

Toruń, 28 czerwca 2026 r.

prof. dr hab. Piotr Śniady
Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa
email: psniady@impan.pl

Recenzja

w postępowaniu o nadanie
IGOROWI CHEŁSTOWSKIEMU
stopnia doktora

Niniejszą recenzję przygotowałem na zlecenie Przewodniczącego Rady Naukowej Dyscypliny Fizyczne, dr hab. Jacka Szczytki, z dnia 15 maja 2026 roku. Niniejsze postępowanie o nadanie stopnia naukowego doktora w dziedzinie nauk fizycznych toczy się według przepisów ustawy z dnia 20 lipca 2018 roku *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce* (tekst jednolity: Dziennik Ustaw z 2024 r., poz. 1571, z późniejszymi zmianami).

Omówienie tematyki. Kandydat przedstawił rozprawę doktorską *Classical and quantum Kneser graphs*. Przedmiotem rozprawy są grafy Knesera, które w swej klasycznej wersji są bardzo konkretnymi grafami skończonymi. Prawdopodobnie najlepszą motywacją do rozważania tych grafów są ich zastosowania w pewnych uogólnieniach liczb chromatycznych. Punktem startu jest skończony zbiór; wierzchołkami grafu Knesera są podzbiory tego ustalonego zbioru o ustalonej liczności.

Uwaga Kandydata koncentruje się na pytaniu: *jak zdefiniować kwantowe odpowiedniki tych grafów w przypadku, gdy wyżej wspomniany skończony zbiór (z którego startuje klasyczna konstrukcja) zostanie zastąpiony przez jego kwantowy odpowiednik?* Tego typu kwantowanie ma swoją dobrze ugruntowaną tradycję w dziedzinie nauk fizycznych; przykładem mogą być choćby grupy kwantowe w podejściu Woronowicza. Oprócz różnych motywacji o charakterze czysto estetycznym, Doktorant wskazuje, że kwantowe wersje grafów Knesera mogą w przyszłości znaleźć zastosowanie m.in. do opisu kwantowych kanałów w ramach teorii informacji kwantowej. Osobiście czuję się usatysfakcjonowany taką motywacją.

Tematyka związana z grupami kwantowymi i grafami kwantowymi żywo się rozwija, cieszy mnie więc taki aktualny i interesujący wybór przedmiotu badań.

Krótkie omówienie rozprawy doktorskiej. Doktorat składa się z 5 rozdziałów oraz dwóch załączników.

Rozdział 1 stanowi przypomnienie podstawowych definicji, czym są graf kwantowy oraz klasyczny graf Knesera. Rozdział ten nie zawiera nowych wyników lecz jest niezbędną częścią rozprawy oraz dobrze współgra z ustawowym wymaganiem („Rozprawa doktorska prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w dyscyplinie albo dyscyplinach...”).

Rozdział 2 (około 14 stron) zawiera moim zdaniem najciekawszy wynik Doktoranta: propozycję definicji i konstrukcję kwantowego grafu Knesera nad zadanym zbiorem kwantowym. Warto tu dodać, że kwantowanie obiektów klasycznych jest kreatywnym procesem, który może dawać więcej niż jedną definicję, i często nie ma innego kryterium poza estetycznym, które pozwalałoby stwierdzić, która kwantowa wersja jest najwłaściwsza.

Główną trudnością widoczną w tekście jest udowodnienie, że obiekt skonstruowany przez Doktoranta spełnia definicję grafu kwantowego. Mogę się tylko domyślać, że jest jeszcze druga,

Śniady

ukryta trudność: było nią znalezienie odpowiedniej definicji (podobnie jak jednymi z największych wyników związanych z pojęciami grupy kwantowej oraz grafu kwantowego było wskazanie właściwej definicji).

W dalszej części recenzji skupię się właśnie na Rozdziale 2.

Rozdział 3 (około 4 stron) dotyczy kolorowań kwantowych grafów Knesera, w szczególności zawiera górne ograniczenia na kwantowe liczby chromatyczne.

Rozdział 4 (około 3 stron) dotyczy spektrów grafów Knesera. Uwaga Kandydata koncentruje się na konkretnych stosunkowo małych przykładach. Za szczególnie wartościowe uważam sformułowanie dolnego ograniczenia w Hipotezie 4.5.

