



Lyon, 14-ty lipca 2026

Karol Kajetan Kozłowski,
Directeur de Recherche CNRS,
Laboratoire de Physique, UMR 5672 du CNRS
École Normale Supérieure de Lyon,
46, allée d'Italie, 69007, France,
karol.kozlowski@ens-lyon.fr

Recenzja doktoratu Pedrama Karimi

Praca doktorska Pedrama Karimiego podpada pod fizykę matematyczną, a konkretnie przedstawia zbiór wyników z teorii funkcji specjalnych. Owa poddziedzina fizyki matematycznej zajmuje się opisem funkcji, których konstrukcja oparta jest na strukturach algebraicznych takich jak, na przykład, grupy Liego lub grupy kwantowe. Rozprawa jest podzielona na wstęp, dwa rozdziały i dwa załączniki zawierające techniczne wyniki.

Wstęp w sposób zwięzły i jasny przedstawia wyniki zawarte w pracy doktorskiej.

Rozdział pierwszy jest poświęcony opisowi wyników, jakie Pedram Karimi otrzymał w dziedzinie funkcji hipergeometrycznej Gaussa. Rozdział ten jest oparty na artykule: J. Dereziński, P. Karimi *Exactly Solvable Schrödinger Operators Related to the Hypergeometric Equation*, Milan J. Math. (2026). (<https://doi.org/10.1007/s00032-026-00431-9>). Rozdział rozpoczyna się od pedagogicznego wstępu przedstawiającego podstawowe właściwości funkcji hipergeometrycznej Gaussa. Autor następnie opisuje różne typy operatorów Schrödingera, jakie mogą być otrzymane poprzez różne transformacje kanonicznego równania hipergeometrycznego. Dyskutuje on również interpretację geometryczną tych operatorów jako wynikających z separacji zmiennych w laplasjanach na różnych przestrzeniach z krzywizną. W ten sposób autor przedstawia 9 typów operatorów Schrödingera. Ów dłuższy wstęp pozwala wreszcie wprowadzić techniczne zagadnienia, jakie autor przeanalizował. Wynikiem kluczowym pracy jest dowód domkniętości tych operatorów, jak i podanie zamkniętych wyrażeń na jądra całkowe ich rezolwent i

opis ich spektrum. Co więcej, autor otrzymuje tzw. formuły transmutacji pozwalające przejść pomiędzy rezolwentami powiązanych ze sobą operatorów. Wreszcie, autor otrzymuje równania (0.1.19) i (0.1.20) łączące ze sobą hipergeometryczne hamiltoniany drugiego rzędu. Reszta rozdziału poświęcona jest aspektom technicznemu dotyczącym wywodzenia wyżej wymienionych wyników: opisowi warunków brzegowych, funkcji Greena, zmian współrzędnych na funkcjach Greena i domkniętości hamiltonianów hipergeometrycznych. Rozdział kończy się opisem obserwacji autora, iż kwantyzacja nodalna pozwala otrzymać spektrum hamiltonianów hipergeometrycznych sferycznych, hiperbolicznych i de Sitterowskich pierwszego rzędu. Autor powiązuje te obserwacje z metodą kwantowania BKW i wysuwa przypuszczenie, iż w przypadku hamiltonianów hipergeometrycznych będzie ona dokładna.

Rozdział drugi opisuje wyniki otrzymane przez autora związane z całkami β -zbiorów. Zostały one otrzymane w artykule: A. Bawane, P. Karimi, P. Sulkowski, *Proving superintegrability in β -deformed eigenvalue models*, SciPost Phys. 13, 069 (2022). Ów rozdział zaczyna się od przypomnienia o partycjach liczb rzeczywistych i związanych z nimi funkcjach, między innymi, wielomianach Jacka. Autor wprowadza później perturbowaną miarę β -zbiorów i przepisuje ją w sposób algebraiczny w (2.3.10). Reszta rozdziału jest poświęcona części oryginalnej pracy autora: dowodowi przypuszczenia dotyczącego zamkniętego wyrażenia na funkcje wielopunktowe β -zbiorów z potencjałami czysto kwadratycznymi, wielomianowymi drugiego rzędu, jak i liniowo logarytmicznymi. Praca [CLZ] zaproponowała przypuszczenie zamkniętego wyrażenia, zapisanego jako pewien stosunek wielomianów Jacka, dla wartości oczekiwanych funkcji wielopunktowych zadanych przez wielomiany Jacka. Było ono sprawdzone numerycznie dla partycji o długościach ≤ 9 . P. Karimi przeprowadził dowód owych relacji w każdym z wyżej wymienionych przypadków. Praca doktorska udowadnia również nieopublikowany wynik generalizujący poprzednie: zamknięte wyrażenie na wartość oczekiwaną iloczynu dwóch wielomianów Jacka w zdeformowanych β -zbiorach. Poprzednie wyniki występują jako specjalizacje owego wyniku.

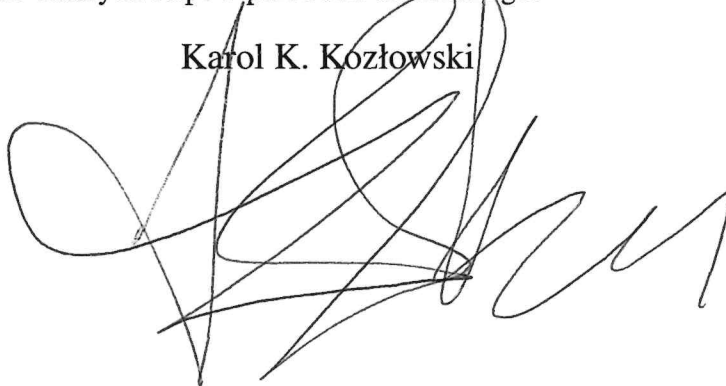
Pierwsze wprowadzenie konceptu ciągu hipergeometrycznego ma już prawie 400 lat, a badania nad tzw. funkcją hipergeometryczną Gaussa zaczęły się jakieś 300 lat temu. Jest więc jasne, iż jest to dziedzina, w której ciężko odkryć coś nowego. A jednak P. Karimi był w stanie dorzucić swój wkład do teorii! Z tej perspektywy nowe identyczności (0.1.19) i (0.1.20) są godne podziwu. Choć całki β -zbiorów są młodsze, pojawiając się dopiero w XX wieku, z powodu szerokiego ich zastosowania do wielu problemów są również bardzo przebadane. Tu również, pomimo tego faktu, P. Karimemu udało się otrzymać nowy, strukturalnie ładny wynik. Chciałbym w ten sposób podkreślić wysiłek, jaki jest potrzebny, by wnieść coś nowego do już dobrze ustatkowanej dziedziny. W obydwu przypadkach otrzymane wyniki są techniczne i wymagają porządnego wkładu intelektualnego, by najpierw przyswoić sobie teorię na odpowiednim poziomie, a potem wnieść do niej coś nowego.

Uważam, że wyniki otrzymane w rozprawie doktorskiej są eleganckie i stanowią krok do przodu w zrozumieniu danych funkcji specjalnych. Praca doktorska jest napisana w sposób przejrzysty, a czyta się ją przyjemnie. Wreszcie autor wykazał się ekstensywną

znajomością literatury przedmiotu jego badań.

Zaznaczę, iż z mojego punktu widzenia rozprawa jak najbardziej spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane pracom doktorskim. Wnoszę więc o dopuszczenie mgr. Pedrama Karima do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Karol K. Kozłowski

A large, stylized handwritten signature in black ink, overlapping the printed name 'Karol K. Kozłowski'.

