ale również pokazuje że wykładnik skalowania jest tu identyczny z wykładnikiem potęgowego zaniku autokorelacji kroków czasowych (długości czasów wyczekiwania). Co więcej, Autorowi udało się pokazać, że końcowa postać funkcji autokorelacyjnej przyrostów procesu $COV_{\Delta x(t)}$, jest proporcjonalna do kwadratu średniego przyrostu procesu $\langle \Delta x \rangle$. Oznacza to, że dla procesów CTRW z zerowym dryftem nie zaobserwujemy autokorelacji zmian procesu, zaś np. autokorelacja modułów zmian (bezwzględnych zwrotów na rynku kapitałowym) posiadająca niezerową średnią zmian będzie już widoczna. Są to wszystko fakty znane z empirii rynków giełdowych, co w rozprawie zostało odpowiednio przytoczone (np. tabela 5.1, rysunki B.8, B.10) i stanowi główne oraz znaczące osiągnięcie rozprawy będące oryginalnym rozwiązaniem nietrywialnego problemu z pogranicza procesów stochastycznych, fizyki i ekonofizyki.

W przeciwieństwie do powyższego rozdział 6 nie zadowolił mnie. Uważam, że jest to zaledwie szkic pewnego niewątpliwie ciekawego projektu naukowego wymagający jednak jeszcze gruntownego dopracowania. Rozdział traktuje o multifraktalnych własnościach w szeregu czasowym czasów wyczekiwania i jest to niewątpliwie zagadnienie ciekawe i warte głębszej analizy. Jednak po pierwsze – dane te przed zastosowaniem metody MFDFA są nieco przetransformowane (specyficzna średnia) co może choć nie musi zakłócić ich multifraktalny profil. Po wtóre – ważniejszym elementem wpływającym na modyfikację profilu multifraktalnego diskutowanych danych jest wpływ gruboogoniastego rozkładu prawdopodobieństwa, któremu one podlegają, a którym Autor wcześniej też pisze. Wspomnę też inne powody pojawiania się tzw. „sztucznej multifraktalności” opisywanych

w literaturze jak efekt skończonej długości danych czy autokorelacji liniowych. Niemniej właściwa ocena co najmniej wpływu rozkładu danych i sposobu ich przekształcania przed zbadaniem własności multifrakalnych jest konieczna dla wysnucia wniosku, co do kształtu profilu multifrakalnego, w tym ocenienia czy efekt „wielogałęziowej multifraktalności” zwanej też w literaturze efektem zygzaka (ang. *zig-zag*) w spektrum multifrakalnym, a wywodzącym się z podejrzewanej niemonotoniczności uogólnionego wykładnika Hursta $h(q)$ jest realnie istniejącym. Wskazuję tu na potrzebę głębszej analizy pozyskanych danych pod tym kątem.

Podsumowanie i wnioski końcowe

Praca jest ciekawa, bardzo uważnie zredagowana choć merytorycznie trudna głównie ze względu na skomplikowaną naturę matematycznego opisu błędzenia skokowego w czasie ciągłym i związane z tym przeliczenia analityczne. Bardzo dobrze wpisuje się we współczesny nurt badań ekonofizyki. Rozprawa prezentuje szereg nowych rezultatów, z których najciekawszy to model procesu stochastycznego ze skorelowanymi czasami wyczekiwania indukujący autokorelację między samymi przyrostami procesu – jakościowo i ilościowo w zgodzie z faktami stylizowanymi (notowania i czasy wyczekiwania na polskim rynku GPW). Warto rozszerzyć te porównania również dla innych rynków finansowych, w tym zwłaszcza o większej płynności – ciekaw byłbym tych wyników.

Przedstawiony doktorat może stanowić inspirację do dalszych badań, a w szczególności rozszerzenia wyników na porównanie z innymi pozagiełdowymi procesami stochastycznymi, w których należałoby zweryfikować uniwersalność podejścia bazującego na wyprowadzonych zależnościach autokorelacyjnych w ramach CTRW. Z pewnością taki dalszy scenariusz badań doprowadziłby do całej serii następnych publikacji.

W podsumowaniu moja ocena przedstawionej rozprawy jest pozytywna mimo kilku słów krytycznych o jej drugiej mniejszej części poświęconej badaniu multifraktalności. Dodanie tej części miało w zamyśle Autora pewnie wzmocnić rozprawę ale efekt jest według mnie raczej odwrotny. Szczęśliwie pierwsza obszerna część rozprawy dominuje swoim ładunkiem naukowym.

Stwierdzam, że Doktorant zaprezentował ogólną wiedzę teoretyczną w interdyscyplinarnych zastosowaniach fizyki statystycznej i procesów stochastycznych do analizy dużych zbiorów danych generowanych przez bardzo skomplikowany układ złożony, którym jest giełda papierów wartościowych. Udowodnił także umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej o czym poza samą rozprawą świadczą naukowe publikacje Autora i jego rola w ich powstaniu.

Prezentowane w rozprawie wyniki stanowią nowatorskie i oryginalne rozwiązanie problemu naukowego. Uważam w związku z tym, że rozprawa w pełni spełnia wymagania ustawowe i

zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie mgr. Jarosława Klamuta do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

A handwritten signature in black ink, reading "Dariusz Grech". The script is cursive and fluid, with the first letter 'D' being large and prominent.

Prof. dr hab. Dariusz Grech