Bardzo krótki Rozdział 5 (około pół strony) zawiera rodzaj podsumowania lub może raczej streszczenia. Jego lektura pozostawiła u mnie niedosyt. Choć nie jest to ściśle rzecz biorąc wymagane ustawowe, oczekiwałbym w takiej rozprawie fragmentu, w którym autor przedstawia nieco szersze spojrzenie na temat swoich badań oraz szerszy kontekst. *Czy są jakieś naturalne otwarte pytania, nawet jeśli nie miałyby one kształtu konkretnych hipotez? Jakie potencjalne kierunki badań stają się dostępne dzięki wynikom rozprawy? Jak mogłyby z grubsza wyglądać wspomniane przez Autora w Rozdziale 1.3.2 zastosowania grafów kwantowych w teorii kanałów kwantowych w konkretnym przypadku grafów Knesera?* Tekst Rozdziału 5 poświęca takim tematom zaledwie 6 zdań i w niewielkim stopniu wychodzą one poza to, czego mógłby i tak domyślić się laik. Z pewnością fragment poświęcony takiemu szerszemu spojrzeniu potwierdzałby *umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej lub artystycznej*, o której mówi Ustawa.

Dodatek A (około 3 stron) zawiera interesującą alternatywną definicję kwantowych grafów Knesera. Nieco zaskakujące jest to, że tekst w żaden sposób nie próbuje rozstrzygnąć, nawet w szczególnych prostych przypadkach, czy definicje z Rozdziału 2 oraz Dodatku A opisują ten sam obiekt czy nie.

Dodatek B (około $7\frac{1}{2}$ strony) nie jest bezpośrednio związany z główną częścią rozprawy. Jest to wspólna praca z dr Arkadiuszem Bochniakiem, dr hab. Pawłem Kasprzakiem oraz prof. dr hab. Piotrem Sołtanem dotycząca kwantowej wersji grafów Mycielskiego oraz ich kwantowych grup symetrii.

Poprawność i oryginalność wyników. Nie mam wątpliwości, że wyniki rozprawy są poprawne. Wykonany przeze mnie krótki przegląd literatury wskazuje, że problem rozwiązany przez Kandydata nie był przedmiotem wcześniejszych badań. Dobrze współgra to z wymogiem Ustawy: *przedmiotem rozprawy doktorskiej jest oryginalne rozwiązanie problemu naukowego [...]*.

Redakcja tekstu. Umiejętność zredagowania naukowego tekstu zgodnie ze standardami dyscypliny podpada pod jeden z wymogów Ustawy: *rozprawa doktorska prezentuje [...] umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej*. Ten cel udało się jedynie częściowo. Poniżej omówię poszczególne rozdziały z tej perspektywy.

Jestem bardzo zadowolony z Rozdziału 1, który został napisany wzorcowo w sposób przyjazny dla czytelnika.

Rozumowania w Rozdziale 2 mają często tasiemcową postać bardzo długich ciągów równości, które bez słowa komentarza ciągną się przez całe stronicę. Taka postać wymaga od czytelnika samodzielnego znalezienia uzasadnienia każdej równości, bez pojedynczej wskazówki od Autora. To duże wymaganie, utrudnia ono bardzo poważnie weryfikację poprawności rozumowań oraz ukrywa rozróżnienie między prostymi oraz głęboko nietrywialnymi krokami rozumowania. Aby nie być gołosłownym: konia z rzędem temu, kto na podstawie samego tekstu rozprawy wskaże miejsce, w którym dowód wykorzystuje Lematy 2.3 oraz 2.4.

Pewnym utrudnieniem dla czytelnika jest również to, że wiele bardzo różnych obiektów oznaczanych jest tą samą literą *A* (czasem z falką, czasem bez; bez indeksów, z jednym indeksem

lub dwoma). Często w jednym fragmencie tekstu pewne wystąpienia A_* oznaczają skończony zbiór a inne operator, czego przykładem jest równość (2.63).

Ukryty kontekst. Kandydat przedstawia pewne definicje (operatory $\tilde{A}_k$, $\tilde{A}_{k,l}$, A_k , itd.) metodą *Deus ex machina*, którą mógłbym streścić słowami: *oto jak definiuję pewien symbol oznaczony mało informatywnym symbolem, ale jakie jest heurystyczne znaczenie tego obiektu, na jakie pytanie stanowi on odpowiedź, tego nie mówię przez dłuższy czas (lub nigdy)*. Tekst nie sprawia w pełni wrażenia napisanego z myślą o czytelniku, kluczowe definicje są głęboko ukryte. Ten sposób pisania sprawia, że czytelnik musi czytać rozprawę wielokrotnie, aby zrozumieć i zrekonstruować niewypowiedzianą intencję Autora.

