

Wrocław, 15 lipca 2026r.

dr hab. Anna Wysoczańska-Kula  
Instytut Matematyczny  
Uniwersytet Wrocławski

---

Recenzja rozprawy doktorskiej  
mgra Igora Chelstowskiego pt.  
*Classical and quantum Kneser graphs*

---

Niniejszą recenzję przygotowałam na zlecenie Rady Naukowej Dyscypliny Nauki Fizyczne Uniwersytetu Warszawskiego. Podstawą prawną postępowania doktorskiego jest Uchwała nr 157 Senatu Uniwersytetu Warszawskiego z dnia 29 czerwca 2022 r.

### 1. STRUKTURA I TEMATYKA ROZPRAWY

Rozprawa doktorska mgra Igora Chelstowskiego liczy 42 strony i składa się z rozdziału wstępnego, trzech rozdziałów stanowiących zasadniczą treść pracy, rozdziału posumowującego, dwóch dodatków (appendix) oraz bibliografii. Dysertacja jest napisana w języku angielskim.

Rozprawa dotyczy grafów kwantowych, w szczególności definicji oraz własności kwantowych grafów Knesera. Opisywane zagadnienia osadzone są w obszarze tzw. matematyki nieprzemiennej. Istotą tego podejścia jest zastąpienie klasycznego badania przestrzeni postrzeganej jako zbiór punktów przez analizę algebr funkcji zdefiniowanych na danej (w tym wirtualnej) przestrzeni. Inspiracją do tego była kwantyzacja Heisenberga, a matematyczną formalizacją – twierdzenie Gelfanda-Najmarka. Ustanawia ono wzajemną odpowiedniość między kategorią zwartych przestrzeni topologicznych (w której morfizmami są funkcje ciągłe) a kategorią przemiennej  $C^*$ -algebr z jedyneką (gdzie rolę morfizmów pełnią  $*$ -homomorfizmy). Stosując tę analogię, nieprzemienne  $C^*$ -algebry z jedyneką można interpretować jako algebry funkcji na wirtualnych, „kwantowych” przestrzeniach zwartych. Przeniesienie klasycznych obiektów matematycznych na ich kwantowe odpowiedniki zapoczątkowało intensywny rozwój takich dziedzin jak geometria nieprzemieniana, teoria grup kwantowych czy nieprzemieniana probabilistyka. W ten sam nurt wpisują się badania nad kwantowymi analogami klasycznych grafów. Choć samo pojęcie grafu kwantowego jest stosunkowo młode – jego początki wyznaczają prace Weavera (2012) oraz Duana, Severiniego i Wintera (2013) – stanowi ono niezwykle interesującą i dynamicznie rozwijającą się dyscyplinę, która czerpie inspiracje oraz znajduje bezpośrednie zastosowanie w kwantowej teorii informacji.

### 2. ZAWARTOŚĆ PRACY

Pierwszy rozdział dysertacji zawiera krótkie wprowadzenie do tematyki grafów kwantowych oraz ustalenie stosowanych oznaczeń. Doktorant definiuje pojęcia, które są niezbędne w dalszej części pracy, między innymi dwie różne definicje grafu kwantowego wraz z uzasadnieniem ich równoważności. Przypomina także klasyczną konstrukcję grafów Knesera:  $K(n, k)$  ( $k \leq n$ ) to graf, którego wierzchołkami są  $k$ -elementowe podzbiory zbioru  $n$ -elementowego i, a dwa wierzchołki są połączone, jeśli odpowiadające im podzbiory są rozłączne.

