

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Jayantha Jayakumara
pt. „*Joint precision limits and measurement compatibility in
realistic quantum photonics sensing*”

Prof. UAM dr hab. Karol Bartkiewicz

1 Opinia ogólna

Przedstawiona rozprawa, przygotowana pod kierunkiem prof. UW dr hab. Magdaleny Stobińskiej, jest na wysokim poziomie merytorycznym i dotyczy ważnego oraz aktualnego problemu wyznaczania granic precyzji i zgodności pomiarów w realistycznych scenariuszach kwantowych pomiarów fotonicznych. Liczba i jakość przedstawionych wyników są w moim odczuciu zadowalające i wystarczające do spełnienia wymagań stawianych rozprawom doktorskim. Sama tematyka jest aktualna, ambitna i wpisuje się w nurt poszukiwań praktycznych protokołów metrologicznych, mogących stanowić alternatywę dla schematów opartych na bardzo trudnych do realizacji pomiarach kolektywnych. Rozprawa liczy 140 stron i jest oparta na dwóch pierwszoautorских publikacjach w renomowanych czasopismach: J. Jayakumar, M. E. Mycroft, M. Barbieri, M. Stobińska, *New Journal of Physics* **26**, 073016 (2024) oraz J. Jayakumar, M. Barbieri, M. Stobińska, *Physical Review A* **112**, 042604 (2025). Doktorant załączył ponadto publicznie dostępny kod numeryczny [221] zawierający implementację oryginalnych usprawnień obliczania ograniczenia Holevo–Cramér–Rao (HCRB), zastosowanych do stanów typu *generalized Holland–Burnett* (gHB). Pozytywne wrażenie sprawia również wybór stanów próbnych odpornych na straty fotonów, co świadczy o świadomości doktoranta co do ograniczeń aplikacyjnych wynikających ze stosowania idealizowanych stanów N00N.

W odróżnieniu od typowego dla prac doktorskich zwyczaju składania wydruków publikacji, mgr Jayakumar zdecydował się na samodzielne zredagowanie rozprawy. To dobre rozwiązanie, ponieważ umożliwia płynne przejście pomiędzy wprowadzeniem teoretycznym a wynikami badawczymi. Mimo to praca zawiera szereg drobnych usterek redakcyjnych. W polskim streszczeniu (s. ii) zauważyłem literówkę „Heisenbeg-limited sensitivity” zamiast „Heisenberg-limited sensitivity”. W tekście zdarzają się powtórzenia słów: „importance of the the energy conservation relation” (s. 12), „is simply referred to as the the tight bound” (s. 34) oraz „violation of the the” (s. 48). Zauważyłem również niespójność w pisowni: „Holevo-Cramer Rao bound (HCRB)” (s. 29) wobec stosowanego konsekwentnie w pozostałej części pracy poprawnego „Holevo–Cramér–Rao”. W pracy pojawiają się również formy „non-montonic” zamiast „non-monotonic” (s. 90) oraz „its needless to mention” zamiast „needless to mention” (s. 40). W całej pracy używane są na przemian formy brytyjska i amerykańska („behavior” / „behaviour”), co świadczy o braku ostatecznego ujednolicenia tekstu. Mimo wymienionych usterek lektura pracy jest stosunkowo przystępna, a wywód spójny.

Stopień zaangażowania mgra Jayakumara w uzyskanie przedstawionych wyników jest udokumentowany faktem, że doktorant jest pierwszym autorem obu publikacji stanowiących podstawę rozprawy, a oprócz tego przygotował publicznie udostępniony kod numeryczny implementujący usprawnione obliczanie HCRB. Stanowi to silne podstawy do uznania, że doktorant odegrał wiodącą rolę w przedstawionych badaniach, co spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim.