Aby nie być gołosłownym: najważniejsza definicja w pracy, operatorów A_k , jest ukryta w środku paragrafu tekstu na dole strony 12. (Gdyby była w jawny sposób zdefiniowana w osobnej numerowanej definicji, znacznie łatwiej byłoby mi ją zlokalizować podczas lektury.) Operatory te są wyrażone przez inne operatory $\tilde{A}_k$. *Na jakie pytanie odpowiadają $\tilde{A}_k$ oraz A_k ?* W przypadku A_k bardzo uważny czytelnik znajdzie odpowiedź znacznie dalej, na stronie 23 (są to kwantowe odpowiedniki macierzy sąsiedztwa), o ile ten bardzo uważny czytelnik będzie pamiętać że A_k to szczególnie przypadek operatorów $A_{k,l}$. W przypadku operatorów $\tilde{A}_k$ nie udało mi się w Rozprawie znaleźć odpowiedzi na to pytanie. Dla mnie jako czytelnika to robi ogromną różnicę: myśleć przez większą część dowodu o A_k jak o tajemniczym abstrakcyjnym symbolu, o którym niewiele wiem, czy jak o dobrze mi znanej macierzy sąsiedztwa, która dziś występuje w nieco bardziej kwantowej wersji.

Ukryty kontekst 2. Mój powyższy zarzut o przetrzymywanie czytelnika w jaskini ignorancji dotyczy również heurystycznej roli, jaką pełni operator $\psi^\dagger\psi$ (dla uproszczenia, w poniższym tekście będę używać konwencji $\delta = 1$, będę pomijać czynniki normalizujące takie jak $n!$, oraz nie będę szczegółowo pisać, na jakich nogach tensora działają operatory). Bardzo żałuję, że czytając Rozdział 2 nie dowiedziałem się, że powinienem myśleć o $\psi^\dagger\psi$ jak o kwantowej wersji macierzy sąsiedztwa dla pełnego grafu z pętlami na zbiorze X . Iloczyn tensorowy $C(X)^{\otimes k}$ może być interpretowany jako (kwantowe) funkcje $C(X^k)$ na k -krotnym iloczynie kartezjańskim, a $(\psi^\dagger\psi)^{\otimes k}$ jak kwantowa macierz sąsiedztwa pełnego grafu (z pętlami) na krotkach $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$. To oznacza, że $(\psi^\dagger\psi)^{\otimes k} \otimes 1^l$ działający na odpowiednich nogach tensora $C(X)^{\otimes k+l}$ może być interpretowany jako macierz sąsiedztwa sprawdzająca, czy zbiór indeksów, gdzie dwie krotki się różnią, *jest zawarty* w ustalonym zbiorze. Nie jest to jeszcze to, czego potrzebujemy do konstrukcji grafu Knesera (potrzebowalibyśmy raczej macierzy sąsiedztwa sprawdzającej *równość*; najwyraźniej tę właśnie rolę pełnią operatory $\tilde{A}_k$), ale koncepcyjnie trudność została zredukowana do klasycznej kombinatoryki związanej z kratą boolowską (częściowo uporządkowanym zbiorem podzbiorów ustalonego skończonego zbioru) oraz jej funkcją Möbiusa.

W takiej interpretacji definicja (2.15) staje się wreszcie naturalna: macierz sąsiedztwa sprawdzająca, czy wszystkie indeksy są różne, jest różnicą macierzy, której jest wszystko jedno, oraz sumy macierzy sprawdzających czy zbiór różnic jest ustalony i za mały. Mówiąc nieco bardziej abstrakcyjnie, mamy dwie rodziny obiektów indeksowane zbiorami nóg tensora: jedną jest rodzina $(\psi^\dagger\psi)^{\otimes k} \otimes 1^l$, drugą jest $\tilde{A}_k \otimes 1^l$. Równość (2.17) wyraża pierwszą rodzinę jako spłot drugiej oraz funkcji ζ , zaś równość (2.18) wyraża drugą rodzinę jako spłot pierwszej oraz funkcji Möbiusa. Reszta dowodu nie jest już potrzebna (pracę wykonali za nas kombinatorycy oraz równość $\mu * \zeta = \delta$), a samo Twierdzenie 2.2 nabiera dobrze znanego kształtu reguły włączeń i wyłączeń. Jestem głęboko przekonany, że Doktorant jest świadomy przynajmniej pewnym stopniu takiej interpretacji (ja osobiście bez takiej interpretacji nie byłbym w stanie wymyślić takich równań jak w doktoracie); szkoda, że zabrakło jej w rozprawie.