Rozdział drugi poświęcony jest definicji kwantowych grafów Knesera  $K(\mathbb{X}, k)$ , sprawdzeniu jej poprawności i zbadaniu kilku własności. Autor korzysta z definicji grafu kwantowego jako trójki złożonej ze skończonej-wymiarowej  $C^*$ -algebry  $C(\mathcal{G})$ ,  $\delta$ -formy  $\psi$  i "macierzy sąsiedztwa"  $A : C(\mathcal{G}) \rightarrow C(\mathcal{G})$  (Definicja 1.6) i po kolei konstruuje poszczególne elementy. Dla ustalonej

*awk*

skończenie wymiarowej algebry  $C(\mathbb{X}) = \bigoplus_{a=1}^n \mathbb{M}_{d_a}$ , będącej sumą prostą algebr macierzowych, i  $\delta$ -formy  $\psi = \bigoplus_{a=1}^n \text{Tr}(\rho^a \cdot)$  (które są kwantowym odpowiednikiem  $n$ -elementowego zbioru traktowanego jako graf bez krawędzi), definiujemy  $C(\mathcal{G})$  jako sumę prostą symetrycznych iloczynów tensorowych  $\mathbb{M}_{d_{a_1}} \oplus_s \dots \oplus_s \mathbb{M}_{d_{a_k}}$  po  $k$ -elementowych podzbiorach zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Tak zdefiniowana algebra  $C(\mathcal{G})$  jest  $C^*$ -podalgebrą w  $C(\mathbb{X})^{\otimes k}$  i, jak pokazuje Doktorant (Lemma 2.1), funkcjonal  $\psi^{\otimes k}$  jest na niej  $\delta_k$ -formą z  $\delta_k = \frac{\delta^k}{\sqrt{k!}}$ . Jakkolwiek sama definicja algebry  $C(\mathcal{G})$  i funkcjonułu na niej wymagała już pewnego pomysłu, kluczowa w tym rozdziale pozostaje definicja macierzy sąsiedztwa  $A$ . Macierz ta powstaje jako kombinacja tensorowych potęg  $\psi^\dagger \psi$  zastosowanych do wybranych "nóg" algebry  $C(\mathcal{G})$  i okazuje się (Lemma 2.5) spełniać "kwantowy warunek idempotentności Schura", czyli  $m(A \otimes A)m^\dagger = \delta^2 A$ , gdzie  $m$  oznacza mnożenie na algebrze. Zatem (Proposition 2.6) trójka  $(C(\mathbb{X}), \psi^{\otimes k}, A)$  okazuje się być grafem kwantowym i dostaje nazwę kwantowego grafu Knesera. Graf ten, oznaczany  $K(\mathbb{X}, k)$ , jest nieskierowany i niezwrrotny (Proposition 2.9), a jeśli algebra  $C(\mathbb{X})$  ma wszystkie wymiary  $d_a$  równe i  $\psi$  jest śladowy, to  $K(\mathbb{X}, k)$  jest regularny stopnia  $\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \binom{n-l}{k-l} (-1)^l d^{2k-2l}$  (Proposition 2.10). Rozdział kończy wynik uzasadniający nadanie przedstawionej konstrukcji nazwy kwantowego grafu Knesera (Proposition 2.12). Prezentowane w tym rozdziale wyniki są oryginalne i nietrywialne. Wymagały one od Doktoranta zarówno dobrego pomysłu, jak i dużej sprawności w prowadzeniu subtelnych i technicznych rozumowań. Brakuje tutaj natomiast prezentacji idei, która stała za tymi pomysłami – skomplikowane wzory nie zostały przecież "wyjęte z kapelusza".