2 Ocena merytoryczna

2.1 Znaczenie problematyki w recenzowanej rozprawie

Tematyka rozprawy ma istotne znaczenie ze względu na zastosowania oraz opis układów pomiarowych wykorzystujących nieklasyczne właściwości światła, w szczególności splątanie i nieklasyczną statystykę liczby fotonów. Do takich zastosowań należą interferometryczne wykrywanie fal grawitacyjnych (LIGO/Virgo), pomiary fazy w obecności szumu (np. dyfuzja fazy oraz straty fotonów), a także precyzyjne pomiary parametrów fizycznych, takich jak pole magnetyczne czy temperatura. Tematyka rozprawy wpisuje się w szerokie zainteresowanie społeczności naukowej praktycznymi protokołami pomiarowymi, w których nie wszystkie parametry są *a priori* znane, a pomiary kolektywne są zwykle nieosiągalne eksperymentalnie. W szczególności kwestia zgodności pomiarów separowalnych (ang. *measurement compatibility*) z podstawowymi ograniczeniami precyzji jest przedmiotem żywej debaty teoretycznej, na co wskazuje znaczna liczba aktualnych pozycji bibliograficznych przywołanych w pracy.

2.2 Metodyka badawcza (założenia, cele, metody)

Celem badań mgra Jayakumara jest zbadanie granic precyzji łącznej estymacji fazy oraz parametrów uciążliwych (ang. *nuisance parameters*) w realistycznych interferometrach optycznych, a także ocena, jak dalece praktyczne pomiary separowalne odbiegają od podstawowego ograniczenia HCRB. Doktorant rozważa dwa konkretne przypadki: (i) łączną estymację fazy i dyfuzji fazy oraz (ii) łączną estymację fazy i strat fotonów. Jako stany próbne wybrano klasę stanów o ustalonej liczbie fotonów, powstałych w wyniku interferencji na rozdzielaczu wiązki dwóch wejściowych stanów Focka $|k, N - k\rangle$ — tzw. uogólnione stany Hollanda–Burnetta (gHB). Wybór tej klasy stanów uzasadniono tym, że dopuszczają one zarówno splątanie modowe, jak i splątanie cząstkowe, a jednocześnie są bardziej odporne na szum niż stany N00N. Jako pomiary separowalne rozważono detekcję podwójnie homodynową oraz zliczanie fotonów. Doktorant porównuje uzyskane czułości z hierarchią podstawowych ograniczeń: ograniczeniem Cramér–Rao (CRB), kwantowym Cramér–Rao (QCRB), Holevo–Cramér–Rao (HCRB), Nagaoka–Hayashi–Cramér–Rao (NHCRB) oraz *most informative bound* (MIB). Aby uchwycić jakość pomiarów separowalnych w obecności szumu oraz fundamentalnej niezgodności obserwacji optymalnych, mgr Jayakumar wprowadza nowe wskaźniki: *information extraction* Υ oraz *information availability* Σ^2 , a także ilościowe miary zgodności pomiarowej oparte na HCRB i NHCRB.

Od strony obliczeniowej zastosowano sformułowanie problemu HCRB jako programu półokreślonego (SDP), implementowanego w środowisku CVXPY i rozwiązywanego solverem MOSEK. Doktorant zaproponował szereg modyfikacji istniejącej funkcji HCRB w pakiecie *QuanEstimation*, w tym zmianę bazy operatorów oraz reformułowanie konstrukcji macierzy S_θ , prowadzące do redukcji złożoności obliczeń tego kroku o czynnik d^2 (gdzie d jest wymiarem przestrzeni Hilberta), a także do redukcji o czynnik p^2 w realizacji warunku lokalnej nieobciążoności (gdzie p jest liczbą estymowanych parametrów). Dobór metod jest adekwatny do problemu, a połączenie podejścia analitycznego i numerycznego świadczy o dobrej znajomości warsztatu badawczego.

2.3 Struktura rozprawy

Rozprawa jest podzielona na sześć rozdziałów, uzupełnionych obszernym dodatkiem (A1–A9). Rozdziały następują po sobie w sposób logicznie spójny: od ogólnego wprowadzenia w kwantowe pomiary fotoniczne (rozd. 1), przez aparat formalny estymacji wieloparametrowej (rozd. 2), do oryginalnych wyników badawczych (rozd. 3 i 4), implementacji numerycznej (rozd. 5) oraz podsumowania (rozd. 6). Struktura jest dobrze przemyślana, a wprowadzenie do każdego rozdziału jasno określa jego cel i odniesienie do reszty pracy. Rozdział poświęcony metodom numerycznym wyróżnia recenzowaną rozprawę spośród prac doktorskich z dziedziny metrologii

kwantowej, a załączony publicznie kod (pozycja [221]) wzmacnia przejrzystość i powtarzalność uzyskanych wyników.

