

Kraków, 16 stycznia 2026 r.

dr hab. Sebastian Szybka, prof. UJ
Zakład Astrofizyki Relatywistycznej i Kosmologii
Obserwatorium Astronomiczne
Uniwersytet Jagielloński

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Eryka Buka
„Topologicznie trywialne i nietrywialne ekstremalne, izolowane
horyzonty”**

Pan Eryk Buk rozpoczął prace nad rozprawą doktorską pod opieką prof. dr hab. Jerzego Lewandowskiego. Prof. Lewandowski zmarł w 2024 roku, a praca została ukończona pod kierunkiem dr hab. Adama Szereszewskiego oraz dr Wojciecha Kamińskiego.

Temat badawczy, którego podjął się autor, dotyczy matematycznej ogólnej teorii względności Einsteina, a w szczególności zagadnień związanych z czarnymi dziurami i ich horyzontami zdarzeń. Horyzonty zdarzeń czarnych dziur są pojęciami globalnymi o charakterze teleologicznym. Stanowi to istotny problem, kiedy abstrakcyjne pojęcia i definicje matematyczne chcemy skonfrontować z rzeczywistą fizyką. Obserwacje astronomiczne z natury rzeczy mają charakter lokalny zarówno w czasie jak i w przestrzeni.

Horyzonty zdarzeń czarnych dziur posiadają wspólne właściwości geometryczne z hiperpowierzchniami, które są bardziej fundamentalne w sensie matematycznym. Hiperpowierzchnie te można zdefiniować i badać lokalnie bez konieczności znajomości pełnej czasoprzestrzeni. Mgr Buk w swojej pracy skupił się na tzw. horyzontach izolowanych. Hiperpowierzchnie te mogą być studiowane zarówno jako hiperpowierzchnie zanurzone w pełnej czasoprzestrzeni jak i jako abstrakcyjne samodzielne matematyczne obiekty. Wyróżniona geometrycznie wersja horyzontów izolowanych, tzw. ekstremalne horyzonty izolowane, charakteryzuje się zerową grawitacją powierzchniową. Horyzonty te pozwalają na zawężenie równań pola Einsteina (w szczególności równań Einsteina–Maxwella) do badanej hiperpowierzchni, co umożliwia studiowanie ograniczeń narzucanych przez równania pola na geometrię horyzontu bez konieczności rozwiązywania równań w całej czasoprzestrzeni (tzw.

„near-horizon geometry”, czyli geometria побли́жа horyzontu lub geometria przyhoryzontowa). Temat badawczy mgr. Eryka Buka wpisuje się w nurt badań relatywistycznej szkoły warszawskiej. Badania dotyczące izolowanych horyzontów zapoczątkowali prawie trzydzieści lat temu: prof. Abhay Ashtekar, prof. Jerzy Lewandowski i ich współpracownicy.

Głównym celem badań Pana Eryka Buka było znalezienie rozwiązań równań geometrii przyhoryzontowej w symetrii osiowej i ich zanurzenia w pełnych czarnodziurowych czasoprzestrzeniach. Badania te pozwalają połączyć abstrakcyjne geometrie przyhoryzontowe z fizycznie istotnymi czasoprzestrzeniami odpowiadającymi czarnym dziurom.

Pan Eryk Buk jest współautorem trzech artykułów. Dwa z nich zostały opublikowane w *Physical Review D*, a trzeci został zaakceptowany do druku również w *Physical Review D*. Prace dotyczą zagadnień badanych w pracy i zostały napisane wraz ze współpracownikami, do których zaliczają się: J. Lewandowski, A. Szereszewski, D. Dobkowski-Ryłko, M. Ossowski.

Rozprawa (w języku angielskim) składa się z pięciu rozdziałów, trzech aneksów, i spisu literatury. Główne wyniki badań zawarto w rozdziale trzecim i czwartym.

Rozdział pierwszy stanowi zwięzłe wprowadzenie do tematu badawczego. Przedstawiono w nim strukturę całej rozprawy. Rozdział drugi zawiera definicje podstawowych pojęć używanych w dalszej części pracy. Rozdział trzeci zawiera najważniejsze wyniki pracy, które dotyczą równań ze stałą kosmologiczną i polem elektromagnetycznym. Autor wyznaczył wszystkie abstrakcyjne ekstremalne horyzonty izolowane o trywialnej topologii $S_2 \times \mathbb{R}$. Rozdział ten zawiera dowód, iż każdy ekstremalny izolowany horyzont może zostać zanurzony w czasoprzestrzeni Kerra-Newmanna-(anty)-de Sittera (twierdzenie 3.4.1). Wynik ten to ważne uogólnienie opublikowanych wcześniej rezultatów (Buk, Lewandowski, PRD 103, 104004, 2021) na przypadek z polem elektromagnetycznym. W rozdziale czwartym mgr Buk wyznaczył ekstremalne izolowane horyzonty o nietrywialnej topologii i ich zanurzenie w czasoprzestrzeniach Plebańskiego–Demiańskiego. Wyniki zaprezentowane w rozdziale trzecim i czwartym bazują na ogólnych rozwiązaniach równań geometrii przyhoryzontowej przedstawionych w dodatku C. Zasadniczą część pracy kończy rozdział piąty, w którym autor w bardzo zwięzły sposób podsumowuje przedstawione rezultaty.

Wyniki zaprezentowane w rozprawie doktorskiej mgr. Eryka Buka, takie jak twierdzenie 3.4.1, są oryginalne, ciekawe i poszerzają wiedzę dotyczącą ekstremalnych izolowanych horyzontów.