W rozdziale trzecim rozprawy przedstawione zostało górne oszacowanie na liczby chromatyczne grafów Knesera przy założeniu, że  $\psi$  jest śladowy. Przez kwantową liczbę chromatyczną  $\chi_q(\mathcal{G})$  rozumiemy najmniejszą możliwą liczbę rodziny projekcji  $\{P_i\}_{i=1}^k$  w  $C(\mathcal{G}) \otimes B(H)$  (dla jakiegoś  $H$ ) stanowiących rozkład jedności i spełniających warunek  $P_i(A \otimes \text{id})P_i = 0$  dla każdego  $i$ . Dowód głównego wyniku tego rozdziału (Proposition 3.1), czyli oszacowania

$$\chi_q(K(\mathbb{X}, k)) \leq \sum_{a=1}^{n-k+1} d_a^2,$$

polega na wskazaniu konkretnego układu projekcji, stanowiącego kwantowe kolorowanie. Projekcje te są nietrywialnym uogólnieniem rodziny z pracy Brannana, Ganesana i Harrisa [7, Theorem 6.5], która posłużyła do szacowania liczby chromatycznej kwantowego grafu pełnego. W tej części brakuje mi dokładniejszej dyskusji, do jakiego stopnia założenie o śladowości funkcjonułu  $\psi$  jest zrobione tylko – jak pisze Autor – "for simplicity". Rozdział kończy obserwacja, że w dwóch skrajnych przypadkach ( $k = 1$  i  $k = n$ ) zawsze mamy równość  $\chi_q(K(\mathbb{X}, k)) = \sum_{a=1}^{n-k+1} d_a^2$ .

Treść rozdziału czwartego stanowi poszukiwanie oszacowań z dołu na liczby chromatyczne kwantowych grafów Knesera. W tym celu Doktorant odwołuje się do kwantowej wersji nierówności Hoffmana, wykazanej przez Ganesana [11, Theorem 4.2], wiążącej liczbę chromatyczną z własnościami spektralnymi macierzy sąsiedztwa. Dokładniej, zachodzi

$$\chi_q(\mathcal{G}) \leq 1 + \frac{\lambda_{\max}(A)}{|\lambda_{\min}(A)|},$$

gdzie  $\lambda_i$  są wartościami własnymi macierzy  $A$ . Główny wynik tej części pracy to obserwacja, że algebra  $C(K(\mathbb{X}, k))$  rozkłada się na sumę prostą pewnych niezmienniczych podprzestrzeni. Otrzymany wynik jest wykorzystany do oszacowania kwantowej liczby chromatycznej dla kwantowych grafów Knesera z parametrami  $(n, k)$  równymi  $(3, 2)$ ,  $(4, 2)$  i  $(4, 3)$ , przy upraszczających założeniach, że wszystkie  $d_a$  są równe  $d$ , a  $\psi$  jest śladowy. Niestety w rozprawie zostały podane tylko finalne wyniki, bez dokładnych rachunków (choćby w jednym przypadku). Niestety również, otrzymane oszacowania nie wystarczają, aby dokładnie wyznaczyć kwantową liczbę

awu

chromatyczną w jakimkolwiek przypadku. Doktorant nie pisze w rozprawie, czy próbował stosować inne niż nierówność Hoffmana oszacowania z dołu podane w pracy Ganesan, a byłby to w mojej ocenie bardzo naturalny krok. Mimo wszystko otrzymane oszacowania są interesujące, a przede wszystkim nietrywialne, a na ich bazie Autor formułuje ciekawą hipotezę o asymptotycznym zachowaniu kwantowej liczby chromatycznej dla kwantowych grafów Knesera.