2.4 Wykorzystana literatura

Praca jest opatrzona obszerną i aktualną bibliografią, liczącą 224 pozycje, obejmującą zarówno klasyczne prace teoretyczne (np. Holevo, Hayashi, Nagaoka), jak i bardzo niedawne publikacje z lat 2024–2025. Bibliografia jest dobrze dobrana i pokrywa zarówno aspekty teoretyczne (estymacja wieloparametrowa, niezgodność pomiarów, hierarchia podstawowych ograniczeń), jak i eksperymentalne (źródła SPDC, detektory SNSPD/TES, detekcja homodynowa). Pewnym mankamentem jest niekonsekwentne formatowanie tytułów: w pozycji [154] widoczny jest niezamierzony fragment kodu $\text{\LaTeX}$ („Cram\’er-Rao” zamiast „Cramér-Rao”), a w wielu pozycjach (m.in. [55], [208]) słowo „Heisenberg” jest zapisane małą literą — co zwykle wynika z braku ochrony wielkiej litery klamrami w pliku BibTeX. Występują też nieścisłości w zapisie polskich nazwisk: „Demkowicz-Dobrzański” pojawia się poprawnie w większości pozycji (np. [9], [25], [63], [151], [175]), ale w pozycjach [26] i [56] zapisano „Demkowicz-Dobrzanski” bez polskiego znaku diakrytycznego. Ponadto, niektóre nazwy czasopism zapisane są raz pełną nazwą („Physical Review A”), raz skrótem („Phys. Rev. A”). Pozycje [170] i [219] odnoszą się do tego samego preprintu arXiv:2208.07386 i zostały wpisane w bibliografii dwukrotnie z drobnymi różnicami formatowania. Pozycję [118] zacytowano jako preprint arXiv:1209.5721, mimo że została opublikowana jako A. Lamas-Linares i in., *Applied Physics Letters* **102**, 231117 (2013).

2.5 Szczegółowa ocena merytoryczna poszczególnych części rozprawy

Rozdział 1 stanowi solidne wprowadzenie do tematyki kwantowych pomiarów fotonicznych. Opisano fotoniczne stopnie swobody, formalizm interferometru Macha–Zehndera, generację stanów wielofotonowych poprzez SPDC, metody detekcji oraz wnioskowanie bayesowskie i metodę największej wiarygodności. Rozdział jest napisany przystępnie i dobrze pełni swoją rolę.

Rozdział 2 prezentuje aparat formalny estymacji wieloparametrowej w klarownej hierarchii ograniczeń $\text{CRB} \rightarrow \text{QCRB} \rightarrow \text{HCRB} \rightarrow \text{NHCRB} \rightarrow \text{MIB}$. Doktorant rzetelnie omawia wzajemne relacje między tymi ograniczeniami, w tym kwestie ich osiągalności, addytywności oraz interpretacji w kontekście pomiarów separowalnych w porównaniu z pomiarami kolektywnymi. W moim odczuciu jest to jeden z najbardziej wartościowych rozdziałów pracy z perspektywy czytelnika, ponieważ systematyzuje dość rozproszony stan literatury. Drobnym niedociągnięciem jest mało staranne wprowadzanie niektórych symboli; np. rozróżnienie pomiędzy Tr a tr (s. 20) wymaga uwagi czytelnika.

Rozdział 3 prezentuje pierwszy oryginalny wynik pracy — łączną estymację fazy i dyfuzji fazy. Doktorant wprowadza dwa wskaźniki: *information extraction* Υ i *information availability* Σ^2 , które wzajemnie się uzupełniając opisują wydobycie informacji przez wybrany pomiar oraz zawartość informacyjną samego stanu. Wykazano, że stany $|\Psi_{\text{gHB}}(0, N)\rangle$ — generowane przez wprowadzenie wszystkich N fotonów do jednego portu rozdzielacza — są najbardziej odporne na dyfuzję fazy oraz straty fotonów spośród rozważanych konfiguracji. Wynik ten ma znaczenie aplikacyjne, ponieważ takie stany są stosunkowo łatwiejsze do wytworzenia eksperymentalnego niż stany splątane jednocześnie modowo i między cząstkami.