Doktorant preferuje pracę z jednorodnymi obiektami powstającymi przez zsumowanie elementów powyższych dwóch rodzin o ustalonym stopniu (względem naturalnej gradacji na kracie boolowskiej). W ten właśnie sposób powstają operatory $\tilde{A}_{k,l}$. Lemat 2.3 nabiera w tym świetle nowego znaczenia, a jego dowód może być uproszczony w podobny sposób do kombinatoryki

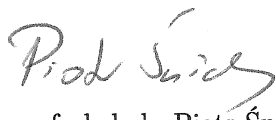
funkcji ζ oraz funkcji Möbiusa i ich splotów.

Ukryty kontekst 3. Szczególnie cenny i interesujący jest dla mnie Lemat 2.5, ponieważ jego treść i dowód wykraczają poza powyższe kombinatoryczne intuicje związane z grafami oraz nieskomplikowaną algebrą $C(X)^{\otimes n}$. Trudność leży w tym, że naszym celem jest znacznie bardziej złożona algebra $C(\binom{n}{k})$, do której dostęp mamy głównie poprzez zanurzenia ι . O ile mnożenie w $C(\binom{n}{k})$ jest po prostu obcięciem mnożenia w $C(X)^{\otimes n}$, o tyle zdefiniowanie komnożenia wymaga kompresji poprzez ι . Konstrukcja kwantowych grafów Knesera (Johnsona) zawarta w pracy polega na transporcie konkretnych kwantowych grafów w $C(X)^{\otimes n}$ do podalgebry $C(\binom{n}{k})$, ale wspomniana konieczność zastosowania kompresji sprawia, że konstrukcja ta nie jest automatyczna, i dokładnie do tej trudności odnosi się Lemat 2.5. Szkoda, że sformułowanie tego lematu oraz jego dowodu zawarte w Rozprawie ukrywają subtelność trudności w nim zawartą; prawdziwie interesujący argument ukryty jest w tasiemcowym ciągu równości. To właśnie w tym dowodzie pojawia się ciekawy argument, który wykracza poza mechaniczną buchalterię nóg tensorów.

Uważam, że Lemat 2.5 oraz związana z nim tematyka aż proszą się o ponowne wyrażenie we właściwym języku, który zarazem uprościłby notację oraz nawiązałby do istniejącej literatury. Terminy *iloczyn Schura* / *iloczyn Hadamarda* wydają się być dobrym punktem startu do rozmowy na temat wszerdobyłskiego $A \odot B := m(A \otimes B)m^\dagger$, który przenika Rozprawę, zaś Lemat 2.5 dotyczy własności, która ma ugruntowaną nazwę (*kwantowy*) *idempotent Schura*. Ten język pojawia się przecież w Rozdziale 1; użycie go w tym miejscu pozwoliłoby na mniej techniczną i bardziej koncepcyjną prezentację wyniku.

Gdzie leży wartość Rozprawy? O wynikach Doktoranta myślę jak o pierwszym wejściu na szczyt. Dopiero ze szczytu, patrząc wstecz, można spojrzeć krytycznie na drogę pierwszego zdobywcy, szukać dróg na skróty, oderwać wzrok od kamieni i spojrzeć na cały masyw. Doktorantowi udało się zdefiniować interesujące pojęcie oraz zdobyć pewien intelektualny szczyt jako pierwszy. Gratuluję. Rozprawa dokumentuje stan umysłu zdobywcy szczytu zanim nadeszła pogłębiona refleksja nad przebytą drogą.

Pozytywna konkluzja. Ustawa stawia następujące wymagania. *Rozprawa doktorska prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną kandydata [...] oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej [...]. Przedmiotem Rozprawy doktorskiej jest oryginalne rozwiązanie problemu naukowego [...].* Pomimo wspomnianych przeze mnie niedoskonałości Rozprawa spełnia te ustawowe wymagania.



prof. dr hab. Piotr Śniady