Na opisanych powyżej czterech rozdziałach kończy się oficjalna część pracy (zamknięta rozdziałem podsumowującym), ale na czytelnika czekają jeszcze dwa rozdziały dodatkowe. W pierwszym z nich (Appendix A) znajdujemy opis alternatywnej metody zdefiniowania kwantowej wersji grafów Knesera. Tym razem wychodzimy od obserwacji, że w klasycznej sytuacji graf Knesera  $K(n, k)$  jest dopełnieniem grafu mylenia (*confusability graph*) dla pewnego kanału kwantowego i stosujemy równoważną definicję grafu kwantowego jako systemu operatorowego. Wówczas kwantowy graf Knesera o ustalonych parametrach  $(n, k)$  jest zadany jako dopełnienie ortogonalne (w  $k$ -krotnym antysymetrycznym iloczynie tensorowym  $n$ -wymiarowej przestrzeni Hilberta) systemu operatorowego rozpiętego przez operatory Krausa  $K_{a_1, \dots, a_k}$  opisujące kanał kwantowy działający jako ślad na  $k-1$  "nogach" przestrzeni. Ten system operatorowy jest oznaczony przez  $\mathcal{V}_q$ . Zaproponowana definicja jest interesująca i bardzo brakuje jej porównania z definicją z Rozdziału 2. Czy otrzymane obiekty są (albo mogą być) tym samym, albo chociaż dawać grafy (kwantowo) izomorficzne? Są to naturalne pytania i mam nadzieję, że Doktorant potraktuje je jako inspirację do dalszych badań. Główny wynik Appendixu A stwierdza, że system operatorowy odpowiadający klasycznemu grafowi Knesera (dla dowolnie wybranej bazy) zawiera się w systemie dla jego kwantowego odpowiednika (Proposition A.3). W sformułowaniu wyniku brakuje doprecyzowania, czy teza jest prawdziwa dla dowolnych parametrów i dowolnie wybranej bazy przestrzeni Hilberta. Co więcej, mam wątpliwości co do poprawności dowodu zamieszczonego w rozprawie: pierwsze zdanie dowodu stwierdza, że  $\mathcal{V}_q$  nie zależy od wyboru bazy, co w mojej ocenie nie wynika z wcześniejszych rozumowań. Mam wrażenie, że ta część rozprawy zawiera ciekawe wyniki, ale wymaga jeszcze dopracowania.

Appendix B skupia się na badaniu własności kwantowego grafu Mycielskiego (tzw. Mycielskianu). Sama konstrukcja pochodzi z pracy Bochniaka i Kasprzaka [4], gdzie zostały też zbadane jej podstawowe (liczba chromatyczna, liczba klik). W rozprawie Doktorant skupia się na własnościach zachowywania kwantowych symetrii. Najpierw Autor rozprawy pokazuje (Proposition B.6), że kwantowe Mycielskiany zachowują kwantową izomorficzność grafów. W dowodzie autor konstruuje bezpośrednio kwantowy izomorfizm między Mycielskianami na bazie kwantowego izomorfizmu między wyjściowymi grafami. Kolejny wynik (Proposition B.7) opisuje, jak kwantowa grupa symetrii grafu kwantowego  $\mathcal{G}$  działa na kwantowym Mycielskianie  $\mu(\mathcal{G})$ . Dowód tego faktu ponownie polega na konstrukcji kwantowego działania na Mycielskianie. Wynik ten jest następnie wykorzystany, aby pokazać, że kwantowe grupy symetrii grafu i jego Mycielskianu zachowujące rozkład jedności są równe, jeśli graf kwantowy nie ma bliźniaczych wierzchołków kwantowych (Theorem B.10). Wreszcie, Theorem B.11 stwierdza, że – przy tym samym założeniu o braku wierzchołków bliźniaczych – *quantum distinguishing number* Mycielskianu zwiększa się o co najwyżej 1 w stosunku do grafu oryginalnego. Pojęcie *kwantowej liczby rozróżniającej* intuicyjnie oznacza, jakie jest najmniejsze kolorowanie, które zaburza wszystkie (kwantowe) symetrie grafu. Opisany wynik jest kwantowym odpowiednikiem rezultatu uzyskanego w klasycznym przypadku całkiem niedawno [Alikhani, Soltani 2020].

Rezultaty zawarte w tym rozdziale zostały opublikowane w pracy [4], współautorskiej z A. Bochniakiem, P. Kasprzakiem i P. Sołtanem. Wyniki te są ciekawe i zasadniczo niezależne od wcześniejszych części rozprawy, ale bardzo naturalne. Dowody opierają się na dość zaawansowanych rozważaniach dotyczących działań na grupach kwantowych. Z pewnością wchodzą

*Alireza*

na trochę wyższy stopień zaawansowania poprzez połączenie teorii grafów kwantowych z teorią grup kwantowych oraz działań na nich, dlatego spodziewam się, że praktyka nabyta przez Doktoranta przy tej pracy posłuży do dalszych badań nad kwantowymi grafami Knesera.