Rozdział 4 prezentuje drugi oryginalny wkład rozprawy — analizę zgodności pomiarów (*measurement compatibility*). Doktorant wprowadza miary r_H^C i r_N^C , oparte odpowiednio na HCRB i NHCRB, oraz porównuje detekcję podwójnie homodynową ze zliczaniem fotonów dla łącznej estymacji fazy i strat oraz fazy i dyfuzji. Wnioski są niebanalne: zliczanie fotonów (pomiar nie-Gaussowski) wykazuje lepszą zgodność z ograniczeniem podstawowym dla stanów gHB (nie-Gaussowskich) niż detekcja homodynowa. Wynik ten potwierdza intuicję, że stanom nie-Gaussowskim „odpowiadają” pomiary nie-Gaussowskie. Tabela 4.1, podsumowująca osiągalność

ograniczeń w trzech rozważanych scenariuszach, stanowi cenne źródło odniesienia. Wykresy są merytorycznie poprawne i dobrze ilustrują przedstawione wyniki, można je jednak ulepszyć: trójwymiarowa projekcja na rys. 4.7, 4.8 i 4.15 oraz wąski zakres osi z w panelach (b) rys. 4.7 i 4.8 powodują wizualne nakładanie się powierzchni dla różnych N — alternatywą mogłaby być mapa konturowa lub heatmapa. Opisy osi na rys. 4.13–4.16 mogłyby zawierać pełne nazwy zmiennych (np. „measurement compatibility r_H^C ” zamiast samego symbolu), a w przypadku rys. 4.13 i 4.14 warto rozważyć zmianę kierunku osi y na wzrastający, zgodnie ze standardową konwencją.

Rozdział 5 jest poświęcony metodom numerycznym, w szczególności sformułowaniu problemu HCRB jako SDP oraz implementacji w Pythonie. Walorem tego rozdziału jest opis konkretnych usprawnień istniejącego kodu pakietu `QuanEstimation`, dzięki którym możliwe stało się efektywne obliczanie HCRB dla większych liczb fotonów. Jako czytelnik oczekiwałbym jednak ilościowego porównania czasów obliczeń przed wprowadzonymi usprawnieniami i po nich, np. w postaci wykresu czasu obliczeń jako funkcji N . Ponadto rozdział mógłby zawierać krótką dyskusję dotyczącą stabilności numerycznej dla stanów o niepełnym rzędzie macierzy gęstości, których obliczenia wymagają regularyzacji — zostało to wspomniane w sekcji „Error handling”, ale bez analizy wpływu parametru regularyzacyjnego ϵ .

Rozdział 6 zwięźle podsumowuje uzyskane wyniki i wskazuje kierunki dalszych badań — globalną estymację bayesowską, estymację w czasie rzeczywistym, rozszerzenie na większą liczbę parametrów oraz porównanie stanów i pomiarów Gaussowskich z nie-Gaussowskimi. Wskazane kierunki są naturalne i dobrze wpisują się w aktualne nurty badawcze.

2.6 Język i formalna strona rozprawy

Praca została napisana w naukowym, w większości przystępnym, języku angielskim. Jest stosunkowo starannie zredagowana, zawiera jednak literówki i drobne błędy redakcyjne. W szczególności pojawia się literówka w polskim streszczeniu („Heisenbeg-limited” zamiast „Heisenberg-limited”), powtórzenia słów („the the” w trzech miejscach), niespójność w zapisie „Holevo–Cramér–Rao” (raz „Holevo–Cramer Rao”), niepoprawne formy „non-montonic” oraz „its needless” oraz mieszanie pisowni brytyjskiej i amerykańskiej („behavior” / „behaviour”). Niektóre podpisy rysunków są lakoniczne i nie identyfikują wszystkich symboli pojawiających się na rysunku. Mimo tych niedociągnięć praca jest czytelna i zawiera spójny wywód. Wymienione usterki nie zmieniają mojej pozytywnej oceny jakości naukowej rozprawy.

