

Recenzja rozprawy doktorskiej
pana magistra Igora Chelstowskiego
„*Classical and quantum Kneser graphs*”



UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Rozprawa doktorska pana magistra Igora Chelstowskiego poświęcona jest konstrukcji pewnej klasy kwantowych grafów odpowiadających w klasycznym przypadku grafom Knesera.

Rozdział pierwszy poświęcony jest krótkiemu wprowadzeniu w tematykę pracy - poczynając od idei geometrii nieprzemiennej i grup kwantowych po definicje i własności grafów i grafów kwantowych. Oczywiście nie jest to wyczerpujące wprowadzenie, ale pozwala na dobre zrozumienie genezy głównego obiektu rozprawy, czyli grafów kwantowych. Pod względem matematycznym, wszystkie przedstawione zagadnienia jak twierdzenie Gelfanda-Naimarka, konstrukcja GNS, definicje grafów kwantowych, jak i związek pomiędzy nimi, są zwięzłe i wystarczająco precyzyjnie opisane. Analogicznie, definicje liczby chromatycznej i kolorowania grafów kwantowych jak również grafów Knesera są zaprezentowane właściwie. Rozdział wprowadzający kończy przedstawienie podstawowych własności grafów Knesera (łącznie z definicjami tych własności) oraz dowodu wartości liczby chromatycznej dla tych grafów. Ostatnie uwagi, dotyczące uogólnień grafów Knesera są jedynie dość krótkimi wzmiankami i szkoda, że nie zawierają nieco więcej informacji np. jeśli chodzi o grafy Johnsona (które są jedynie wymienione z nazwy).

Rozdział drugi wprowadza definicję obiektu, który jest grafem kwantowym, nazwanym kwantowym grafem Knesera. W pierwszej kolejności autor wprowadza algebrę zbudowaną z k prostych składników skończenie wymiarowej algebry $C(X)$ o n prostych składnikach jako podalgebrę $C(X)^{\otimes k}$. Definicja i założenia co do stanu na algebrze wykorzystane są w dowodzie, że jest to delta-forma. Kluczowymi wynikami tego rozdziału są: pokazanie, iż jest to graf kwantowy, precyzyjne i jawne przedstawienie jego macierzy sąsiedztwa oraz, najistotniejszy rezultat, propozycja 2.12, która pokazuje, że dla klasycznego grafu (przemiennej algebry) definicja odtwarza klasyczny graf Knesera. Rozdział 3 przedstawia wyniki dotyczące kolorowania kwantowych grafów Knesera, dowodząc górnego ograniczenia na liczbę chromatyczną tego grafu a rozdział 4 bada widmo macierzy sąsiedztwa, co pozwala na oszacowanie dolnego ograniczenia liczby chromatycznej (która następnie jest dokładnie obliczona w kilku konkretnych przykładach).

Praca zawiera dwa dodatkowe rozdziały (załącznik A i B), jeden poświęcony definicji kwantowych grafów Knesera z użyciem języka kanałów kwantowych oraz rozdział opisujący wyniki dotyczące tzw. kwantowej konstrukcji Mycielskiego.

Wyniki zawarte w rozprawie doktorskiej są nowe, oryginalne i nietrywialne, i są niewątpliwie znacznym wkładem w badania nad grafami kwantowymi. Praca jest bardzo zaawansowana technicznie: nie tylko pokazuje istnienie pewnych obiektów, ale również precyzyjnie je konstruuje, co jest niebanalnym osiągnięciem.