### 3. OCENA FORMY ROZPRAWY

Praca jest napisana dość starannie i zawiera niewiele tzw. literówek. Język pracy jest w mojej ocenie poprawny, typowy dla publikacji matematycznych. Struktura zasadniczej części rozprawy jest czytelna i naturalna (rozdziały odpowiadają poszczególnym wynikom). Uważam natomiast, że treści umieszczone w rozdziałach dodatkowych są nieadekwatne do treści zasadniczej i powinny one być albo zostać włączone do właściwej części pracy, albo z niej usunięte. Obecny stan odbieram jako efekt braku czasu (albo chęci), aby dobrze przemyśleć i opisać połączenie wszystkich trzech tematów.

Inne drobniejsze zastrzeżenia do edytorskiej strony rozprawy to:

- (1) W kilku miejscach pracy obserwuję brak dbałości o matematyczne detale, np.:
  - W dowodzie Lematu 1.12 – co się dzieje, gdy jedna ze współrzędnych wektora  $x$  jest 0?
  - W dowodzie Twierdzenia 1.13 – czy  $\lambda_{\min}$  może być 0 i co wtedy?
  - W definicji operatora  $\tilde{A}_k$  – od czego startuje rekurencja, czyli ile wynosi  $\tilde{A}_0$ ? z jakiego zakresu bierzemy indeks  $k$ ?
- (2) W pracy brakuje wyjaśnienia niektórych symboli (np. sądząc po wzorze (A.4),  $e_a$  we wzorze (A.2) oznaczają elementy bazy ON w  $\mathcal{H}$ ; czym jest  $\rho_G$  we wzorze (B.22) na str. 36?), a niektóre pojawiają się trochę za późno (np. wyjaśnienie oznaczenia  $\dagger$  pojawia się str. 12, l. 4, ale jest wykorzystane wcześniej w Definicji 1.6).
- (3) Praktycznie wszystkie wzory są numerowane, co zmniejsza czytelność pracy. Standardem jest numeracja tylko tych wzorów, do których w dalszej części pracy występuje "numerowane" odniesienie.
- (4) Jak już wspomniałam wyniki uzyskane w przykładach z Rozdziału 4 są podane bez dowodów (zapewne dość długich i głównie rachunkowych), podobnie z Example A.6. O ile taki styl jest normą w publikacjach naukowych, o tyle – według mnie – rozprawa doktorska powinna przedstawiać szczegóły w tego typu rozumowaniach.
- (5) W mojej ocenie referencje do rezultatów z literatury są zbyt zdawkowe – np. zamiast odniesienia do całej pracy [7] na str. 24, l. 1 można by przekierować uwagę czytelnika bezpośrednio na [7, Theorem 6.5].

Pomimo wspomnianych usterek utrudniających lekturę dysertacji, stronę formalną rozprawy oceniam pozytywnie.

### KONKLUZJA

Podsumowując, mimo drobnych niedoskonałości przedstawioną rozprawę oceniam zdecydowanie pozytywnie. Przedstawione wyniki uważam za oryginalne i ciekawe. Dowody wymagają subtelnych i technicznych rozumowań, ale wskazują także na dobrą znajomość literatury, z uwzględnieniem prac bardzo niedawnych. Zaproponowana definicja kwantowego grafu Knesera wydaje się naturalna i otwiera pole do dalszych badań.

Uważam, że przedłożona rozprawa spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim z matematyki. Dlatego też wnoszę o dopuszczenie mgra Igora Chelstowskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

*Alwysa - Kuba*