3 Pytania problemowe

- Jaki jest ilościowy zysk czasu obliczeniowego (np. dla wybranego N) wynikający z proponowanych usprawnień implementacji HCRB w stosunku do funkcji w pakiecie `QuanEstimation`?
- Stany $|\Psi_{\text{gHB}}(0, N)\rangle$, uznane za optymalnie odporne na szum, są separowalne na poziomie cząstek, a jedynie splątane modowo. Czy oznacza to, że splątanie cząstkowe nie jest niezbędne do osiągnięcia wysokiej czułości wieloparametrowej w obecności strat fotonów i dyfuzji fazy? Czy wynik ten można uogólnić na większą liczbę parametrów szumu lub większą liczbę portów wejściowych interferometru?
- W rozdziale 4 pomiar zliczania fotonów wykazuje większą zgodność (mniejsze r_H^C) z ograniczeniem podstawowym niż detekcja homodynowa dla stanów gHB. Jak ten wynik zmieni się dla stanów Gaussowskich (np. stanów z dwumodowym ściskaniem)?
- Na ile praktyczna jest eksperymentalna realizacja ograniczenia NHCRB? Czy autor proponuje konkretną realizację optymalnego pomiaru separowalnego osiągającego NHCRB dla rozważanych zadań?

K. Burt

- e. Jakie są perspektywy eksperymentalnego wykorzystania uzyskanych wyników teoretycznych w obecnie działających lub planowanych układach metrologicznych (np. w detektorach fal grawitacyjnych następnej generacji)?
- f. W jaki sposób uzyskane wyniki dla estymacji statycznej rozszerzają się na estymację w czasie rzeczywistym, w której wnioskowanie odbywa się dynamicznie?
- g. Czy rozważano użycie regularyzacji Tichonowa lub innych technik zamiast dodawania stanu termicznego $(1 - \varepsilon)\rho + \varepsilon\sigma$ w obliczeniach dla stanów o niepełnym rzędzie macierzy gęstości? Jak wartość ε wpływa na uzyskane wartości HCRB?

4 Wnioski i opinia końcowa

Mimo przedstawionej krytyki moja opinia o pracy pozostaje pozytywna. Przedłożona mi do recenzji rozprawa doktorska spełnia ustawowe kryteria określone w art. 187 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. — Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz.U. z 2024 r. poz. 1571 z późn. zm.), tj.:

- stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego, jakim jest wyznaczenie granic precyzji oraz oszacowanie zgodności praktycznych pomiarów separowalnych w łącznej estymacji fazy i parametrów uciążliwych w realistycznej interferometrii kwantowej;
- dokumentuje ogólną wiedzę teoretyczną doktoranta w dyscyplinie nauki fizyczne, zwłaszcza w zakresie kwantowej teorii informacji, optyki kwantowej i metrologii kwantowej;
- potwierdza umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej, co dodatkowo potwierdza fakt, że doktorant jest pierwszym autorem obu publikacji stanowiących podstawę rozprawy oraz autorem publicznie udostępnionego kodu numerycznego;
- do rozprawy załączone są streszczenia w językach polskim i angielskim.

Do najważniejszych walorów recenzowanej pracy należy zaliczyć:

- ważność i aktualność podjętej tematyki;
- solidną metodologię i adekwatny dobór metod badawczych;
- nowatorski wkład w postaci wskaźników *information extraction* oraz *information availability*, a także miar zgodności pomiarowej opartych na HCRB i NHCRB;
- praktyczną wartość udostępnionego publicznie kodu numerycznego, który skraca czas obliczeń HCRB i pozwala na badanie stanów o większej liczbie fotonów;
- pierwszoautorski wkład doktoranta w obu publikacjach stanowiących podstawę rozprawy.

Stwierdzam, że recenzowana rozprawa doktorska mgra Jayantha Jayakumara pt. „*Joint precision limits and measurement compatibility in realistic quantum photonics sensing*” spełnia wymogi stawiane rozprawom doktorskim w wymienionej wyżej ustawie i na tej podstawie wnioskuję do Rady Naukowej Dyscypliny Nauki Fizyczne Uniwersytetu Warszawskiego o jej dopuszczenie do publicznej obrony.



Prof. UAM dr hab. Karol Bartkiewicz