W rozdziale drugim autor twierdzi (strona 8), iż z regularności skalaru Kretschmanna poza $r = 0$ wynika, że pozostałe osobliwości są osobliwościami współrzędnych. W kolejnym zdaniu mgr Buk stwierdza, że można wykorzy-

stać ten skalar w podobny sposób do wykrycia osobliwości w innych czaso-przestrzeniach. Regularność skalar Kretschmanna nie jest wystarczającym warunkiem braku fizycznej osobliwości. Osobliwości w ogólnej teorii względności definiuje się poprzez geodezyjną niekompletność. Nawet jeśli mamy do czynienia z osobliwością krzywizny, to nie musi ona być wykrywalna poprzez skalar Kretschmanna. Ze względu na lorentzowską sygnaturę metryki, nawet nietrywialne „kwadraty” krzywizny (takie jak skalar Kretschmanna) mogą przyjmować wartości zerowe lub ujemne ukrywając w ten sposób patologie krzywizny w kasujących się wzajemnie członach. W terminologii Ellisa i Schmidta (Gen. Rel. Grav. 8, 915 (1977)) osobliwości krzywizny, dla których skalary zbudowane z krzywizny pozostają regularne nazywane są „non-scalar curvature singularities”.

W rozdziale trzecim, zawierającym główne wyniki pracy, pojawiają się nieścisłości. Rozwiązanie równań geometrii przyhoryzontowej dane wzorem (3.202) nie spełnia oryginalnego równania (3.201). Dodatkowo funkcja pomocnicza Q jest wprowadzona w równaniu (3.204) w sposób niekonsystentny z rozwiązaniem (3.202) (nie jest oczywiste dlaczego autor wprowadza tę funkcję). W rozwiązaniu (3.202) ostatni człon zdaje się mieć zły znak. Współczynnik $1/2$ jest zbędny i brakuje czynnika w mianowniku (przy założeniu, że równanie (3.201) jest poprawne). Ta pomyłka propaguje się do kolejnych wzorów — rozwiązania (3.206) oraz (3.207) również nie spełniają oryginalnego równania (3.201). Równanie geometrii przyhoryzontowej (3.201) w rozważanym przypadku można znaleźć w pracy Lewandowskiego i Pawłowskiego (Class. Quant. Grav. 20, 587, 2003; praca [84] w bibliografii rozprawy doktorskiej), więc należy przypuszczać, że jest ono poprawne, a wspomniane nieścisłości nie są wyłącznie błędem typograficznym powstałym podczas spisywania pracy. Niemniej, ten fragment obliczeń nie stanowi oryginalnego wkładu autora, a dostrzeżone nieścisłości nie obniżają wartości naukowej najważniejszych wyników rozprawy doktorskiej.

Główne wyniki pracy, rozwiązania równań geometrii przyhoryzontowej, częściowo pokrywają się z rozwiązaniami przedstawionymi w innych pracach w tym w pracy przeglądowej autorstwa Kunduriego i Lucietiego (Liv. Rev. Rel. 16, 1–71, 2013; praca [9] w bibliografii rozprawy doktorskiej). Wyniki przedstawione przez mgr. Eryka Buka rozszerzają analizę poprzedników, ale moim zdaniem, warto było w pracy doktorskiej odnieść się do artykułu Kunduriego i Lucietiego w bardziej precyzyjny sposób. Ułatwiłoby to wyodrębnienie istotnie nowego wkładu doktoranta w badanie horyzontów izolowanych i równań geometrii przyhoryzontowej. Podobnie, autor nie porównuje wyników swojej pracy z wcześniejszymi rezultatami uzyskanymi przez Matejova i Podolsky’ego (Class. Quant. Grav. 38, 135032, 2021; Phys. Rev. D 105, 064016, 2022), którzy zbadali zanurzenia ekstremalnych izolowanych hory-

zontów. Taka analiza porównawcza znajduje się w najnowszym artykule, którego współautorem jest Pan Buk, ale została ona całkowicie pominięta w pracy doktorskiej, pomimo iż wyniki czeskiej grupy pojawiły się już w 2021 roku.

Praca doktorska Pana Eryka Buka napisana jest w sposób przejrzysty. Pozytywnego wrażenia nie zmieniają literówki, które można znaleźć już na pierwszych stronach pracy. W polskiej wersji tytułu „extremalne”, w abstrakcie: „equaitions”, „Theanalysis”, „Plabiański”; w streszczeniu: „obracających”; w spisie rysunków: „Deminański”; w liście symboli: „necessarly”; we wstępie: „embedd”; w dalszej części pracy: „sbove”, „Deminański”, „accelerting”, „isin”, „coordiantes”, „unfeasable”, „swcond”, „transofrmation”, „intristic”, ...

Pan Eryk Buk biegle posługuje się zaawansowanym formalizmem matematycznym z zakresu ogólnej teorii względności Einsteina. Przedstawiona rozprawa doktorska dowodzi, iż posiada on szeroką wiedzę z zakresu fizyki teoretycznej oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej. Zaprezentował oryginalne rozwiązania istotnych problemów naukowych.

Podsumowując, rozprawa doktorska mgr. Eryka Buka spełnia ustawowe, formalne i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim z dziedziny fizyki teoretycznej. **Wnoszę o dopuszczenie mgr. Eryka Buka do dalszych etapów przewodu doktorskiego, w tym do publicznej obrony rozprawy doktorskiej.**



Sebastian Szybka