Wydział

Fizyki

Astronomii

i Informatyki

Stosowanej

ul. prof. Stanisława

Łojasiewicza 11

PL 30-348 Kraków

tel. +48(12) 664-48-90

fax +48(12) 664-49-05

e-mail:

wydzial.fais@uj.edu.pl



UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Wydział

Fizyki

Astronomii

i Informatyki

Stosowanej

Praca jest przygotowana rzetelnie i zawiera znaczące rezultaty naukowe z dziedziny matematyki, jednakże autor nie ustrzegł się kilku drobnych niedoskonałości, które warto nadmienić:

- Wstęp zawiera pewną dozę nieścisłości w przedstawieniu genezy geometrii nieprzemiennej. Oczywiście, zwarte kwantowe grupy zostały zaproponowane i opisane przez Woronowicza, jednak trudno nie zauważyć pominięcia pierwszych prac Alaina Connesa dotyczących geometrii nieprzemiennej (np. „*Non-commutative differential geometry*”, *Publications Mathématiques de l'IHES* (62), 1985”).
- W lemacie 2.1 trochę trzeba domyśleć się znaczenia niektórych fragmentów notacji (np. zbioru, do którego należy α , trochę mylące jest też użycie tych samych indeksów we różnych częściach wzoru 2.7)
- Definicja rekurencyjna 2.15 powinna precyzować A_0 lub A_1 , gdyż w momencie definicji nie jest to jasne, dopiero pod koniec dowodu twierdzenia 2.2 możemy trochę to rozwikłać.
- Nie do końca rozumiem, dlaczego przy konstrukcji kwantowego grafu Knesera wybrane zostało przedstawienie algebry poprzez symetryzację iloczynu tensorowego (nie wydaje mi się by było to niezbędne).
- W przedstawieniu konstrukcji grafu Knesera brakuje trochę dwóch elementów: po pierwsze zanurzenia skonstruowanej podalgebry w algebrze $C(X)^{\otimes k}$ oraz prostego przykładu, który ilustrowałby, jak wygląda algebra, choćby dla $k=1$ i $k=2$.
- Dowód propozycji 2.12 pokazuje szczególny przypadek uogólnionego grafu Knesera, jednak omija przedstawienie argumentu, że jest to wystarczające dla dowolnego zbioru S (nawet jeśli jest oczywiste warto to wzmiankować).
- Nie jest jasne czy alternatywna definicja kwantowych grafów Knesera pokrywa się z wcześniejszą (choćby w niektórych przypadkach) oraz co tak naprawdę oznacza hipoteza A_4 (jakie są argumenty na jej słuszność i gdzie leży trudność w jej udowodnieniu).
- Dodatek B wydaje się być niespecjalnie związany z resztą rozprawy, szkoda, że nie został on bardziej powiązany z grafami Knesera (nie jest jasne co on daje w tym przypadku).

Przedstawione powyżej uwagi krytyczne nie umniejszają w żaden istotny osiągniętych przez p. mgra Chełstowskiego wyników. Podsumowując, praca pokazuje bardzo duże rozeznanie autora w tematyce grafów kwantowych oraz opanowanie w wystarczającym stopniu naprawdę trudnego i nowego działu matematyki. Praca jest wystarczająco przejrzysta i systematyczna, jedynie można zauważyć, iż nieco większa ilość wyjaśnień czy przykładów zdecydowanie dodałaby jej wartości.

Konkluzją niniejszej recenzji jest, iż przedstawiona rozprawa doktorska spełnia stawiane wymagania ustawowe oraz wymagania Uniwersytetu Warszawskiego określone w uchwale 157 Senatu UW. W szczególności prezentuje ona w sposób zadowalający ogólną wiedzę kandydata w zakresie matematyki oraz przedstawia oryginalne rozwiązanie problemu naukowego, którego mgr. Igor Chełstowski jest współautorem

Digitally signed
by Andrzej Sitarz
Date: 2026.07.15
13:47:45 +02'00'

prof. dr hab. Andrzej Sitarz
Instytut Fizyki Teoretycznej
Uniwersytet Jagielloński

ul. prof. Stanisława

Łojasiewicza 11

PL 30-348 Kraków

tel. +48(12) 664-48-90

fax +48(12) 664-49-05

e-mail:

wydzial.fais@uj.edu.pl